ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Хабаровск 2000 г.

Министерство образования Российской Федерации
Хабаровский государственный технический университет

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Краткий справочник

Хабаровск
Издательство
ХГТУ
2000г.

УДК 517

Высшая математика: Краткий справочник / Сост. Л. В. Васильева, В. В. Мухранова, О. А. Романчук – Хабаровск: Издательство Хабаровского государственного технического университета, 2000 г.–52 с.

Работа составлена на кафедре «Высшая математика». Содержит формулы и краткие сведения из основных разделов математики.

Для студентов всех курсов и специальностей при выполнении контрольных и самостоятельных работ, домашних заданий.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Высшая математика» и методического совета ФММПУ.

Главный редактор *Л. А. Суевалова*
Редактор *Е. Н. Ярулина*
Компьютерная верстка *Т. Б. Дамбаевой*

Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 020526 от 23.04.97
Подписано в печать 09.11.00. Формат×84 1/16.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 450 экз. Заказ 26. С136.

Издательство Хабаровского государственного технического университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Содержание

Элементарная математика

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2$$

Свойства степени

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Свойства логарифмов

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a^b = b$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$$

Формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\mp\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Значения тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Формулы приведения

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sinx	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cosx	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctgx	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Решение тригонометрических уравнений

1. $\sin x$=a, |a|≤1,

   $x = (-1)^n \arcsin\alpha + \pi n, n \in Z$

   $(\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha)$.

   В частности,

   $\sin x = 0, \qquad x = \pi n, n \in Z$

   $\sin x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

2. $\cos x = \alpha, \qquad |a| \leq 1,$

   $x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n, n \in Z;$

   $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos \alpha).$

   В частности,

   $\cos x = 0, \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$
   $\cos x = 1, \qquad x = 2\pi n, n \in Z;$
   $\cos x = -1, \qquad x = \pi + 2\pi n \ inZ.$

3. $\operatorname{tg} x = \alpha,$
   $x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n,\ n \in Z; \quad (\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha).$

4. $\operatorname{ctg} x = \alpha,$
   $x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi n,\ n \in Z; \quad (\operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg} \alpha).$

Прогрессии

Арифметическая

$a_{n+1} = a_n + d$ −определение арифметической прогрессии.

$a_n = a_1 + d(n-1)$ −формула n-го члена.

$a_n = \dfrac{a_{n-e} + a_{n+e}}{2}$ −характеристическое свойство.

$S_n \dfrac{a_1 + a_n}{2} \quad n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \quad n$ −формула суммы n первых членов.

Геометрическая

$b_{n+1} = b_n q$ −определение геометрической прогрессии.

$b_n = b_1 q^{n-1}$ −формула n-го члена.

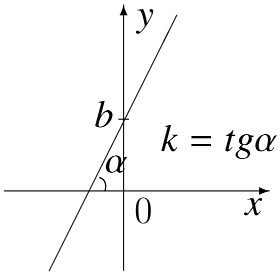
$b_n^2 = b_{n-e} \cdot b_{n+e}$ −характеристическое свойство.

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ −формула суммы n первых членов.

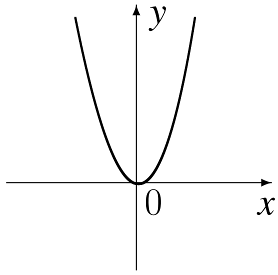
$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ −сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии |q|<1.

