Здесь представлены четыре лекции, целью которых является введение в тему «Элементы интегрального исчисления»

Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$$\boxed{\textbf{Alt}}\ \boxed{\rightarrow}$$

Бидерман В. И.
Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 1.

Любая изучаемая проблема предполагает в процессе исследования постановки и решения двух взаимно обратных задач: прямой и обратной.

Прямая задача предполагает при знании процесса изучение его характеристик.

Обратная задача, в свою очередь, предполагая известными характеристики процесса, ставит своей целью восстановление самого процесса.

Из замечания в восьмой лекции о том, что функция является математическим описанием процесса, вытекает, что мы также имеем дело с двумя задачами:

Прямая задача	**Обратная задача**
Дано: $y = f(x)$	**Дано:** $y' = f(x)$
Найти: y'	**Найти:** y

В двух предыдущих лекциях мы рассмотрели прямую задачу. Попробуем разобраться с обратной задачей.

Элементы интегрального исчисления функции одной переменной

§ 1.1. Первообра́зная функция. Неопределённый интеграл

Предположим, что функции $y = F(x)$ и $y = f(x)$ определены на некотором интервале $(a; b)$. Если функция $y = F(x)$ дифференцируема на этом интервале, то можно дать следующее

Определение 1.1. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной функцией для данной функции* $y = f(x)$ на интервале[1] $(a; b)$, если для всех точек этого интервала функция $y = f(x)$ является[2] производной для функции $y = F(x)$.

Так, например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функцией для функции $f(x) = \cos x$ потому, что $(\sin x)' = \cos x$. А функция $G(x) = e^x$ – первообразной для самой себя, так как $(e^x)' = e^x$.

[1]Заметим, что для определения этого свойства на отрезке нужно, чтобы функция $y = F(x)$ была бы непрерывна на отрезке и дифференцируема внутри его.

[2]Возможно и второе определение: функция $y = F(x)$ называется *первообразной функцией для данной функции* $y = f(x)$ *или для дифференциального выражения* $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для всех точек этого интервала $dF(X) = f(x)dx$.

Зная это определение, а также видя примеры, его потверждающие, можно было бы определить операцию нахождения первообразной функции операцией, обратной дифференцированию. Если бы не одно но: можно заметить, что $F(x) = \sin x$ не единственная первообразная для функции $f(x) = \cos x$. Функция $F_1(x) = \sin x + 2$, а также любая из функций вида $F_C(x) = \sin x + C$, где C – произвольная постоянная, является первообразной для функции $f(x) = \cos x$. Так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

Обнаруженная неоднозначность представления первообразных является их общим свойством.

Теорема 1.1. О представлении первообразных *Если на некотором интервале* $(a; b)$ *функция* $y = F(x)$ *является первообразной для функции* $y = f(x)$, *то для любой константы* C *функция* $G(x) = F(x) + C$ *также является её первообразной.*

Обратно, *любая первообразная для функции* $y = f(x)$ *может быть представлена в данной форме.*

Из определения (1.1) вытекает, что

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Поэтому $G(x) = F(x) + C$ действительно является первообразной для функции $y = f(x)$.

Предположим, что $y = G(x)$ – произвольная первообразная для $y = f(x)$. Тогда производная разности

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме о постоянстве функций

$$G(x) - F(x) = C = const.$$

А значит $G(x) = F(x) + C$.

С геометрической точки зрения это означает, что касательные к графикам первообразных паралельны между собой:

$$\operatorname{tg} \alpha = G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Поэтому и графики самих первообразных «параллельны» между собой.

Следствие 1.1. Если предположить, что функция $y = f(x)$ определена непрерывна на некотором интервале $(a; b)$, а функция $y = F(x)$ – одна из её первообразных, то функции вида

$$y = F(x) + C,$$

где $C \in (-\infty; \infty)$, определяют всё множество первообразных для функции $y = f(x)$. Это множество имеет своё собственное имя.

1.1.1. Понятие неопределённого интеграла

Определение 1.2. Множество всех первообразных функций для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке $(a; b)$ называется *неопределённым интегралом от функции $y = f(x)$ на этом интервале.*

Обозначение неопределённого интеграла. Обозначается неопределённый интеграл от функции $y = f(x)$ символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$ и в силу определения записывается так:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.1}$$

При этом знак $\displaystyle\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, dx – *дифференциалом аргумента*, x – *переменной интегрирования*, C – *константой или постоянной интегрирования.*

Замечание 1.1. Заметим, что имя переменной интегрирования роли не играет, поэтому независимо от имени переменной:

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Определение 1.3. Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции называется *интегрированием.*

1.1.2. Качественные свойства неопределённого интеграла

Под качественными свойствами понимаются свойства, вытекающие из определения.

Свойство 1.1. *Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции* или

$$\boldsymbol{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)}.$$

Это вытекает из равенства (1.1):

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Свойство 1.2. *Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.*

$$\boldsymbol{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}.$$

Из предшествующего свойства и формулы дифференциала функции следует, что

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Таким образом, знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если дифференциал стоит перед интегралом.

Свойство 1.3. *Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен самой функции с точностью до постоянной интегрирования.*

$$\int \boldsymbol{dF(x) = F(x) + C}.$$

Данное равенство определяется тем, что

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

В данном случае знаки интеграла и дифференциала также взаимно уничтожаются, но, так как интеграл это множество функций, то они уничтожаются с точностью до постоянной интегрирования[1].

Благодаря этому свойству, мы можем найти первый неопределённый интеграл:

$$\cancel{\int}\cancel{d}x = x + C.$$

Этот интеграл и будет первым нашим найденным неопределённым интегралом:

$$\int \boldsymbol{dx = x + C}. \tag{1.2}$$

1.1.3. Таблица основных неопределённых интегралов

Так как интегрирование – операция, обратная дифференцированию, поэтому формулы дифференциалов можно переписать, поменяв левую и правую части местами:

$$dF(x) = F'(x)dx \ \Rightarrow F'(x)dx = dF(x).$$

А так как $F'(x) = f(x)$, то, проинтегрировав равенство $f(x)dx = dF(x)$, получим

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Конечно, некоторые из формул дифференциалов из таблицы производных надо подкорректировать, перенеся коэффициенты в другую часть, а у дифференциала логарифма позаботиться об области определения.

