I. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

или

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (2)$$

Пример 1. $F(x) = x^5$ есть первообразная для $f(x) = 5x^4$, так как $\left(x^5\right)' = 5x^4$ или $5x^4dx$.

Пример 2. $F(x) = \sin 2x$ есть первообразная для $f(x) = 2\cos 2x$, так как $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ или $d(\sin 2x) = 2\cos 2x$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное первообразная, которое отличаются друг друга на постоянное число.

Так в 1-м примере для $f(x) = 5x^4$ первообразный будут, кроме $F_1(x) = x^5$, $F_2(x) = x^5 + 1$, $F_3(x) = x^5 - 3$, $F_4(x) = x^5 - \frac{1}{2}$, и другие. Все они удовлетворяют условию (1) и (2). Вообще в общем виде можно записать первообразную в виде $F(x) = x^5 + c$, где c – произвольная постоянная. Действительно,

$$F'(x) = \left(x^5 + c\right)' = 5x^4 = f(x)$$

или

$$dF(x) = F'(x)dx = 5x^4dx = f(x)dx.$$

Определение 2. Общее выражение $F(x) + c$ совокупности всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (3)$$

При этом $d[F(x) + c] = f(x)dx$, где
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,
$f(x)$ – подынтегральная функция.

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием.

Итак, интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования (1) соответствуют формула интегрирования (3).

Пример 3. $d\left(\frac{1}{2}\sin 2x + c\right) = \frac{1}{2}\cos 2x 2dx = \cos 2x dx$

$$\Leftrightarrow \quad \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c,$$

где c – const.

Ниже приведена таблица основных интегралов. Каждую формулу можно проверить дифференцированием.

Таблица основных интегралов

1. $\int a du = au + c$ $\qquad (a \in R,\ c\ -\text{const},\ u = u(x))$

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c$ $\qquad$ (для любого $m \neq -1$)

2.1. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$ $\qquad$ 2.2. $\int \dfrac{du}{u^2} + c$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$ $\qquad (a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1)$

5. $\int e^u du = e^u + c$

6. $\int \cos u du = \sin u + c$

7. $\int \sin u du = -\cos u + c$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{u}{a} + c \\ -\arccos\dfrac{u}{a} + c \end{cases}$ $\qquad (a \in R)$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{u}{a} + c \end{cases}$ $\qquad (a \in R)$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

При интегрировании используются свойства интегралов.

Свойства интегралов

1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + c$, в частности, $\int dx = x + c$

$\int d\sin x = \sin x + c$, $\qquad \int d\ln x = \ln x + c$

3) $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = \text{const}$

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблицу интегралов и свойства необходимо выучить наизусть.

II. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Существуют три способа интегрирования: непосредственное, заменой переменной и по частям.

2.1. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование состоит в том, что подынтегральную функцию путем тождественных преобразований с использованием формул алгебры и тригонометрии, а также используя свойства (3) и (4), сводят к табличным интегралам.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. $\int\left(3x^3+1\right)dx=3\int x^3dx+3\int dx=\frac{3x^{3+1}}{3+1}+x+c=\frac{3}{4}x^4+x+c$.

(использованы свойства 3, 4; табличный интеграл 2, $u=x$)
Правильность ответа проверяем дифференцированием:

$$d\left(\frac{3}{4}x^4+x+c\right)=d\left(\frac{3}{4}x^4\right)+dx+d(c)=\left(3x^3+1\right)dx.$$

Пример 5. $\int\frac{3+x}{x^2}dx=\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=3\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x}=3\int x^{-2}dx+\int\frac{dx}{x}=$

$=3\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\ln|x|+c=-\frac{3}{x}+\ln|x|+c$.

(свойства 3, 44 табличные интегралы 2.2 и 3).

Пример 6. $\int\cos^2\frac{t}{2}dt=\Big|$ используем формулу $\cos^2\frac{t}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos t)\Big|$

$=\int\frac{1}{2}(1+\cos t)dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos tdt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t+c$

(свойства 3,4; табличные интегралы 1 и 7).

2.2. Метод замены переменной (подстановки)

Для вычисления интеграла $\int f(x)dx$ сделаем замену $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ выбирается так, чтобы после преобразований данного интеграла и новой переменной t, получился интеграл, который берется непосредственно.

Предварительно находим $dx=\varphi'(t)dt$, тогда

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

После нахождения первообразной $F(t)$ необходимо вернуться к первоначальной переменной «x».

Пример 7. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}=\begin{vmatrix}x=t^2\\dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t+1}=2\int\frac{t^2dt}{t+1}=2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=$

$=2\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int tdt-2\int dt+2\int\frac{dt}{t+1}=2\frac{t^2}{2}-2t+2\ln|t+1|+c=$

$x-2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$.