Элементарные функции и их графики

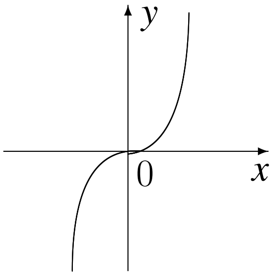
Прямая $y = kx + b$



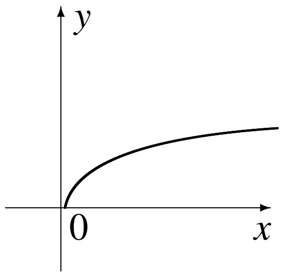
Парабола $y = x^2$



Кубическая парабола
$y = x^3$

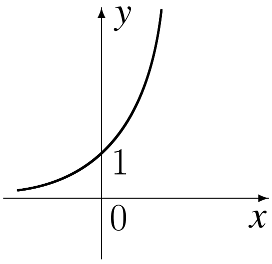


Парабола $y = \sqrt{x}$

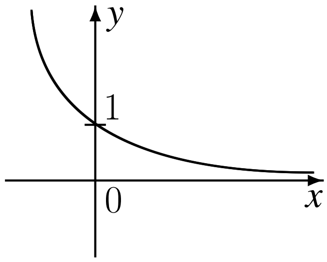


Показательная функция $y = a^x$

$a > 1$

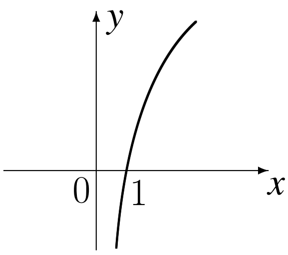


$0 < a < 1$

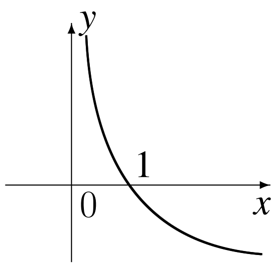


Логарифмическая функция $y = \log_a x$

$a > 1$

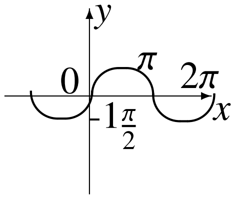


$0 < a < 1$

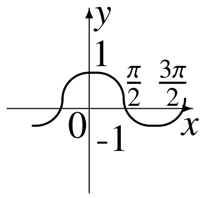


Тригонометрические функции

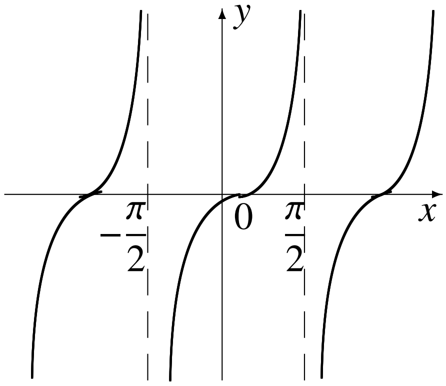
$y = \sin x$



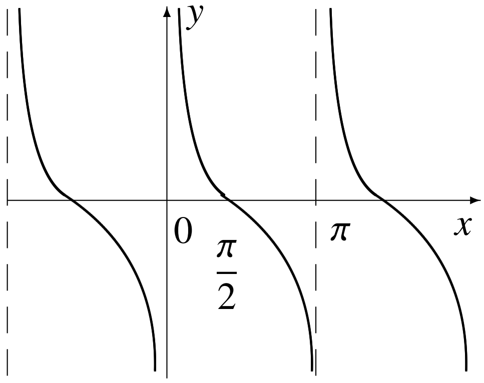
$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