[1]Которая и подтверждает, то, что это множество функций, пробегая интервал от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Таблица дифференциалов и интегралов некоторых основных элементарных функций

$\boldsymbol{0 \cdot dx = d\,C}$	$\boldsymbol{\int 0 \cdot dx = C}$
$\boldsymbol{x^n dx = \dfrac{d(x^{n+1})}{n+1}}$	$\boldsymbol{\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ (n \neq -1)}$
$\boldsymbol{x dx = \dfrac{d(x^2)}{2}}$	$\boldsymbol{\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C}$
$\boldsymbol{\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)}$	$\boldsymbol{\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C}$
$\boldsymbol{\dfrac{dx}{x^2} = -d\left(\dfrac{1}{x}\right)}$	$\boldsymbol{\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C}$
$\boldsymbol{e^x dx = d\left(e^x\right)}$	$\boldsymbol{\int e^x dx = e^x + C}$
$\boldsymbol{a^x dx = \dfrac{d(a^x)}{\ln a}}$	$\boldsymbol{\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C}$
$\boldsymbol{\dfrac{dx}{x} = d\left(\ln\lvert x\rvert\right)}$	$\boldsymbol{\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C}$
$\boldsymbol{\cos x dx = d(\sin x)}$	$\boldsymbol{\int \cos x dx = \sin x + C}$
$\boldsymbol{\sin x dx = -d(\cos x)}$	$\boldsymbol{\int \sin x dx = -\cos x + C}$

Замечание 1.2. Следует обратить внимание на дифференциал и интеграл, связанные с $\ln x$. При определении $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$ левая часть равенства определена при положительных значениях аргумента. При этих же значениях аргумента существует и правая часть равенства. Если же правую часть поменять с левой местами, как это сделано в представленной таблице, то область определения левой части совпадает со всей числовой прямой, за исключением $x = 0$. Правая же часть определена только при положительных значениях аргумента. Поэтому, если не взять аргумент по модулю, то равенство будет нарушено.

1.1.4. Свойства неопределённого интеграла, связанные с линейностью интеграла и аргумента функции

Свойство 1.4. Свойство аддитивности. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на некотором интервале первообразные, то функция $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ также имеет на этом интервале первообразную. При этом неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопреде-*

лённых интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Предположим, что функции $y = F(x)$ и $y = G(x)$ – первообразные для функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соответственно. Тогда $\Phi(x) = F(x) + G(x)$ является первообразной функцией для функции $\varphi(x)$, так как

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x).$$

Из определения интеграла (1.2) следует, что левая часть равенства (1.3) состоит из функций вида $\Phi(x)+C$, а правая часть из функций вида $F(x)+C_1 + G(x) + C_2 = \Phi(x) + C_1 + C_2$. Каждая из функций вида $\Phi(x) + C$ принадлежит множеству функций $\Phi(x) + C_1 + C_2$ и наоброт. То есть, по заданному числу C можно найти числа C_1 и C_2. А по заданным C_1 и C_2 можно найти $C = C_1 + C_2$.

Свойство 1.5. Свойство однородности. *Если функция $y = f(x)$ имеет на некотором интервале первообразную, то для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $p(x) = \alpha f(x)$ также имеет на этом интервале первообразную. При этом:*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Или, иными словами, *константу можно вынести из-под знака интеграла.*

Рассмотрим задачу, связанную с линейными свойствами (1.4)-(1.5) неопределённых интегралов при интегрировании степенного многочлена.

Точно также, как и при дифференцировании степеннного многочлена, при его интегрировании, кроме формул

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ и } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

нам понадобятся формулы степени с отрицательным и дробным показателями из элементарной математики.

Задача 1.1. Найти неопределённый интеграл от функции

$$P(x) = 8x^3 - \frac{6}{x^7} + 4\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{x} - 5.$$

Решение. Согласно свойствам (1.4)-(1.5) с помощью формул элементарной математики имеем:

$$\int \left(8x^3 - \frac{6}{x^7} + 4\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{x} - 5\right) dx =$$

$$= 8\int x^3\,dx - 6\int x^{-7}\,dx + 4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx - 3\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx + 2\int \frac{dx}{x} - 5\int dx \boxed{=}$$

Найдём поочерёдно каждый из интегралов:

1) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_1.$

2) $\displaystyle\int x^{-7}\,dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C_2 = \frac{x^{-6}}{-6} + C_2 = -\frac{1}{6x^6} + C_2.$

3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C_3 = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C_3 = \frac{3x\cdot x^{\frac{1}{3}}}{4} + C_3 = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C_3.$

4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C_4 = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C_4 = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + C_4.$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_5.$

6) $\displaystyle\int dx = x + C_6.$

Подставим найденные интегралы в прерванное равенство:

$$\boxed{=}\ 8\cdot\frac{x^4}{4} + 8C_1 - 6\cdot\left(-\frac{1}{6x^6}\right) - 6C_2 + 4\cdot\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + 4C_3 -$$

$$- 3\cdot\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 3C_4 + 2\ln|x| + 2C_5 - 5x + C_6.$$

Так как каждая из констант пробегает всю числовую прямую, то и линейная комбинация констант

$$C = 8C_1 - 6C_2 + 4C_3 - 3C_4 + 2C_5 + C_6$$

также принимает любое значение из множества действительных чисел. Поэтому, выполнив арифметические преобразования, получаем, что

$$\boxed{\int P(x)\,dx = 2x^4 + \frac{1}{x^6} + 3x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x^3} + 2\ln|x| - 5x + C}.$$

Следующее свойство связано не с линейными свойствами неопределённого интеграла, а с линейным видом аргумента подынтегральной функции.

Свойство 1.6. *Если* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$*, где* $F'(x) = f(x)$*, а* $a \neq 0$*, то*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Функция $y = \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ есть одна из первообразных функции $f(ax+b)$ потому, что

$$\frac{1}{a}\left(F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{\cancel{a}}f(ax+b)\cdot\cancel{a} = f(ax+b).$$

Рассмотрим серию задач, показывающих применение этого свойства на основе знания таблицы интегралов (1.3). Выберем последний из интегралов таблицы:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Задача 1.2. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \sin 2x dx$.

Решение. Здесь аргументом синуса является функция $2x = 2\cdot x + 0$. То есть, $a = 2$, $b = 0$. Поэтому

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Проверка. $-\dfrac{1}{2}(\cos 2x)' = -\dfrac{1}{\cancel{2}}(-\sin 2x)\cdot\cancel{2} = \sin 2x.$

Следовательно, $\boxed{\displaystyle\int \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C}$.