Пример 8. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{10}}dx = \left| \begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+1)^2}{t^{10}}dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^{10}}dt =$

$$\int t^{-8}dt + 2\int t^{-9}dt + \int t^{-10}dt = \frac{t^{-7}}{-7} + \frac{2t^{-8}}{-8} + \frac{t^{-9}}{-9} + c = -\frac{1}{7t^7} - \frac{1}{4t^8} - \frac{1}{9t^9} + c =$$

$$= -\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + c.$$

Замечание. Следующие интегралы удобно решать указанной заменой

$$\int R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \qquad x = a\sin t; \qquad dx = a\cos t dt;$$

$$\int R\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \qquad x = a\operatorname{tg} t; \qquad dx = \frac{a}{\cos t}dt;$$

$$\int R\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \qquad x = \frac{a}{\sin t}; \qquad dx = \frac{-\cos t dta}{\sin^2 t}dt.$$

Пример 9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sin t \cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\sin t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin t dt =$

$= -\cos t + c = \left| t = \arcsin x \right| = -\cos(\arcsin x) + c = -\sqrt{1-x^2} + c,$

т. к. $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$.

Формулой (4) часто пользуются справа налево:

$$\int t[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \qquad \varphi(x) = t. \tag{5}$$

При этой замене надо помнить, что в составе подынтегрального выражения должен быть дифференциал функции $f(x)$.

Такой метод называется под знак дифференциала

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]. \tag{5'}$$

При использовании этого метода можно воспользоваться таблицей дифференциалов.

Таблица дифференциалов

1. $du = \frac{1}{a}d(au+c)$, $\quad c$ – const, $\quad u = u(x)$, $\quad a \in R$
2. $u^m = \frac{1}{m+1}d\left(u^{m+1}+c\right)$ $\quad m \neq 1$
3. $\frac{du}{u} = d(\ln u + c)$
4. $a^u du = \frac{d\left(a^u+c\right)}{\ln a}$, $\quad a > 0$, $\quad a \neq 1$, $\quad a \in R$
5. $e^u du = d\left(e^u + c\right)$
6. $\sin u du = -d(\cos u + c)$
7. $\cos u du = d(\sin u + c)$

8. $\dfrac{du}{\cos^2 u} = -d(\mathrm{tg}u + c)$

9. $\dfrac{du}{\sin^2 u} = -d(\mathrm{ctg}u + c)$

10. $\dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} d\left(\arcsin\dfrac{u}{a} + c\right) \\ d\left(-\arccos\dfrac{u}{a} + c\right) \end{cases}, \qquad a \in R$

11. $\dfrac{du}{a^2 + u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} d\left(\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + c\right) \\ -\dfrac{1}{a} d\left(\mathrm{arcctg}\dfrac{u}{a} + c\right) \end{cases}, \qquad a \in R$

<u>Пример 10.</u> $\int \sin 4x dx$

Согласно таблице дифференциалов, 1, с. 7 $dx = \dfrac{1}{a} d(ax + c)$, положим $a = 4$, $c = 0$, $u = x$, $dx = \dfrac{1}{4} d(4x)$.

$$\int \sin 4x dx = \int \sin 4x \frac{1}{4} d(4x) = \frac{1}{4} \int \sin 4x d(4x) = |4x = u| = \frac{1}{4} \int \sin u du =$$

$$-\frac{1}{4} \cos u + c = -\frac{1}{4} \cos 4x + c.$$

<u>Пример 11.</u> $\int \dfrac{dx}{5 - 6x}$

По таблице дифференциалов, 1, с. 7 $dx = \dfrac{1}{a} d(ax + c)$, положим $a = -6$, $c = 5$, $u = x$, $dx = -\dfrac{1}{6} d(-6x + 5)$.

$$\int \frac{dx}{5 - 6x} = -\frac{1}{6} \int \frac{d(5 - 6x)}{5 - 6x} = |u = 5 - 6x| = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \int -\frac{1}{6} \ln|u| + c = -\frac{1}{6} \ln|5 - 6x| + c.$$

<u>Пример 12.</u> $\int \dfrac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx$ – можно найти двумя способами:

1 способ. $\displaystyle\int \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx = \left| \begin{matrix} dx = d(x+1) \\ \dfrac{dx}{x+1} = \dfrac{d(x+1)}{x+1} = d(\ln|x+1|) \end{matrix} \right| = \int \ln^2(x+1) d(\ln|x+1|) =$

$$|\ln(x+1) = u| = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3} \ln^3(x+1) + c;$$

2 способ. $\displaystyle\int \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx = \left| \begin{matrix} \ln(x+1) = t \\ \dfrac{dx}{x+1} = dt \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3} \ln^3(x+1) + c.$

Пример 13. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+8}}{1+x^2}dx$

1 способ. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+8}}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x+8=u \\ \frac{dx}{1+x^2}=du \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{u}du = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+c=$

$\frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x+8)^{\frac{4}{8}}+c$;

2 способ. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+8}}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{dx}{1+x^2}=d(\operatorname{arctg} x+8) \\ (\text{табл.}\quad \text{диф - ов},\ 11) \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+8}\,d(\operatorname{arctg} x+8)=$

$\frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x+8)^{\frac{4}{3}}+c$.