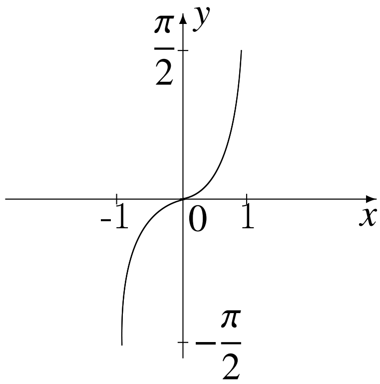


$y = \operatorname{ctg} x$

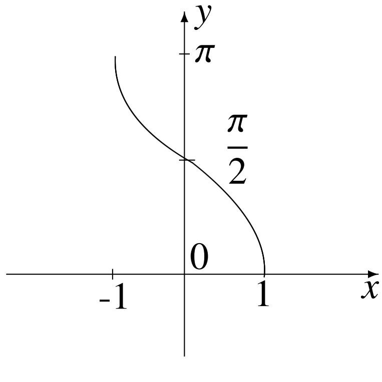


Обратные тригонометрические функции

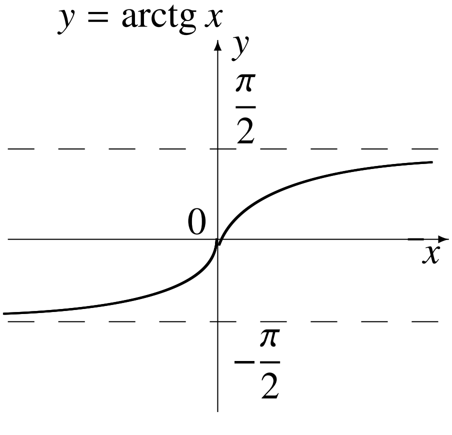
$y = \arcsin x$



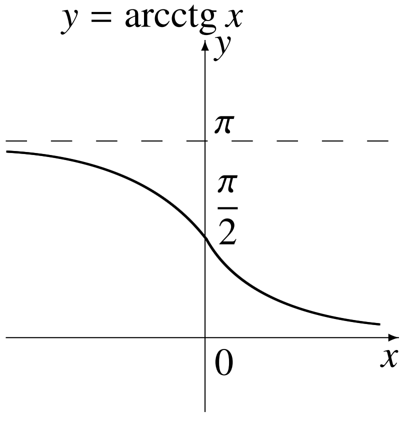
$y = \arccos x$



$y = \operatorname{arctg} x$



$y = \operatorname{arcctg} x$



Основы линейной алгебры и аналитической геометрии

Определители

Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}.$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.

Алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Матрицы

Матрица–прямоугольная таблица чисел.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$$

Умножение матрицы на число
$A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, $\alpha \in R$, $B = \alpha A = \left(\alpha\ a_{ij}\right)_{m,n}$.

Сложение матриц
$A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$; $B = \left(b_{ij}\right)_{m,n}$; $C = A + B = \left(c_{ij}\right)_{m,n}$; $\qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Умножение матриц
$A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$; $B = \left(b_{ij}\right)_{n,k}$; $C = AB = \left(c_{ij}\right)_{m,k}$;

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Каждый элемент матрицы C равен скалярному произведению строки левой матрицы A на соответствующий столбец правой матрицы B.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{– единичная.}$$

Схема нахождения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы A, $det\ A \neq 0$.
2. Для каждого элемента a_{ij} найти алгебраические дополнения A_{ij}.
3. Составить новую матрицу A_1, заменив элементы a_{ij} матрицы A на алгебраические дополнения A_{ij}.
4. Протранспонировать матрицу A_1 (поменять местами строки и столбцы), получим A_1^T.
5. $A_1^{-1} = \dfrac{1}{det A_1}\ A_1^T$.

Решение систем линейных уравнений

Формулы Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \triangle x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\triangle x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \triangle x_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\triangle x_1}{\triangle},\ x_2 = \frac{\triangle x_2}{\triangle},\ x_3 = \frac{\triangle x_3}{\triangle}.$$

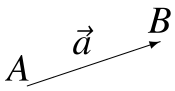
Матричный метод

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $X = A^{-1}B$.

Векторы

Вектор–направленный отрезок.



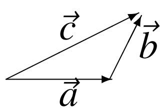
Длина или **модуль** вектора $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$–расстояние между его началом и концом.

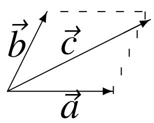
Коллинеарные векторы параллельны одной прямой.

Компланарные векторы параллельны одной плоскости.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \text{коллинеарны, одинаково направлены, } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$





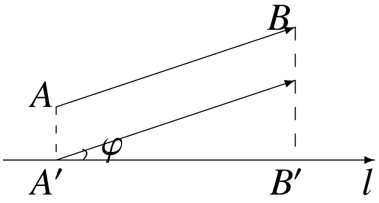
Произведение вектора $|\vec{a}|$ на число α, $|\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$:

1. $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$,

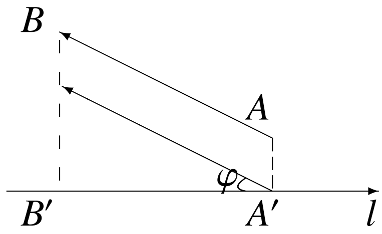
2. $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$,

3. $\alpha < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ противоположно направлены.

Проекция вектора на ось:



$P_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$



$P_l\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$

$$P_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$$

Координаты вектора–его проекции на оси координат.