Задача 1.3. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}dx$.

Решение. Аргумент синуса – функция $\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot x + 0$. То есть, $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 0$. Поэтому

$$\int \sin\frac{x}{3}dx = -\frac{1}{\frac{1}{3}}\cos\frac{x}{3} + C = -3\cos\frac{x}{3}.$$

Проверка. $-3\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)' = -\cancel{3}\left(-\sin\dfrac{x}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{\cancel{3}} = \sin\dfrac{x}{3}.$

В итоге, $\boxed{\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\, dx = -3\cos\frac{x}{3} + C}$.

Для следующей серии задач возьмём из таблицы интеграл

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Задача 1.4. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{4x-3}$.

Решение. Здесь аргументом дроби служит функция $4x-3$, в которой $a=4$, $b=-3$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C.$$

Проверка. $\dfrac{1}{4}(\ln(4x+3))' = \dfrac{1}{\cancel{4}}\dfrac{1}{4x-3}\cdot\cancel{4} = \dfrac{1}{4x-3}$.

Таким образом[1] , $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{\ln|4x-3|}{4} + C}$.

Задача 1.5. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x}$.

Решение. Здесь аргументом дроби служит функция $1-x$. Поэтому $a=-1$, $b=1$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C.$$

Проверка. $-(\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{1-x}$.

Как результат имеем $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C}$.

Замечание 1.3. В этом случае можно было бы «обмануть» свойство (1.6), если заметить, что $\dfrac{1}{1-x} = -\dfrac{1}{x-1}$, и, применив свойство однородности (1.5), вынести минус за знак интеграла. В итоге мы получили бы[2], что

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x-1| + C.$$

Кроме этого, мы можем сформулировать следствие из свойства (1.6), связанное со случаем, когда $a=1$.

Следствие 1.2. Если $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то для любой константы b

$$\boldsymbol{\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C}.$$

Это равенство следует также и из того, что $d(x+b) = (x+b)'dx = 1\cdot dx = dx$. Следовательно,

$$\int f(x+b)\,dx = \int f(x+b)\,d(x+b) = |t = x+b| =$$

[1]Следует заметить, что, если быть педантичным, то при проверке нужно дифференцировать функцию $\ln|4x-3|$, но так как на каждом из интервалов области определения мы получим тот же результат, то модуль при дифференцировании можно не писать.

[2]Первообразные будут равны, так как $|1-x| = |x-1|$.

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(x+b) + C.$$

Конечно, это объяснение выглядит гораздо длиннее, и равенство проще объяснить с помощью свойства (1.6). Но здесь мы первый раз видим действие метода замены переменной, который нам понадобится в дальнейшем.

Далее, найдём еще два интеграла, связанные с темой логарифма и с преобразованиями из элементарной математики.

Задача 1.6. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x-1}\,dx$.

Решение. Прежде, чем проинтегрировать эту дробь, её надо преобразовать. Так как коэффициент из числителя перед x – число 3 не делится нацело на коэффициент перед x в знаменателе, то умножим и одновременно разделим данную дробь на 2:

$$\frac{3x+2}{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot(3x+2)}{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3x+4)}{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2x+4}{2x-1}\boxed{=}$$

В знаменателе присутствует свободный член -1, которого нет в числителя поэтому «создадим» его в числителе, вычитая и прибавляя -1, предварительно умножив его на 3 (ведь в знаменателе не было коэффициента 3):

$$\boxed{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2x-3\cdot 1+3\cdot 1+4}{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot(2x-1)+7}{2x-1}\boxed{=}$$

Теперь мы можем почленно разделить числитель на знаменатель и вынести числитель 7 как коэффициент перед дробью:

$$\boxed{=}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot(2x-1)}{2x-1}+\frac{7}{2x-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(3+7\cdot\frac{1}{2x-1}\right).$$

Преобразовав таким образом подынтегральную функцию, мы можем с помощью линейных свойств (1.4)-(1.5) неопределённого интеграла её проинтегрировать:

$$\int\frac{3x+2}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(3\int dx + 7\int\frac{dx}{2x-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(3\int x + 7\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right)+C.$$

Выполнив арифметические преобразования, имеем

$$\boxed{\int\frac{3x+2}{2x-1}\,dx = \frac{6x+7\ln|2x-1|}{4}+C}.$$

Задача 1.7. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{4x+5}{x^2-5x+6}\,dx$.

Решение. Для того, чтобы проинтегрировать эту дробь, нам придётся представить её в виде суммы более простых дробей. Сделать это можно с помощью *метода вычёркивания*, алгоритм которого мы продемонстрируем на примере этой дроби.

Предварительно мы разложим квадратный трёхчлен в знаменателе на линейные множители, решив квадратное уравнение:

$$x^2-5x+6=0, \ \Rightarrow x_1=2; \ x_2=3, \ \Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Далее, представим изменённую дробь в виде суммы правильных дробей с неопределёнными коэффициентами A и B в числителе:

$$\frac{4x+5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

Наша цель: найти неизвестные коэффициенты A и B.

Шаг 1. Найдём нуль первого знаменателя, решив уравнение $x-2=0$, $x=2$.

Шаг 2. Вычислим A, подставив найденный нуль $x=2$ в левую часть дроби вместо всех x, предварительно «вычеркнув» в знаменателе скобку $(x-2)$:

$$A=\frac{4\cdot 2+5}{2-3} \ \Rightarrow A=-13.$$

Шаг 3. Найдём нуль второго знаменателя, решив уравнение $x-3=0$, $x=3$.

Шаг 4. Вычислим B, подставив найденный нуль $x=3$ в левую часть дроби вместо всех x, предварительно «вычеркнув» в знаменателе скобку $(x-3)$:

$$A=\frac{4\cdot 3+5}{3-2} \ \Rightarrow A=17.$$

Шаг 5. Подставим найденные значения в правую часть разложения:

$$\frac{4x+5}{(x-2)(x-3)}=-\frac{13}{x-2}+\frac{17}{x-3}.$$

Вспомнив, зачем нужно это разложение, а вместе с ним линейные свойства (1.4)-(1.5) неопределённого интеграла, перепишем правую часть в виде:

$$\frac{4x+5}{(x-2)(x-3)}=17\cdot\frac{1}{x-3}-13\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Теперь процесс интегрирования не представляет проблем:

$$17\int \frac{dx}{x-3} - 13\int \frac{dx}{x-2} = 17\ln|x-3| - 13\ln|x-2| + C.$$

Следовательно,

$$\boxed{\int \frac{4x+5}{x^2-5x+6}\,dx = 17\ln|x-3| - 13\ln|x-2| + C}.$$

В заключение рассмотрим ещё две задачи на тему строки из таблицы, связанной с показательной функцией

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Задача 1.8. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx$.