Пример 14. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{c} \sin x dx = -d(\cos x) \\ (\text{ттабл}\quad \text{диф - ов},\quad 6) \end{array} \right| = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$

$-\ln|\cos x|+c$. (табл. интегр., 3, $u=\cos x$)

2.3. Метод интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (6)$$

Эта формула чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например, $\int x^2 e^x dx$ или $\int (x+1)\ln x dx$, $\int x \operatorname{arctg} x dx$ или $\int e^x \sin 2x dx$.

udv – это все подынтегральное выражение, часть которого мы обозначаем за u, а часть за dv. При этом:

1) за u принимается функция, которая дифференцированием упрощается.
2) за dv – та часть, интеграл от которой известен или легко может быть взят.
3) в состав dv обязательно входит dx.

В итоге верного выбора u и dv интеграл в (6) должен быть проще исходного.

Пример 15. $\int (2x+1)e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u=2x+1 & dv=e^x dx \\ du=2dx & v=e^x \end{array} \right| = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx =$

$(2x+1)e^x - 2e^x + c = (2x-1)e^x + c$.

Замечание 1. Метод интегрирования по частям может применяться в одном примере несколько раз.

Замечание 2. Иногда повторное интегрирование по частям приводит к уравнению искомого интеграла $\int f(x)dx = u\cdot v - k\int f(x)dx$, $\quad k \neq -1$, если $J=\int f(x)dx$, то получаем уравнение: $J = uv - kJ$, откуда

$J+kJ=uv \quad \Rightarrow \quad (1+k)J=uv \quad \Rightarrow \quad J=\frac{1}{k+1}u\cdot v$ или $\int f(x)dx = \frac{u\cdot v}{k+1}+c$.

Пример 16. $\int e^x \cos x dx$ – решить методом по частям, используя примечание. При верном решении должен получиться ответ:

$$J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c.$$

Только по частям берутся интегралы:

а) $\int P_m(x)\cos\alpha\, xdx$, $\quad u = P_m(x) = a_0 x^m + \ldots + a_m$ многочлен m-ой степени,

$\int P_m(x)\sin\alpha\, xdx$, $\quad$ в частности одночлен

$\int P_m(x) e^{\alpha x} dx$, $\quad dv = \begin{cases} \cos\alpha\, xdx \\ \sin\alpha\, xdx, \\ e^{\alpha x} dx \end{cases}$

б) $\int P_m(x)\arcsin x dx$, $\quad u = \begin{cases} \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \\ \ln^n x \end{cases}$

$\int P_m(x)\operatorname{arctg} x dx$,

$\int P_m(x)\ln^n xdx$, $\quad dv = P_m(x)dx$,

в) $\int e^{\alpha x}\sin\beta\, xdx$, $\quad u = e^{\alpha x}$ $\quad u = \begin{cases} \sin\beta\, x \\ \cos\beta\, x \end{cases}$

$\int e^{\alpha x}\cos\beta\, xdx$, $\quad dv = \begin{cases} \sin\beta\, xdx \\ \cos\beta\, xdx \end{cases}$ или $\quad dv = e^{\alpha x} dx$.

Интегралы типа (в) интегрируются дважды по частям.

Пример 16. $\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\ln 3x dx = \begin{vmatrix} u = \ln 3x & dv = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x\sqrt{x}\right)\ln 3x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 + 2x\sqrt{x}}{x} dx = \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x\sqrt{x}\right)\ln 3x - \frac{1}{3}\int x^2 dx - \frac{2}{3}\int \sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x\sqrt{x}\right)\ln 3x - \frac{x^3}{9} - \frac{4x\sqrt{x}}{9} + c.$$

Рассмотрим отдельные классы функций и способы их интегрирования.

III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

3.1. Простейшие дроби, их интегрирование

К простейшим дробям относятся дроби вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$, $\quad$ 2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\quad$ 3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\quad$ при $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$,

4. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, при $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$ $\quad$ ($A,\ B,\ a,\ p,\ q \in R,\ k \le N$).

При интегрировании дробей типа 1 – 2 достаточно ввести подстановку $x-a=u$, $dx=du$ (или $dx=d(x-a)$), тогда

1. $\int \frac{Adx}{x-a}=A\int \frac{dx}{x-a}=A\int \frac{du}{u}=A\ln|u|+c=A\ln|x-a|+c$;

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int u^{-k}du=A\frac{u^{-k+1}}{1-k}+c=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c$, ($k\neq -1$).

Чтобы проинтегрировать дроби типа 3 – 4, необходимо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, затем свести интеграл к табличному.