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ – координаты точек.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (a_x, a_y, a_z)$, где

$a_x = p_{0x}\vec{a} = x_2 - x_1$, $a_y = p_{0y}\vec{a} = y_2 - y_1$, $a_z = p_{0z}\vec{a} = z_2 - z_1$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$

$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x,\ \alpha a_y,\ \alpha a_z)$

Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Направляющие косинусы вектора:

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$, $\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Орт вектора $\vec{a}$: $\vec{e} = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$-декартов базис

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

Произведение векторов

скалярное–число

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$

векторное–вектор

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi \\ \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка} \end{cases}$$

смешанное-число

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$

Вычисление в координатной форме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

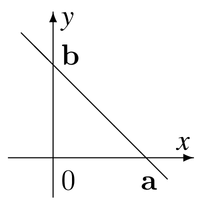
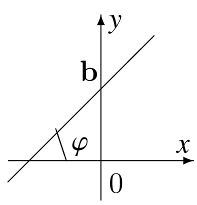
Применение

$\cos(\hat{a,b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ $\qquad S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ $\qquad V_n = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$

$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$ $\qquad M = \vec{l}\times\vec{F}$ $\qquad V_T = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$

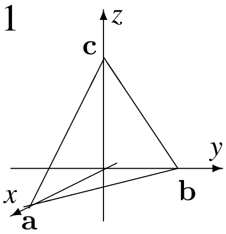
$A = \vec{F}\vec{S}-$ работа $\qquad$ момент силы $\qquad$ объем тетраэдра

Прямая на плоскости

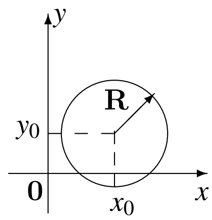
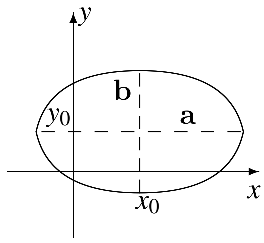
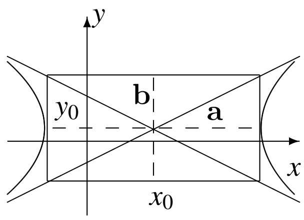
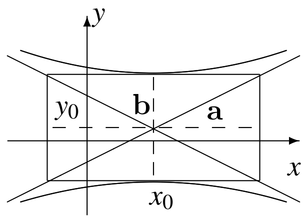
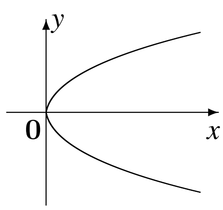
Название формулы	Формула
1. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
2. Уравнение прямой в общем виде	$Ax + By + C = 0$
3. Уравнение прямой в "отрезках"	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ 
4. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, с заданным угловым коэффициентом k	$y - y_0 = k(x - x_0)$
5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$ $k = \operatorname{tg}\varphi$ 

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
7. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\overrightarrow{l} = \{p; q\}$	$\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$
8. Параметрические уравнения прямой	$x = x_0 + pt$ $y = y_0 + qt$
9. Угол между двумя прямыми	$\cos\varphi = \dfrac{A_1 a_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$
10. Условие параллельности двух прямых	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}, k_1 = k_2$
11. Условие перпендикулярности двух прямых	$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
12. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Прямая и плоскость в пространстве

Название формулы	Формула
1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно заданному вектору$\overrightarrow{N} = \{A; B; C\}$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
2. Уравнение плоскости в общем виде	$Ax + By + Cz + D = 0$
3. Уравнение плоскости в "отрезках"	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 
4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; y_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
6. Канонические уравнения определяют прямую, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, и параллельную вектору $\overrightarrow{l} = \{m; n; p\}$	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$
7. Параметрические уравнения прямой	$x = x_0 + mt$ $y = y_0 + nt$ $z = z_0 + pt$

Кривые второго порядка

Уравнение	**Кривая**
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ Окружность	
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ Эллипс	
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ $$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$ Гипербола	
$y^2 = 2px (p > 0)$ Парабола	

Введение в математический анализ

Предел функции

Число A называется ***пределом*** функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Свойства

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

   Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Замечательные пределы

I (первый)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

II (второй)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Величины

(при $x \to x_0$)

Бесконечно малая

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

Бесконечно большая

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$$

Эквивалентные

$$\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$$

Если $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$$

Эквивалентные величины

$\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
2. $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
4. $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\alpha^2(x)$
6. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
7. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
8. $(1+\alpha(x))^k-1\sim k\cdot\alpha(x)$