Решение. Так как $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$, то, представляя $-x = -1\cdot x + 0$, имеем $a = -1$, $b = 0$. Поэтому,

$$\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \int 3^{-x}\,dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3}.$$

Проверка.

$$-\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{3^x}\right)' = -\frac{1}{\ln 3}\left(3^{-x}\right)' = -\frac{1}{\cancel{\ln 3}}3^{-x}\cdot(-1)\cdot\cancel{\ln 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

В итоге получаем $\boxed{\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = -\frac{1}{3^x\ln 3} + C}$.

Задача 1.9. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int 2^{3x-1}\,dx$.

Решение.

$$\int 2^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\ln 2}2^{3x-1} + C = \frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}.$$

Проверка.

$$\frac{1}{3\ln 2}\left(2^{3x-1}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}\cancel{\ln}\cancel{2}}\;3^{3x-1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{\ln 2} = 2^{3x-1}.$$

Следовательно[1], $\boxed{\displaystyle\int 2^{3x-1}\,dx = \frac{2^{3x-1}}{3\ln 2} + C}$.

[1] Конечно, этот результат с помощью элементарной математики можно было бы преобразовать к виду: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2^3)^x}{\ln 2^3} = \frac{(8)^x}{2\cdot\ln 8} = \frac{(8)^x}{\ln 8^2} = \frac{(8)^x}{\ln 64}$. Вопрос только в одном: зачем? Если мы не собираемся этот результат в дальнейших вычислениях.

ЛЕКЦИЯ 2.

Методы интегрирования в неопределённом интеграле

§ 2.1. Подведение под дифференциал

Теоретическая база данного метода опирается на свойство (1.3), замечание (1.1) и таблицу дифференциалов (1.3). Знание таблицы позволяет, не прибегая к более мощным методам, упростить процесс нахождения большого числа неопределённых интегралов. Алгоритм метода[1] выражает следующее

Правило 2.1. О подведении под знак дифференциала.

Если $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *, то*

$$\int f(g(x))g^{'}(x)\,dx = \int f(g(x))d(g(x)) = |t = g(x)| =$$

$$= \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Покажем, как применяется данный метод на практике.
Первая серия задач связана со знанием формулы $\boldsymbol{xdx = \frac{1}{2}d(x^2)}$.

Задача 2.1. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int \boldsymbol{x}e^{x^2}\,\boldsymbol{dx} = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = |t = x^2| = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Проверка. $\displaystyle\frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}e^{x^2}\cdot\cancel{2}x = xe^{x^2}$.

То есть, $\boxed{\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C}$.

Задача 2.2. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-4}$.

Решение.

$$\int \frac{\boldsymbol{xdx}}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2-4} \overset{\text{(Сл.1.2)}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} = |t = x^2-4| =$$

[1] Метод подведения под знак дифференциала является частным случаем ниже рассказываемого метода замены переменной (метода подстановки) и применим только при знании дифференциалов из таблицы (1.3).

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C.$$

Проверка. $\frac{1}{2}\big(\ln(x^2-4)\big)' = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{x^2-4}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{x^2-4}.$

Следовательно, $\boxed{\int \frac{xdx}{x^2-4} = \ln\sqrt{|x^2-4|} + C}$.

В следующей задаче показана комбинация метода подведения под дифференциал со свойством (1.6).

Задача 2.3. Найти неопределённый интеграл $\int (8x^2+5)^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int (8x^2+5)^3 \boldsymbol{x\,dx} = \frac{1}{2}\int (8x^2+5)^3 d(x^2) = |t = x^2| =$$

$$= \frac{1}{2}\int (8t+5)^3\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{(8t+5)^4}{4} + C = \frac{1}{64}\cdot(8x^2+5)^4 + C.$$

Проверка. $\frac{1}{64}\big((8x^2+5)^4\big)' = \frac{1}{\cancel{64}}\cdot\cancel{4}(8x^2+5)^3\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{2}x = (8x^2+5)^3x.$

В итоге, $\boxed{\int (8x^2+5)^3 x\,dx = \frac{(8x^2+5)^4}{64} + C}$.

Вторая серия задач связана с дифференциалом натурального логарифма:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{x} = d(\ln|x|)}.$$

Задача 2.4. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$.

Решение.

$$\int \frac{\cos(\ln x)\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}} = \int \cos(\ln x)d(\ln x) = |t = \ln x| =$$

$$= \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C.$$

Проверка. $(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$

Таким образом[1], $\boxed{\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x} = \sin(\ln x) + C}$.

[1] В данной задаче, несмотря на наличие $\frac{dx}{x}$, знак модуля под логарифмом отсутствует, так как логарифм есть в подынтегральной функции, следовательно его аргумент является положительным.

Задача 2.5. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x(3\ln x - 2)}$.

Решение.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}(3\ln x-2)} = \int \frac{d(\ln x)}{(3\ln x-2)} = |t=\ln x| =$$

$$= \int \frac{dt}{3t-2} = \frac{1}{3}\cdot \ln|3t-2| + C = \frac{1}{3}\cdot \ln|3\ln x - 2| + C.$$

Проверка. $\displaystyle \frac{1}{3}\cdot(\ln(3\ln x-2))' = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{3\ln x-2}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x(3\ln x-2)}$.

В результате, $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x(3\ln x-2)} = \ln\sqrt[3]{|3\ln x-2|}+C}$.

Завершая параграф, покажем задачи, связанные с формулой

$$\boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})}.$$

Задача 2.6. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}} = 2\int \sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = |t=\sqrt{x}| =$$

$$= 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x}+C.$$

Проверка. $\displaystyle -2\left(\cos\sqrt{x}\right)' = -\cancel{2}\cdot(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

То есть, $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}} = -2\cos\sqrt{x}+C}$.

Задача 2.7. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$.

Решение.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} = |t=\sqrt{x}| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t-2} = 2\ln|t-2| + C = 2\ln|\sqrt{x}-2|+C.$$

Проверка. $\displaystyle 2\left(\ln(\sqrt{x}-2)\right)' = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$.