Пример 17. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+3}$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена

$$2x^2+4x+3=2\left(x^2+2x\right)+3=2\left(x^2+2x+1-1\right)+3=2(x+1)^2-2+3=2\left(x+1^2\right)+1$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{2(x+1)^2+1}=\left|\begin{array}{c} dx=d(x+1) \\ \text{(ттбл диф - ов, 1)} \end{array}\right|=$$

$$\int \frac{d(x+1)}{2\left((x+1)^2+0{,}5\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+0{,}5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0{,}5}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{0{,}5}}=\frac{1}{2\sqrt{0{,}5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{0{,}5}}+c.$$

(табл. интегр., 11)

Замечание. При интегрировании дробей типа 3 – 4 можно воспользоваться справочником.

3.2. Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение: Дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется рациональной, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены m-ой и n-ой степеней.

Если $m\geq n$, дробь неправильная.

Если $m<n$, дробь правильная.

Неправильную дробь представляют в виде суммы целой части и правильной дроби. Операция выделения целой части может быть выполнена делением числителя на знаменатель.

Пример 18. Дробь $\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$ неправильная ($m=3$, $n=2$, $m>n$). Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^2+x & x+2 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2-x+1 & \\ \quad 2x^2\quad\;\; +2 & \\ \cline{1-1} \qquad\; -x-1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}=x+2-\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Пример 19. Дробь $\frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+3)(x+6)}$ правильная, т. к. $m=3$, $n=4$, $m<n$.

Пример 20. Дробь $\frac{2x-4}{3x+6}$ неправильная ($m=1,\ n=1,\ m=n$).

$$\begin{array}{r|l} 2x-4 & 3x+6 \\ \cline{2-2} \underline{2x+4} & 2/3 \\ -8 & \end{array}$$

$$\frac{2x-4}{3x+6}=\frac{2}{3}-\frac{8}{3x+6}.$$

3.3. Разложение правильной дроби

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей вида 1 – 4.

Пусть дробь $\frac{B_m(x)}{Q_n(x)}$ правильная. Разложим знаменатель дроби $Q_n(x)$ на множители. Найдем его корни, т. е. значения x, при которых знаменатель обращается в нуль. Тогда многочлен $Q_n(x)$ разложится на множители:

$Q_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=A_0(x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q)$, где

a,b – действительные корни многочлена. Множитель x^2+px+q не разложим на линейные множители, т. к. $D=\frac{p^2}{4}-q<0$.

Вид элементарной дроби и число их в разложении определяется корнями знаменателя данной дроби. Каждому множителю знаменателя соответствует определенного вида дробь. Укажем, какому множителю какая дробь соответствует:

$$(x-a)\ \to\ \frac{A}{x-a}$$

$$(x-a)^k\ \to\ \frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$(x^2+px+q)\to\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \text{если}\quad D=\frac{p^2}{4}-q<0.$$

$$(x^2+px+q)^k\ \to\ \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k},$$

если $D=\frac{p^2}{4}-q<0$.

$A_1, A_2, A_{k\ldots}, B_{1,\ldots}$ – пока неизвестные коэффициенты.

Разложить на простейшие дроби.

Пример 21. $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)x}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x}$.

Пример 22. $\frac{2-3x}{(x-1)^3x^2(x^2+x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+$

$$+\frac{C_1x+C_2}{x^2+x+2}$$

$x^2+x+2=0$ – не имеет действительных корней, т. к. $D<0$.

Пример 23. $\dfrac{1}{(x^2+4)^2(x^2-3x)x^3}=\dfrac{1}{(x^2+4)^2x^4(x-3)}=$

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{B}{x-3}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+4}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+4}.$$

Пример 24. $\dfrac{x^2+3}{(x^2-2x+1)(x^2+3x+10)}=\dfrac{x^2+3}{(x-1)^2(x^2+3x+10)}=$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+3x+10},$$

$x^2+3x+10=0$ – не имеет действительных корней, т. к. $D<0$.

3.4. Нахождение коэффициентов

I способ.

Пусть $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x+b}+\ldots+\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$, $\quad m<n$, $D<0$.

Написанное равенство есть тождество, а поэтому:

а) приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева;

б) приравняем числители;

в) а затем их коэффициенты при одинаковых степенях;

г) получим систему уравнений для определения коэффициентов.

Пример 25. Рассмотрим пример 21.

а) Приведем дробь к общему знаменателю:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{x^2(A+B+C)+x(3A-2B+C)-6C}{x(x-2)(x+3)}.$$

б) Приравняем числители:

$$x^2(A+B+C)+x(3A+2B+C)-6C=x+1.$$

в) Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{r|ll} x^2 & A+B+C=0 & \text{(нет коэффициента при } x^2\text{)} \\ x & 3A-2B+C=1 & \text{(коэффициент при } x\text{)} \\ x^0 & -6C=1 & \text{(свободный член).} \end{array}$$

г) Решив систему, получим:

$$A=0{,}3; \qquad B=-\frac{2}{15}; \qquad C=-\frac{1}{6}.$$

Получили разложение

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{3}{10(x-2)}-\frac{2}{15(x+3)}-\frac{1}{6x}.$$

II способ.