при $x\to\infty$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\sim a_nx^n$$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\left(\frac{0}{0}\right)\text{или}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right\}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Дифференциальное исчисление

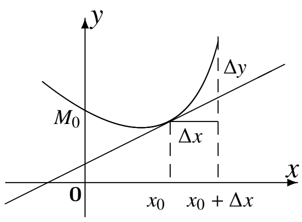
Производная

Производная функции $y = f(x)$в точке x_0 :

$$y' = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ - тангенс наклона касательной к графику функции $y = f(x)$в точке $M_0(x_0; f(x))$



Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Физический смысл

$$y'(t) = v(t) - \text{скорость} \qquad y''(t) = a(t) - \text{ускорение}$$

Правила дифференцирования

C − постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ − дифференцируемые функции

1. $(c)' = 0$
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Дифференцирование сложной функции

$$y = f[u(x)]; \qquad y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Вторая производная:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = [f'(x)]'$$

Таблица производных

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(x') = 1$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u$
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
16. $(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u \cdot u'$
17. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
18. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$

Логарифмическое дифференцирование

$y = u(x)^{v(x)}$

$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot 1u(x) \cdot u'(x)$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$$

Дифференциал

Функция $y = f(x)$, дифференциал $dy = y' \cdot dx = f'(x)dx$, $dx = \Delta x$, $dy \approx \Delta y$

Свойства дифференциала

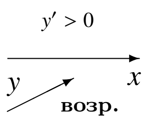
(С - постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ - дифференцируемые функции)

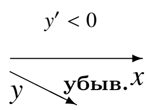
1. $d(c) = 0$
2. $d(cu) = cdu$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$
4. $d(uv) = udv + vdu$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Исследование функций

Функция $y = f(x)$

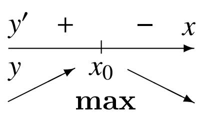
Монотонность

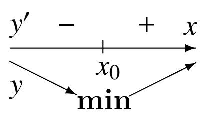




Экстремумы

$x_0 \in D(f)-$критическая точка I рода $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или$f'(x_0)$ не существует.



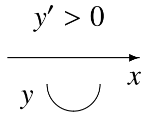


Наибольшее и наименьшее значения функций, непрерывной на отрезке [a, b]

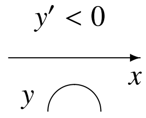
1. Найти критические точки (кр. т.) функции $f(x)$
2. Вычислить $f(a)$, $f($(кр. т.), $f(b)$
3. Выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

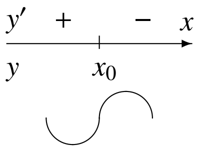
$x_0 \in D(f)$ – критическая точка II рода $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.



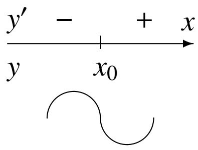
Вогнута



Выпукла



Точка перегиба



Точка перегиба

Асимптота

Вертикальная **:** $x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = \pm\infty;$

Наклонная **:** $y = kx + b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k; b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx];$

Горизонтальная **:** $y = b \Leftrightarrow k = 0, \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b.$

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

$F(x)$ - первообразная $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ - множество всех первообразных.

Свойства

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c$
3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = sinx + c$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + c$
14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$
15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$
16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$
17. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = \operatorname{th} x + c$
18. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$

Основные правила интегрирования

1. $\displaystyle\int (x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow \int f(\phi(x))d(\phi(x)) = F[\phi(x)] + c$
2. $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

3. **Замена переменной**

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dx \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$$

4. **Интегрирование по частям**

$$\int (x)dx = uv - \int vdu \text{ или}$$

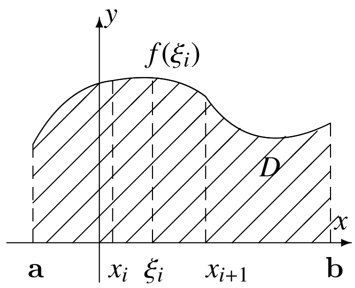
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Определенный интеграл

$y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi) \cdot \Delta x_i \ ,$$

$\xi \in [x_i; x_{i+1}], \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$



Геометрический смысл

$f(x) \geq 0$ на $[a, b]$; D – криволинейная трапеция, ограничена

$y = f(x), x = a, x = b, y = 0;$

$$\int_a^b f(x)dx = S(D) - \text{площадь D}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$F(x)$ – первообразная $f(x)$