Поэтому, $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = 2\ln|\sqrt{x}-2|+C}$.

§ 2.2. Замена переменной в неопределённом интеграле. Метод подстановки

Как уже говорилось в сноске на странице 14, подведение под знак дифференциала является частным случаем метода, который нам предстоит изучить.

Правило 2.2. Замена переменной в неопределённом интеграле *Пусть функция $y = g(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(a; b)$, а E_g – множество её значений на этом интервале. Если функция $z = F(y)$ является первообразной для функции $z = f(y)$ на E_g, то на интервале $(a; b)$ справедлива* **формула замены переменной***:*

$$\int f(g(x))g^{'}(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Эту формулу можно было бы записать точно также, как и в правиле о подведении под знак дифференциала (2.1), если бы не одно но: либо мы не можем выделить заранее дифференциал функции $y = g(x)$, либо мы его не знаем наизусть.

Покажем, как использовать этот метод на практике.

Задача 2.8. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-2)^4}$.

Решение. Как разделить $(x-2)^4$ на x в математике известно, а вот как это сделать наоборот, увы, нет. Поэтому надо «перебросить» разность из знаменателя в числитель. А для этого нужно сделать замену $t = x - 2$. Но так как в числителе есть свой x, его тоже нужно заменить через t: $x = t + 2$. Обязательно нужно заменить $dx = (t+2)^{'}dt = dt$. Без подробных комментариев всё это может выглядеть так:

$$\int \frac{xdx}{(x-2)^4} = \left| \begin{array}{l} t = x - 2 \\ x = t + 2 \\ dx = (t+2)^{'}dt = dt \end{array} \right| = \int \frac{(t+2)dt}{t^4} =$$

$$= \int \left(\frac{t}{t^4} + \frac{2}{t^4} \right) dt = \int t^{-3}dt + 2\int t^{-4}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + 2\frac{t^{-3}}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{2}{3(x-2)^3} + C.$$

В итоге, после алгебраических преобразований получаем

$$\boxed{\int \frac{xdx}{(x-2)^4} = \frac{2-3x}{6(x-2)^3} + C}.$$

Задача 2.9. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Проблема та же: «мешает» двучлен в знаменателе, который, к тому же ещё под корнем. Есть два варианта решения: первый из них связан с рассматриваемым методом замены переменной:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1},\ t > 0 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = 2\int \frac{(t^2-1)\cancel{t}dt}{\cancel{t}} = 2\int (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\int t^2 dt - \int t\,dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C.$$

Окончательно, после алгебраических преобразований, получаем

$$\boxed{\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}(x-2)}{3} + C}.$$

Второй вариант решения связан с «близнецом» метода замены, с которым его всё время путают, – *методом подстановки*. Суть этого метода заключается в следующем:

Предположим, что $x = g(t)$ – дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию $t = \varphi(x)$. Если в интеграл $\displaystyle\int f(x)dx$ вместо x подставить $g(t)$, то мы получим равенство $f(x)dx = f(g(t))g^{'}(t)dt$. Обозначим через $u(t) = f(g(t))g^{'}(t)$. Тогда

$$f(x)dx = u(t)dt.$$

Допустим, что $y = U(t)$ – первообразная для функции $y = u(t)$, тогда

$$\int u(t)dt = U(t) + C.$$

Следовательно, справедлива **формула интегрирования подстановкой.**

$$\int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + C = U(\varphi(x)) + C. \qquad (2.5)$$

Решим задачу (2.9) этим методом.

Задача 2.10. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Избавиться от корня можно, не только заменив его. Корень можно «взорвать» изнутри, применив противоположную операцию:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} x = t^2 - 1, \ t > 0 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = 2\int \frac{(t^2-1)\cancel{t}dt}{\cancel{t}} = 2\int (t^2-1)dt \boxed{=}$$

$$= 2\left(\int t^2 dt - \int dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \left|t = \sqrt{x+1}, \ t > 0\right| =$$

$$= 2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C.$$

Таким образом, имеем тот же результат $\boxed{\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}(x-2)}{3} + C}$.

В данном случае различие между методами выразилось в изменении порядка действии.

Рассмотрим ещё несколько задач.

Задача 2.11. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$.

Решение.

1. Воспользуемся методом замены переменной:

$$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} t = 3 + \sqrt{x}, \ t > 0 \\ dt = (3+\sqrt{x})' dx \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dt = \dfrac{dx}{2(t-3)} \\ dx = 2(t-3)dt \end{vmatrix} = 2\int \frac{(t-3)dt}{t} = 2\left(\int dt - 3\int \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= 2\left(t - 3\ln t\right) + C = 2\left(3 + \sqrt{x} - 3\ln(3+\sqrt{x})\right) + C.$$

Если раскрыть скобки, то число 6 можно сложить с C, оставив за константой «старое» имя C: $\boxed{\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x} - 3\ln(3+\sqrt{x})) + C}$.

2. Применим метод подстановки:

$$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2, \ t > 0 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = 2\int \frac{t}{t-3}\, dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\, dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{t-3}{t-3} + \frac{3}{t-3}\right) dt = 2\left(\int dt - 3\int \frac{dt}{t-3}\right) =$$

$$= 2\left(t - 3\ln t\right) + C = \left|t = \sqrt{x},\ t > 0\right| = 2\left(\sqrt{x} - 3\ln\sqrt{x}\right) + C.$$

Если сравнить эти варианты, то несмотря на громоздкость замены интегрирование в первом случае кажется более простым. Гораздо проще заниматься почленным делением числителя на знаменатель, чем додумываться до нового числителя.

Задача 2.12. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 2}$.

Решение.

1. Самый простой вариант заключается в том, чтобы сказать, что «не нравится знаменатель». В этом случае:

$$\int \frac{dx}{e^x + 2} = \left| \begin{gathered} t = e^x + 2,\ t > 2 \\ dt = e^x dx \\ dt = (t-2)dx \\ dx = \frac{dt}{t-2} \end{gathered} \right| = \int \frac{dt}{(t-2)t}$$

Далее нам придётся вспомнить о методе «вычёркивания» (см. задачу (1.7)) .

$$\frac{1}{(t-2)t} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t}.$$

$$A = ?\ t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2.\ A = \frac{1}{2};\ \ B = ?\ t = 0 \Rightarrow\ B = \frac{1}{0-2}\ \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(t-2)t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} \text{ или } \frac{1}{(t-2)t} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right).$$

Продолжая процесс интегрирования, имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t-2} - \int\frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(t-2) - \ln t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t-2}{t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{e^x + 2} + C.$$

В итоге получаем: $\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+2} = \ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+2}} + C}$.