Приравняем многочлены в числителях слева и справа, как в I способе:

д) Придадим x частные значения, вычислим значения многочленов. Получим также систему с неизвестными коэффициентами.

В качестве значений x удобно брать значения действительных корней знаменателя, лучше применять в случае, когда знаменатель имеет равные действительные корни.

Пример 26. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$,

а) $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

б) $2x+1=A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)$

д) $x=1 \qquad 3=A\cdot 3\cdot 4+0 \quad \Rightarrow \quad A=\dfrac{1}{4}$

$x=-2 \qquad -3=A\cdot 0+B(-3) \quad \Rightarrow \quad B=1$

$x=-3 \qquad -5=0+C\cdot(-4)\cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad C=-\dfrac{5}{4}$

В итоге $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{4(x+3)}$.

III способ.

Комбинируют I и II способы.

3.5. Правило интегрирования рациональных дробей

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо:

1) Проверить, является ли эта дробь правильной. Если дробь неправильная, выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель.
2) Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей.
3) Найти неизвестные коэффициенты.
4) Проинтегрировать простейшие дроби.

Пример 27. $\int \dfrac{x^3-1}{x^3+1}dx=J$

Дробь $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ неправильная, $\quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x^3+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+1} & 1 \\ -2 & \end{array}$$

$$\frac{x^3-1}{x^3+1}=1-\frac{2}{x^3+1}$$

Дробь $-\dfrac{2}{x^3+1}$ – правильная, разложим знаменатель дроби на множители:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1), \qquad D=1-4=-3<0$

$$\frac{-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=-\frac{2}{x+1}+\frac{2x-4}{3(x^2-x+1)}$$

$$-2=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(C-A+B)x+A+c$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0 \\ x & -A+C+B=0 \\ x^0 & A+C=-2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} B=-A; \quad C=-2-A \\ -A-2-A-A=0 \quad -3A=2 \qquad \Rightarrow A=-\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{2}{3}; \quad C=-\dfrac{4}{3} \end{array}$$

$$J=\int\left(1-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{2x-4}{3(x^2-x+1)}\right)dx=x-\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x^2-x+1|+c.$$

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Основным методом решения интегралов от иррациональных выражений является метод замены переменной.

Цель замены – преобразовать данное иррациональное выражение к рациональной дроби.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к $\begin{cases} \dfrac{dt}{\sqrt{t^2\pm d^2}} & \text{при} \quad a>0 \\ \dfrac{dt}{\sqrt{d^2-t^2}} & \text{при} \quad a<0 \end{cases}$,

предварительно необходимо выделить полный квадрат под знаком корня, сделать замену и проинтегрировать по таблице интегралов, 10 и 12.

Пример 28.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-3x)-2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-3x+\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\right)-2}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}-2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{0{,}25-(x-1{,}5)^2}}=\left|\begin{array}{c} x-1{,}5=t \\ dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{0{,}25-t^2}}=\arcsin\frac{t}{0{,}5}+c=\arcsin 2(x-1{,}5)+c.$$

2. $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

1) Сделать в числителе производную подкоренного выражения.
2) Разбить на два интеграла, один из которых степенной, а другой вида (1).

Пример 29.

$$=\left|\left(x^2+2x+2\right)'=2x+2\right|=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}-\frac{1}{2}\cdot 2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+2x+2\right)-\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2+2x+2\right)^{\frac{1}{2}}-\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+c=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+c.$$

3. $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}\right]$ подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$

s – наименьший общий знаменатель дробей α и β.

Пример 30. $J=\int\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx=\int\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}dx$

Здесь роль $\frac{ax+b}{cx+d}$ играет $(1+x)$, $\alpha=\frac{1}{2}$; $\beta=\frac{1}{3}$; $\gamma=\frac{1}{4}$, наименьший общий знаменатель этих дробей 12, следовательно, подстановка $(1+x)=t^{12}$, вычислим $dx=12t^{11}dt$

$$J=\int\frac{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{4}}}12t^{11}dt=12\int\frac{\left(t^6-t^4\right)t^{11}}{t^3}dt=12\int\left(t^{14}-t^{12}\right)dt=12\left(\frac{t^{15}}{15}-\frac{t^{13}}{13}\right)+c=$$

$$=12\left(\frac{1}{15}\sqrt[12]{(1+x)^{15}}-\frac{1}{13}\sqrt[12]{(1+x)^{13}}\right)+c.$$

4. $\int R\left[x,\sqrt{a^2+x^2}\right]dx$, $\quad x=a\,\mathrm{tg}\,t$;

$\int R\left[x,\sqrt{a^2-x^2}\right]dx$, $\quad x=a\sin t$;

$\int R\left[x,\sqrt{x^2-a^2}\right]dx$, $\quad x=\frac{a}{\sin t}$.

5. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ – дифференциальный бином интегрируется в трех случаях:

1) p – целое, $p>0$ – интегрируется непосредственно,

$p<0$ – подстановка $x=t^{\mu}$, где μ – общий знаменатель дробей m и n;

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое (>0, <0, $=0$) подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{2}{s}$;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое (≥ 0, <0,) подстановка $a+bx^n=t^s x^n$.

Пример 31. $\int x^7\sqrt{1+x^4}\,dx=\int x^7\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{c} m=7;\ n=4;\ p=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{7+1}{4}=2\text{ - целое}\end{array}\right|$

$$\left|\begin{array}{c}1+x^4=t^2\\ 4x^3dx=2tdt\\ x^4=t^2-1\\ t=\sqrt{1+x^4}\end{array}\right|=\int x^3\cdot x^4\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int t\cdot\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)tdt=\int\frac{1}{2}\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}}{5}-\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}{3}\right)+c.$$

V. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ решается универсальной подстановкой $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

$$\Rightarrow\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 32. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left[3\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right]}=\int\frac{2dt}{t^2+6t-1}=$

$$=2\int\frac{dt}{(t+3)^2-10}=\frac{2}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t+3-\sqrt{10}}{t+3+\sqrt{10}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3+\sqrt{10}}\right|+c.$$

В некоторых случаях полезнее использовать подстановки, которые дают лучший результат, чем при использовании универсальной подстановки.

2. Если в подынтегральном выражении при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$ и $\cos x$ на $(-\cos x)$ функция не меняет своего знака, т. е. если

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(-\sin x,-\cos x)dx,$$

то применяют подстановку $\operatorname{tg}x=t$.

Пример 33. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x-2\sin x\cos x+1}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\quad x=\operatorname{arctg}t\quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2-2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}+1\right)}=\int\frac{dt}{2t^2-2t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}(2t-1)+c=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x-1)+c.$$

3. Если $\int R(\sin x,\cos x)dx=-\int R(-\sin x,\cos x)dx$, т. е. при замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак, то подстановка $\cos x=t$.

Пример 34. $\int\frac{\sin^3 xdx}{1+\cos x}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{1+\cos x}=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin^2 x=1-t^2\end{array}\right|=\int\frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{1+t}=$

$$=\int\frac{t^2-1}{t+1}dt=\int(t-1)dt=\frac{t^2}{2}-t+c=\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x+c.$$

4. Если $\int R(\sin x,\cos x)dx=-\int R(\sin x,-\cos x)dx$, т. е. при замене $\cos x$ на $-\cos x$ подынтегральная функция меняет знак, то подстановка $\sin x=t$.

Пример 35. $\int\frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t+c=\operatorname{arctg}\sin x+c.$

5. $\int\cos^n xdx$; при n – четном, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\int\sin^n xdx$; при n – нечетном по правилу 3 или 4.

Пример 36. $\int\cos^4 xdx=\int(\cos^2 x)^2 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right)+c.$$

Пример 37. $\int\sin^2 3xdx=\int\frac{1-\cos 6x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 6xdx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 6x}{12}+c.$

Пример 38. $\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 x\cdot\cos xdx=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=|\sin x=t|=$

$$=\int(1-t^2)dt=t-\frac{t^3}{3}+c=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c.$$

6. $\int\sin ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\int[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x]dx,$

$\int\sin ax\sin bxdx=\frac{1}{2}\int[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]dx,$

$\int\cos ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\int[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]dx.$

Пример 39. $\int\sin 3x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x+\cos x\right)+c.$

VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Если 1) a и b конечны;
2) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет первообразную $F(x)$, то определенный интеграл выражается конечным числом и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (7)$$

<u>Пример 40.</u> $\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 5x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} - \left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}.$

Интегралы а) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; б) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

относятся к несобственным интегралам I-го рода, т. к. для них не выполнено условие (1), а именно: один из пределов интегрирования (случая а) и б)) или оба (случай в)) не являются конечными, а условие (2) выполнено. Вычисление таких интегралов можно проводить по формуле (7), при этом $F(\infty)$ считается как предельное значение, которое может быть конечным, бесконечным или не иметь смысла.

<u>Пример 41.</u> $\int_4^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\Big|_4^{\infty} = F(\infty) - F(4) = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_4^{b} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{4} = \infty.$

<u>Пример 42.</u> $\int_{-\infty}^{1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = -\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^{-2}\Bigg|_{-\infty}^{1} =$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}\Bigg|_a^1\right) = -\frac{1}{2\cdot 4} - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4\left(a^2+1\right)^2} = -\frac{1}{8} - 0 = -\frac{1}{8}.$$

<u>Пример 43.</u> $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Если в результате вычислений получили конечное число, то несобственный интеграл называется сходящимся (примеры 42, 43), в противном случае интеграл расходится (пример 41).

Те интегралы $\int_a^b f(x)dx$, для которых не выполняется условие (2), а условие (1) выполнено, относятся к несобственным интегралам II-го рода. $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в одной или нескольких точках.