Замена переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha(\varphi(\alpha) = a) \\ x = b \Rightarrow t = \beta(\varphi(\beta) = b) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Кривая	Площадь фигуры	Длина кривой	Объем тела вращения
$y = f(x) \geq 0$ $x \in [a, b]$	$S = \int_a^b f(x)dx$	$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$	$v_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ $v_y = 2\pi \int_a^b x\lvert f(x)\rvert dx$
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [a, b]$	$S = \left\lvert \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \right\rvert$	$L = \left\lvert \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt \right\rvert$	$v_x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt$ $v_y = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t)y(t)x'(t)dt$
$r = r(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$	$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$	$v_t = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi$

Механические приложения определенного интеграла

	Кривая: $y = f(x)$, $x \in [a,b], \rho = \rho(x)-$ плотность, $dL = \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$	Фигура: $y = f(x)$, $x = a, x = b, y = 0$, плотность $\rho = const$
Масса	$m = \int\limits_a^b \rho(x)dL$	$m = \int\limits_a^b \rho f(x)dx$

Функции нескольких переменных

$z = f(x,y)$ - функция двух переменных.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$ - частная производная по $x\,(y = const)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$ - частная производная по $y\,(x = const)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (z'_x)'_x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (z'_x)'_y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(z'_y\right)'_x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(z'_y\right)'_y;$$

Экстремум функции двух переменных

Необходимые условия:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ или не существуют.

(x_0, y_0) - критическая точка.

Достаточные условия:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0,y_0),\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

1. $AC - B^2 > 0,\ A < 0 \Rightarrow$ в точке P максимум.

2. $AC - B^2 > 0,\ A > 0 \Rightarrow$ в точке P минимум.

3. $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет.

4. $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ необходимо дополнительное исследование.

Производная по направлению

Функция $u = f(x, y, z)$, $\bar{\ell} = \overline{MM_1}$ - вектор,

$\dfrac{\partial u}{\partial \ell} = \lim\limits_{|\overline{MM_1}| \to 0} \dfrac{f(M_1) - f(M)}{|\overline{MM_1}|}$ - производная функции u в направлении $\bar{\ell}$ характеризует скорость изменеия функции в этом направлении.

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

α, β, γ - углы между направлением $\bar{\ell}$ и соответствующими осями координат.

Градиент

$\overrightarrow{grad u} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ - вектор.

Свойства

1. $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}$=Пр$_\ell \overrightarrow{grad u}$, т.е производная в данном направлении $\bar{\ell}$ равна проекции градиента на направление ℓ.

2. Градиент в каждой точке направлен по нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

3. Направление градиента в точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$ - дифференциальное уравнение 1-го порядка;

$y' = f(x, y)$ - разрешенное относительно производной;

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ - в дифференциалах;

$\left.\begin{aligned} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{aligned}\right\}$ задача Коши.

Общее решение - функция $y = \varphi(x, c)$ такая, что

1) удовлетворяет уравнению при любых допустимых значениях C;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, найдется такое значение $c = c_0$,

что решение $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет этому начальному условию.

$y = \varphi(x, c_0)$ – **частное решение.**

Метод решения зависит от типа уравнения. Тип уравнения определяет

правая часть $f(x, y)$.

Уравнение	Общий вид	Метод решения
С разделенными переменными	$M(x) + N(y)\,dy = 0$	Непосредственное интегрирование $\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = 0$
С разделяющими переменными	$y' = f(x)\ \ g(y)$ или $M_1(x) N_1(y) + M_2(x) n_2(y)\,dy = 0$	Разделить переменные $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ или $\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$
Однородное	$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ или $y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$	Заменить $y = ux$, $y' = u'x + u$, разделить переменные
Линейное	$y' + P(x)\,y = Q(x)$	Заменить $y = uv,\ y' = u'v + uv'$, $y' + py = u'v + u(v' + pv)$ $v' + pv = 0$
Бернулли	$y' + p(x)\,y = Q(x)\,y^n$	Найти $v\,(c = 0)$ подставить v в в уравнение, найти u