2. «Не нравится» может также и одна экспонента. От неё можно избавится,

не только с помощью замены. Можно подставить вместо аргумента обратную функцию:

$$\int \frac{dx}{e^x+2} = \left| \begin{aligned} & x = -\ln t, \\ & dx = -\frac{dt}{t} \\ & e^x + 2 = e^{-\ln t} + 2 = \\ & = (e^{\ln t})^{-1} + 2 = t^{-1} + 2 = \\ & = \frac{1}{t} + 2 = \frac{1+2t}{t} \end{aligned} \right| = -\int \frac{dt}{\cancel{t}\,\dfrac{1+2t}{\cancel{t}}} = -\int \frac{dt}{1+2t} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+2t) + C = -\frac{1}{2}\ln(1+2e^{-x}) + C.$$

После преобразования под знаком логарифма мы получим тот же результат, что и при решении методом замены. Но следует всё-таки отметить, что в данном случае мы обошлись без разложения дробей[1].

Далее, рассмотрим интеграл, в котором метод подстановки является единственно возможным из рассмотренных методов.

Задача 2.13. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Наверно, очевидно, что в данном случае должны «не нравиться» корни. Но также должно быть понятно, что, если и существует вариант их одновременной или последовательной замены, то догадаться о том, как его воплотить в жизнь, сложно. В то же время, должно быть ясно, что «взорвать корни изнутри» можно с помощью подстановки с выбором степени с соответствующим показателем n, который бы одновременно «повлиял» на оба корня. Таким показателем является $n = 6$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{aligned} & x = t^6,\ t > 0 \\ & dx = 6t^5 dt \\ & \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3 \\ & \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2 \end{aligned} \right| = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{\cancel{t}^5 dt}{\cancel{t}^2(t+1)} =$$

$$= 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} \boxed{=}$$

Так как подынтегральная функция является неправильной дробью (то есть степень числителя больше степени знаменателя), то нужно выделить

[1]К разложению дробей мы могли бы прийти и с помощью школьной алгебры, если бы домножили числитель и знаменатель подынтегральной функции на e^x, а затем применили подведение под знак дифференциала: $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+2} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+2)} = \int \frac{d\,(e^x)}{e^x(e^x+2)} = |t = e^x| = \int \frac{dt}{t(t+2)}$. Далее аналогично сделанному в пункте 1.

из неё целую часть. Для этого школьная математика предлагает два варианта: применить *сумму кубов*[1], прибавив и отняв в числителе единицу, или применить *куб разности*[2], сделав замену знаменателя $z = t + 1$.

Выберем первый из них:

$$\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

Теперь мы можем вернуться к последнему интегралу, разложив его в виде алгебраической суммы четырёх интегралов:

$$\boxed{=}\, 6\left(\int t^2\,dt - \int t\,dt + \int dt - \int \frac{dt}{t+1}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right) + C = \left|t = \sqrt[6]{x}\right| =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x}+1)\right) + C.$$

Таким образом, $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x}+1)\right) + C}$.

В заключение параграфа рассмотрим интеграл, который позволит понять, что изученные раннее методы, увы, не всесильны.

Задача 2.14. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Решение. После всех задач, рассмотренных раньше, должно быть понятно, что явно «мешает» $\sqrt{x}$ в показателе. «Избавимся» от него с помощью подстановки

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} x = t^2,\ t > 0 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = 2\int te^t dt = ???$$

Из полученного интеграла видно, что, избавившись от корня, мы приобрели небольшой, но не очень приятный множитель t, который не даёт возможности воспользоваться таблицей интегралов. При этом никакая замена переменной или подстановка ничего не могут дать. Именно поэтому путь к «счастью» ведёт в следующий параграф. Там мы и получим полное решение этой задачи[3].

---

[1] $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

[2] $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

[3] В отдельных задачах проверка решения не проводилась не потому, что без неё можно обойтись, а ввиду нежелания увеличивать объём текста. Тем более, что читающий этот текст в состоянии провести проверку самостоятельно.

§ 2.3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Правило 2.3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле *Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ имеют непрерывные производные на интервале $(a; b)$, тогда имеет место равенство*

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{'}dx. \tag{2.6}$$

*Так как функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ имеют непрерывные производные на интервале $(a; b)$, то и функция $y = u(x)v(x)$ тоже имеет непрерывную производную на $(a; b)$. Согласно свойству (**??**) производной произведения двух функций справедливо равенство*

$$u(x)v^{'}(x) = (u(x)v(x))^{'} - v(x)u^{'}(x).$$

Домножив его на дифференциал аргумента dx

$$u(x)v^{'}(x)dx = (u(x)v(x))^{'}dx - v(x)u^{'}(x)dx,$$

проинтегрируем обе его части

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = \int (u(x)v(x))^{'}dx - \int v(x)u^{'}(x)dx.$$

Из свойства (1.1) о производной от неопределённого интеграла вытекает, что

$$\int (u(x)v(x))^{'}dx = u(x)v(x) + C.$$

Поэтому

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) + C - \int v(x)u^{'}(x)dx.$$

Константу можно добавить к интегралу $\displaystyle\int v(x)u^{'}(x)dx$, тогда равенство (2.7) окажется истинным. Если переписать $v^{'}(x)dx$ и $u^{'}(x)dx$ как dv и du, то мы получим формулу, известную под именем
формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле:

$$\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}. \tag{2.7}$$

Эта формула помогает найти интеграл $\displaystyle\int udv$ с помощью интеграла $\displaystyle\int vdu$, предполагая при этом знание таблицы дифференциалов (1.3).

Чтобы закончить решение задачи (2.14) нам надо решить следующую задачу.

Задача 2.15. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int te^t dt$.

Решение.

$$\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^t dt}_{dv} = \int \underbrace{t}_{u}\underbrace{d\left(e^t\right)}_{dv} = \underbrace{te^t}_{uv} - \int \underbrace{e^t}_{v}\underbrace{dt}_{du} = te^t - e^t + C.$$

Следовательно, вынося e^t как общий множитель за скобки,

получим, что $\boxed{\displaystyle\int te^t dt = e^t(t-1) + C}$.