Вычисление несобственных интегралов II-го рода и определение их сходимости или расходимости можно проводить по формуле Ньютона-Лейбница, определив точки бесконечного разрыва.

Пример 44. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; эта функция имеет бесконечный разрыв на $[0,1]$ в точке $x=0$, т. к. $f(0)=\infty$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2-0=2$$, интеграл сходится.

Пример 45. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$; $f(x)=\operatorname{tg} x$ имеет бесконечный разрыв на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ в точке $x=\frac{\pi}{2}$, т. к. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/2} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{2}\right| + \ln|\cos 0| = -\ln 0 + \ln 1 =$$

$=-(\infty)+0=\infty$, интеграл расходится.

Пример 46. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$, которая принадлежит $[-1;8]$. В этом случае данный интеграл разбиваем на два интеграла точкой разрыва:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^0 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^0 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{0} - \sqrt[3]{(-1)^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{0}\right) =$$

$\frac{-3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{9}{2}$, интеграл сходится.

Геометрические приложения определенного интеграла				
Система координат	**Вид уравнения кривой**	**Площадь плоской фигуры**	**Длина дуги**	**Объем тела вращения**
Декартовы координаты	а) $y = f(x)$ $a \le x \le b$	1а) $S = \int_a^b f(x)dx$	2а) $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$	3а) $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$
	б) $x = \varphi(y)$ $c \le y \le d$	1б) $S = \int_c^d \varphi(y)dy$	2б) $L = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}dy$	3б) $V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$
	в) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$	1в) $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$	2в) $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt$	3в) $V_x = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$ $V_y = \pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)y'(t)dt$
	г) $y_1 = f_1(x)$ $y_2 = f_2(x)$	1г) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$	2г) $L =$	3г)
Полярные координаты	д) $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$	1д) $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$	2д) $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi$	3д) $V_p = \frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi d\varphi$

VII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

При помощи определенного интеграла можно вычислить площади плоских фигур, длины дуг, объемы тел вращения, а также решать другие задачи.

В зависимости от того, в какой системе координат решается задача и в каком виде задано уравнение кривой, выбирается нужная формула по таблице.

Для определения пределов интегрирования необходимо сделать чертеж. Затем подставить в формулу конкретные данные своей задачи и провести вычисления.

<u>Пример 47.</u> Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2 - x^2$ и прямыми $y = x$ и $y = -x$.

Решение: Выполним чертеж. Графиком $y=2-x^2$ является парабола,

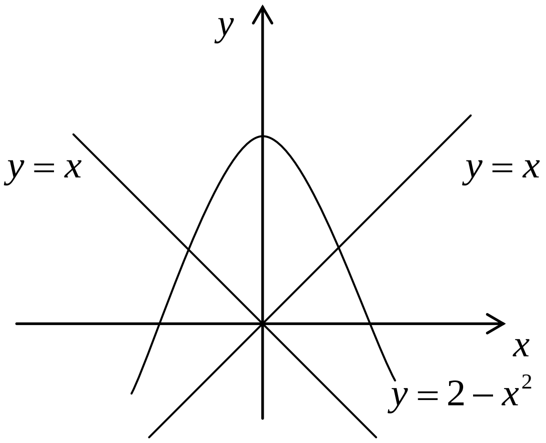

Рис. 1

ветви которой направлены вниз (знак " - " перед x^2) и приподняты на 2 единицы (рис. 1).

Искомая площадь симметрична относительно оси OY, следовательно, можно вычислить половину площади и удвоить результат.

$S=2S_1$.

Для вычисления пределов интегрирования решим совместное уравнение параболы и прямой $y=x$:

$$\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=x \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2\text{-}x^2=x \\ x^2-x-2=0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D=9 \\ x_1=-2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}, \\ x_2=1 \end{matrix}$$

согласно формуле (1г), табл. получим

$$S_1=\int_0^1\left(\left(2-x^2\right)-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{6}; \qquad S=\frac{7}{3}\ (\text{кв. ед.})$$

<u>Пример 48.</u> Вычислить площадь, ограниченную линией

$$\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 2t \end{cases}, \qquad 0\le t\le \pi/4.$$

Решение: В данной задаче чертеж выполнять необязательно, т. к. задано изменение параметра t. Уравнение линии рассматривается в декартовых координатах, но имеет параметрический вид (в). Воспользуемся формулой (1в) табл.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt=\int_0^{\pi/4}\cos 2t(\sin 2t)'\,dt=\int_0^{\pi/4}\cos 2t(2\cos 2t)dt=2\int_0^{\pi/4}\cos^2 2t dt=$$

$$=2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(1+\cos 4t)dt=\left(t+\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

<u>Пример 49.</u> Вычислить площадь, ограниченную линией $\rho=3\cos^2 2\varphi$.

Решение: Так как уравнение линии, ограничивающей искомую площадь, задано в полярных координатах, то необходимо воспользоваться формулой (1д), табл.