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общий вид уравнения	Метод решения
$y^{(n)} = f(x)$	n раз интегрируем $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx \ldots$ $y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\,dx + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$
$F(x, y', y'') = 0$ (не содержит y)	Замена $y' = z(x)$, $y'' = z'$
$F(x, y', y'') = 0$ (не содержит x)	Замена $y' = p(y)$, $y'' = p'p$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' = py' + qy = 0.$$

Характеристическое уравнение.

$$K^2 + pK + q = 0,\ K_1,\ K_2 \text{ - корни.}$$

1. $K_1 \neq K_2$ - действительные $(D > 0)$

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

2. $K_1 = K_2 \ (D = 0)$

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_2 x}.$$

3. $K_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексные $(D < 0)$

$$y = c_1 e^{ax} \sin \beta x + c_2 e^{ax} \cos \beta$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Со специальной правой частью

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Общее решение

$$y = y_0 + y_r,$$

y_0 - общее решение однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0,$$

y_r - частное решение неоднородного уравнения

$y'' + py' + qy = f(x)$, подбирается по виду правой части $f(x)$ методом неопределенных коэффициентов.

$$f(x) = P_m(x) e^{ax} \cos \beta x + Q(x) e^{ax} \sin \beta x,$$

$P_m(x), Q_\ell(x)$ - многочлены. Число $\alpha + \beta i$ сравнить с корнями характеристического

уравнения k_1, k_2:

не совпадает $\Rightarrow y_r = P_n(x) e^{ax} \cos \beta x + S_n(x) e^{ax} \sin \beta x$;

совпадает r - раз $\Rightarrow y_r = x^r (R_n(x) e^{ax} \cos \beta x + S_n(x) e^{ax} \sin \beta x)$.

$R_n(x), S_n(x)$ - многочлены степени $n = \max(m, l)$.

Ряды

Числовые ряды

Числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Числовой ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ - частичная сумма.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} = S \Rightarrow$ ряд сходящийся, S - сумма ряда, в противном случае ряд расходящийся.

Геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S n = \frac{a}{1-q} \quad \text{при } |q| < 1.$$

Необходимый признак сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$$\text{Если } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{ ряд расходится.}$$

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признак сходимости рядов с эквивалентными членами

$(A)\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, (B)\sum_{n=1}^{\infty} b_n, a_n \geq 0, b_n \geq 0.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = k\,(k \neq 0, k \neq \infty)$, то ряды (A) и (B) сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения

Если $a_n \leq b_n$ и $\begin{cases} (B)\ \text{сх.} \Rightarrow (A)\ \text{сх.} \\ (A)\,\text{расх.} \Rightarrow (B)\,\text{расх.} \end{cases}$

Интегральный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\,,\ \ a_n \geq 0$

Если несобственный интеграл

$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx \begin{cases} < \infty\text{сх.} \Rightarrow \text{ряд сх.} \\ = \infty\text{расх.} \Rightarrow \text{ряд расх.} \end{cases}$

Признак Даламбера

$a_n \geq 0,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \begin{cases} \ell < 1\text{ряд сх.} \\ \ell > 1\text{ряд расх.} \\ \ell = 1\text{продол. исслед.} \end{cases}$

Признак Коши

$$a_n \geq 0,\ \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \begin{cases} \ell < 1 \text{ряд сх.} \\ \ell > 1 \text{ряд расх.} \\ \ell = 1 \text{продол. исслед.} \end{cases}$$

Знакочередующиеся ряды

$(C)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{n+1} C_n + \ldots$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} C_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится, то ряд (C) сходится абсолютно.

Признак Лейбница

Если для ряда (C)

1. $C_1 \geq C_2 \geq C_3 \ldots \geq C_n \geq C_{n+1} \geq \ldots$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$,то ряд сходится.

Степенные ряды

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Сходится абсолютно в интервале $-R < x < R$,

R - радиус сходимости.

Применим к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ признаки сходимости знакоположительных рядов, найдём интервал сходимости $(-R, R)$. На концах проводим дополнительное исследование:

подставляем $\left.\begin{array}{r} x = R, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n \\ x = -R, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n R^n \end{array}\right\}$ исследуем числовые ряды.