Восстановим ход решения задачи (2.14):

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2, \ t > 0 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int te^t dt =$$

$$= 2e^t(t-1) + C = \left|t = \sqrt{x}\right| = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

Рассмотрим ещ"е несколько задач на тему интегрирования по частям.

Задача 2.16. Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$.

Решение.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin 2x\,dx}_{dv} = -\frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{d\left(\cos 2x\right)}_{d\bar{v}} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\underbrace{x\cos 2x}_{u\bar{v}} - \int \underbrace{cos 2x}_{\bar{v}}\ \underbrace{dx}_{du}\right) = -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

(Здесь $\bar{v}$ – есть v без коэффициента, вынесенного за знак интеграла).

Далее вынесем коэффициент перед синусом за скобки

и в итоге получим $\boxed{\displaystyle\int x\sin 2x\,dx = \frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4} + C}$.

Замечание 2.1. Для тех, у кого существуют проблемы с подведением под знак дифференциала, возможен другой более замедленный (но также ведущий к цели) алгоритм решения[1].

[1]Обратите внимание, что при поиске v нужна только одна первообразная, а не всё их множество. То есть константу С писать не надо. Она появится при интегрировании самой функции v.

В задаче (2.15):

$$\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^t dt}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = t,\ du = dt, \\ dv = e^t dt,\ v = \int e^t dt = e^t \end{matrix} \right| = \underbrace{te^t}_{uv} - \int \underbrace{e^t}_{v}\underbrace{dt}_{du} = te^t - e^t + C.$$

В задаче (2.16):

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx, \\ dv = \sin 2x\, dx, \\ v = \int \sin 2x\, dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos 2x}_{uv} - \left(-\frac{1}{2}\right)\int \underbrace{\cos 2x}_{\bar{v}}\underbrace{dx}_{du} = -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

Задача 2.17. Найти неопределённый интеграл $\int \ln 2x\, dx$.

Решение.

$$\int \underbrace{\ln 2x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x\ln 2x}_{vu} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{v}\underbrace{\frac{dx}{\cancel{x}}}_{du} = x\ln 2x - \int dx = x\ln 2x - x + C.$$

В результате, $\boxed{\int x\ln 2x\, dx = x(\ln 2x - 1) + C}$.

В «замедленном » варианте решение этой задачи выглядит так:

$$\int \underbrace{\ln 2x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = \ln 2x,\ du = (\ln 2x)' dx = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx,\ v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{x\ln 2x}_{vu} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{v}\underbrace{\frac{dx}{\cancel{x}}}_{du} = x\ln 2x - \int dx = x\ln 2x - x + C.$$

§ 2.4. О «неберущихся» интегралах

В данной лекции мы прикоснулись только к верхушке айсберга под названием *неопределённый интеграл*. Лишь небольшую часть задач, встречающихся в приложениях, можно решить рассмотренными методами при помощи таблицы интегралов (1.3). Достаточно большую часть интегралов можно «взять» с помощью справочников, подобных таблицам: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. СПб: Лань, – 2005. Но при этом существуют элементарные функции, непрерывные в области определения, для которых не существует первообразных, являющихся элементарными функциями. Интегралы от этих функций называются *неберущимися в элементарных функциях.* Некоторые из этих интегралов встречаются в задачах экономики, связанных с теорией вероятностей и математической статистикой.

Неберущимся является, например, интеграл

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\Phi(x) + C.$$

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа.* Связанная с ней первообразная $\sqrt{2\pi}\Phi(x)$ определяется условием $\Phi(0) = 0$. Функция Лапласа находит применение в теории вероятности, математической и прикладной статистике. Для вычисления значений функции Лапласа существуют таблицы, которые можно найти в любом учебнике и справочнике по теории вероятности и математической статистике. Значения функции Лапласа можно вычислить с помощью некоторых инженерных и статистических калькуляторов.

В теории вероятностей и математической статистике известна функция, которая называется *функцией ошибок*

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int e^{-x^2}dx,\ \mathrm{erf}(0) = 0.$$

Задача 2.18. Выразить функцию ошибок через функцию Лапласа. **Решение** Выразим сначала через функцию Лапласа интеграл $\int e^{-x^2}dx.$

$$\int e^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}F(t) + C = \sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2}x) + C.$$

Домножим обе части полученного равенства на дробь $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2}x) + C = \frac{\pi}{2}\Phi(\sqrt{2}x) + C.$$

Так как $\Phi(0) = 0$ и $\mathrm{erf}(0) = 0$, то $= 0$. Следовательно ,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{\pi}{2}\Phi(\sqrt{2}x).$$

ЛЕКЦИЯ 3.

Определённый интеграл. Основные понятия

§ 3.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $[a;b]$ – произвольный отрезок, на котором функция $y = f(x)$ является непрерывной. Предположим также, что функция $y = F(x)$ является её первообразной (1.1) на данном отрезке, то есть

$$F^{'}(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a;b].$$

Определение 3.1. Под *определённым интегралом от функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ понимается действительное число I, равное приращению первообразной функции $y = F(x)$ на этом отрезке, то есть

$$I = F(b) - F(a).$$

Обозначение определённого интеграла.

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

При этом, точно так же, как и в неопределённом интеграле (1.1), знак $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, dx – *дифференциалом аргумента*, x – *переменной интегрирования*. Параметры a и b называются *пределами интегрирования*: a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница.

Равенство

$$\boldsymbol{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \tag{3.8}$$

называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Из равенства вытекает, что так же, как и в неопределённом интеграле (см. замечание (1.1), имя переменной интегрирования роли не играет, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Это равенство предполагает два очевидных соглашения:
Соглашение 1.

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{3.10}$$

Соглашение 2.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{3.11}$$

На практике, при вычислении определённого интеграла используется вертикальная черта, которая называется *вставка*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.12}$$

Задача 3.1. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^4 x^2\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\cdot\left(4^3 - 1^3\right) = \frac{1}{3}\cdot(64-1) = \frac{1}{3}\cdot 63 = 21.$$

Таким образом, $\boxed{\int\limits_1^4 x^2\,dx = 21}$.

Задача 3.2. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) - \cos(2\cdot 0)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2}\cdot(-1-1) = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-\cancel{2}) = 1.$$

Следовательно, $\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = 1}$.