Пределы интегрирования не заданы, поэтому необходимо сделать чертеж (рис. 2). Линию $\rho=3\cos^2 2\varphi$ построим по точкам, давая φ значения через равный промежуток, например,

$\frac{\pi}{12}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

Вычислим $1\!/_8$ искомой площади.

Рис. 2

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 9\cos^4 2\varphi d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/4} \cos^4 2\varphi d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\cos 4\varphi)^2}{4} d\varphi =$$

$$= \frac{9}{8}\left(1 + 2\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi\right) d\varphi = \frac{9}{8}\left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sin 4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 8\varphi}{2} d\varphi \right) =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin \pi + \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{16}\sin 8\varphi \right) \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\sin 2\pi \right) =$$

$$= \frac{9}{8} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{27\pi}{64}$$

$S = 8 \cdot S_1 = \frac{27\pi}{8}$ (кв. ед.).

<u>Пример 50.</u> Найти длину дуги $y^2 = x^3$, отсеченную прямой $x = 4$.

Решение: Уравнение линий заданы в декартовых координатах.

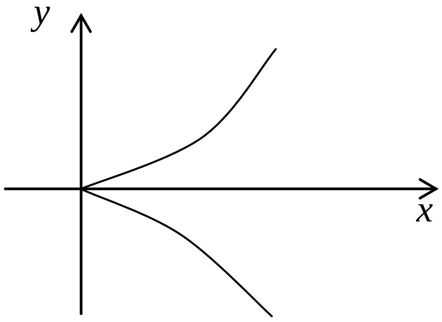

Рис. 3

Воспользуемся формулой (2а), табл. $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$.

Из чертежа видно, что пределы интегрирования будут $x = 0$ и $x = 4$

$L = 2L_{\overset{\smile}{OA}}$ (рис. 3).

$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$L_{\overset{\smile}{OA}} = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \Bigg|_0^4 =$$

$$\frac{8}{27}\left((1+9)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right) \approx 7{,}7$$

$L_{\overset{\smile}{OA}} = L_{\overset{\smile}{OA}} \approx 15{,}4$ (кв. ед.).

<u>Пример 51.</u> вычислить длину одной арки циклоиды $x = R(t - \sin t)$ $y = R(1 - \cos t)$ (рис. 4).

Решение: Из соотношения $x = R(t - \sin t)$ видно, что значение $x_0 = 0$ соответствует $t_1 = 0$,

$x_A = 2\pi R$ соответствует $t_2 = 2\pi$,

$t_1 < t_2$. Так как уравнение линии задано в декартовых координатах (вид в), то используем формулу (2в), табл.: $x'_t = R(1-\cos t)$, $y'_t R\sin t$.

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt =$$

Рис. 4

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1-\cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}\, dt = R\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = R\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\cdot \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = R\cdot 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2R\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\cdot 2\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4R(\cos\pi - \cos 0) = 8R.$$

<u>Пример 52.</u> Вычислить длину кардиоиды $\rho = 3(1+\cos\varphi)$, соответствующую $0 \le \varphi \le \pi$.

Решение: Уравнение кривой задано в полярных координатах, следовательно, при решении воспользуемся формулой (2д). Изменение φ задано, следовательно, выполнение чертежа необязательно.

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \int_0^{\pi} \sqrt{9(1+\cos\varphi)^2 + (-3\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 3\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 3\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$3\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 6\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 12\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 12\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 12 \text{ (ед. длины).}$$

<u>Пример 53.</u> Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ и осью OX (рис. 5).

Решение: Парабола $y = 1 - x^2$ расположена ветвями вниз, вершина находится в точке $(0;1)$, и ось OX пересекает в точках $x = \pm 1$. Для решения воспользуемся формулой (3а), табл.

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\, dx =$$

$$= 2\pi\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{16\pi}{15} \text{ (куб. ед.).}$$

Рис. 5

Пример 54. Вычислить объем тела, образованного вращением гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, отсеченной прямыми $y = \pm 1$, вокруг оси OY (рис. 6).

Решение: Для решения задачи воспользуемся формулой (3б), табл.

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy; \qquad x^2 = 9 + \frac{9}{4} y^2,$$

находим из уравнения параболы:

$$V_y = \pi \int_{-1}^{1} 9 \left(1 + \frac{y^2}{4} \right) dy =$$

$$= 2\pi \cdot 9 \int_0^1 \left(1 + \frac{y^2}{4} \right) dy = 18\pi \left(y + \frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= 18\pi \cdot \frac{13}{12} = \frac{39\pi}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

Рис. 6

Замечание: Иногда при решении задач полезно использовать рекуррентную формулу:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx =$$

$$\begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{при } n \text{ - четном} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{при } n \text{ - нечетном} \end{cases}$$

Знак $n!!$ (двойной факториал) означает произведение целых чисел, начиная с n, через одно с убыванием. Например, $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ (только нечетные множители).