Разложение функции в степенной ряд Тейлора

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

или

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение элементарных функций в степенные ряды

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + x^3 3! - \ldots + (-1)^{n-1} + \frac{x^n}{n} + \ldots\ (-1 < x \leq 1),$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots\ (-1 < x < 1),$$

$$(1 + x)^m = 1 + \tfrac{m}{1!}x + \tfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots\ (-1 < x < 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\ (-1 \leq x \leq 1).$$

Теория вероятностей

Основы комбинаторики

Выборки m элементов из n.

1. Выборка с повторениями. Количество различных выборок n^m.

2. Выборки без повторений.

Размещения: отличаются друг от друга составом или порядком элементов.
Количество
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановки: содержат одни элемнты, отличаются дру от друга их порядком.
Количество
$$P_n = A_n^m = n!$$

Сочетания: отличаются друг от друга составом элементов.
Количество
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Классическое определение вероятностей

A - случайное событие,
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m - число слечаев, благоприпятствующих появление события A, n - число всех возможных случаев.

Сложение вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Если A и B - несовместные, $P(AB) = 0$.

Умножение вероятностей

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A)$$

Если A и B - независимые, то $P(AB) = P(A)\,P(B)$

Формула полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\,P_{B_n}(A)\,.$$

Формула Бернулли (независимых испытаний)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Формула Пауссона(редких событий)

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}, \lambda = np$$

p - мало $(p < 0,1)$, n - велико.

Локальная теорема Муавра-Лапласа

$P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad n$ - велико, $0 < p < 1$,

$x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ - значения находится по таблице

$(\varphi(-x) = \varphi(x))\,.$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

n - велико, $0 < p < 1$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2}{\sqrt{npq}}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx - \text{ - функция Лапласа,}$$

значения находятся по таблице $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$.

Случайные величины

X - случайная величина (далее CB). Дискретная CB - множество значений конечно или счетно.

Непрерывная CB - всевозможные значения заполняют интервал.

Ряд распределения дискретной CB

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n
P	P_1	P_2	$\ldots$	P_n

$\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1.$

Функция распределения CB (интегральная):

$F(x) = P(X < x)$

Свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;

3. $F(x)$ - неубывающая функция;

4. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$;

5. Если (x) - непрерывная, $P(X = x) = 0$.

Функция плотности вероятности (дифференциальная):

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства:

1. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$;

2. $f(x) \geq 0$;

3. $P(a < x < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$;

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание

$M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\ P_i \qquad X$ - дискретная CB;

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad X$ - непрерывная CB.

Дисперсия

$D(X) = M(X - M(X))^2 = M\left(X^2\right) - M^2(X)$,

$M\left(X^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 P_i$ или $M\left(X^2\right) = \int\limits_{\infty}^{-\infty} x^2 f(x)\,dx$.

$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$ - среднее квадратическое отклонение.

Биномальное распределение

$$P(X=k)=C_n^k P^k q^{n-k}, \qquad k=0,1,\ldots,n,$$

$M(X)=np, D(X)=npq,$ n,p - параметры.

Распределение Пауссона

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-}\lambda, \qquad k=0,1,\ldots,n,$$

$M(X)=\lambda,$ $D(X)=\lambda,$ $\qquad \lambda$ - параметр,

Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a\le x\le b; \\ 1, \text{ если } x>b. \end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательное распределение

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0; \end{cases}$$

$M(X)=\dfrac{1}{\lambda},$ $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\qquad \lambda$ - параметр.

Нормальное распределение

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\partial^2}},$$

$M(x)=m,$ $D(X)=\delta^2,$ $\qquad m,\delta$ - параметры.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\delta}\right),$$

$\Phi(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа.

Элементы математической статистики

X - случайная величина; $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - совокупность значений X (выборка);

x_i - выборочные значения; n_i - число выборочных значений, равных x_i (частота).

Гистограмма - ступунчатая фигура, состоящая из прямоугольников с площадями,

равными частоте попадания выборочных значений в интервалы, лежащие в основании

прямоугольников.

Полигон - ломаная, отрезки которой соединяют точки.

$X = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{k} x_i n_i$ - **выборочное среднее** - оценка для $M(X)$.

$D = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (x_i - X)^2 \quad n_i = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_1^2 n_i - (X)^2$ - выборочная дисперсия - оценка для $D(X)$

$S^2 = \dfrac{n}{n-1} D = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (x_i - X)^2 n_i$ - исправленная выборочная дисперсия.