Замечание 3.1. Следует обратить внимание на то, что в задачах (3.1) и (3.2) соответственно дроби $\dfrac{1}{3}$ и $-\dfrac{1}{2}$ не имеют никакого отношения к операции вставки. Это позволяет уменьшить число операций при вычислении, использовав *распределительный закон умножения относительно сложения*[1], вынося общий множитель-дробь за скобки и уменьшая вероятность арифметических ошибок.

Тот факт, что, находя на некотором интервале $(a;b)$ неопределённый интеграл от функции $y = f(x)$, мы имеем дело с множеством её первообразных функций, а при вычислении соответствующего определённого интеграла ограничиваемся только одной из них, объясняется следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Определённый интеграл от непрерывной функции не зависит от выбора её первообразной функции.*

Объяснить это можно тем, что, если непрерывная на отрезке $a;b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке две различные первообразные функции $y = F(x)$ и $y = F_1(x)$, то, в силу теоремы о представлении первообразных (**??**), функция

$$F_1(x) = F(x) + C,$$

где C – произвольная константа. Поэтому

$$F_1(x)\Big|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) =$$

$$= F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие 3.1.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b,$$

где под $\displaystyle\int f(x)\,dx$ понимается одна из первообразных функций для функции $y = f(x)$.

Данное соотношение устанавливает связь между определённым и соответствующим неопределённым интегралами. С формальной же точки зрения определённый интеграл представляет число, а неопределённый – множество функций.

[1] $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. (В математической литературе закон носит своё латинское имя *дистрибутивный закон умножения относительно сложения*).

§ 3.2. Понятие интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Определение 3.2. *Функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Если $y = F(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$, то есть $F^{'} = f(x)$, то из формулы Ньютона-Лейбница (3.8) следует, что

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Этот факт позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в точке верхнего предела.*

Чтобы это доказать, достаточно продифференцировать по переменной x последнее равенство

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)^{'} = (F(x) - F(a))^{'} = F^{'}(x) - F^{'}(a) = f(x) - 0 = f(x).$$

Следовательно, интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для подынтегральной функции $y = f(x)$, при этом $\Phi(a) = 0$.

Например[1],

$$\left(\int\limits_0^x \sqrt{1+t}\,dt\right)^{'} = \sqrt{1+x}.$$

[1]Аналогично можно определить интеграл с переменным нижним пределом $\int\limits_x^b f(t)\,dt$, где $x \in [a; b]$. При этом будет иметь место теорема: *Производная интеграла с переменным нижним пределом равна значению подынтегральной функции в точке нижнего предела, взятому с противоположным знаком.*

Из следствия (3.1) вытекает

Следствие 3.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

$$\forall\, x \in [a; b] \ \int f(x)\, dx = \int\limits_a^x f(t)\, dt + C,$$

где C – произвольная постоянная.

§ 3.3. Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция, заданная на отрезке $[a; b]$, определяет некоторую линию в декартовой плоскости XOY.

Определение 3.3. *Плоская фигура в декартовой системе координат XOY, ограниченная линиями*

$$x = a;\ x = b;\ y = f(x);\ y = 0,$$

называется криволинейной трапецией.

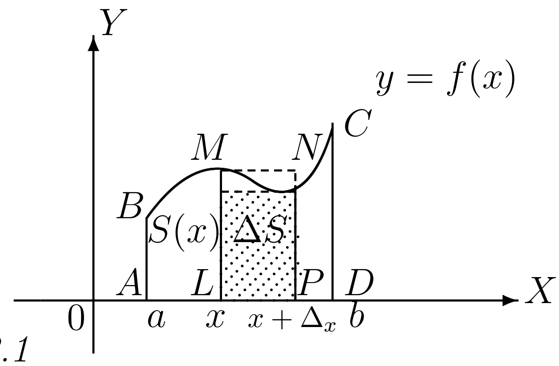

Рис. 3.1

Попробуем определить площадь построенной на Рис. 3.1 криволинейной трапеции $ABCD$. Для этого изучим поведение площади $S(x)$ переменной фигуры $ALMB$, заключенной между вертикальной левой постоянной границей $x = a$ и подвижной вертикальной правой границей $x = x$, где x – произвольно выбранное значение на отрезке $[a; b]$. Если взять приращение $\Delta x > 0$, то правая граница сместится, увеличив площадь переменной фигуры на $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$.

Предположим, что мы знаем наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$:

$$m = \underset{[x;x+\Delta x]}{MIN} f(x);\ \ M = \underset{[x;x+\Delta x]}{MAX} f(x).$$

Если сравнить площадь дополнительной фигуры $\Delta S(X)$ с площадями прямоугольников, имеющих общее с этой фигурой основание Δx и высотами m и M, то мы получим двойное неравенство

$$m\Delta x \leq \Delta S(x) \leq M\Delta x.$$

Разделив все части неравенства на Δx, получим, что

$$m \leq \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leq M.$$

Заставив $\Delta x \to 0$, мы увидим, что в силу непрерывности функции $y = f(x)$

$$m \to f(x) \text{ и } M \to f(x).$$

По этой причине

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x).$$

А так как согласно определению производной (**??**) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S^{'}(x)$, то

$$S^{'}(x) = f(x).$$

Таким образом, мы получаем утверждение, которое называется

Теорема 3.3. Теорема Ньютона-Лейбница *Производная площади переменной криволинейной трапеции $S(x)$ по конечной абциссе x равна конечной ординате $y = f(x)$.*

Другими словами эту теорему можно перефразировать так: *Переменная площадь $S(x)$ представляет ту из первообразных функций для функции $y = f(x)$, для которой $S(a) = 0$.* Из этой теоремы также следует, что

$$dS(x) = f(x)dx.$$

Так как $S = S(b) = S(b) - S(a)$, то согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$S = S(b) - S(a) = \int\limits_a^b dS(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Поэтому, с точки зрения геометрии имеет место

Теорема 3.4. О геометрическом смысле определённого интеграла. *Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции на отрезке $[a; b]$ равен площади S соответствующей криволинейной трапеции*[1]

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{3.13}$$

[1]Правильнее было бы сказать, что *определённый интеграл определяет площадь криволинейной трапеции*, так как площадь равна интегралу, а не интеграл площади, но получилась бы тавтология.

Задача 3.3. Найти площадь S плоской фигуры, расположенной в верхней координатной полуплоскости и ограниченной одной полуволной косинусоиды $y = \cos x$ и осью OX.

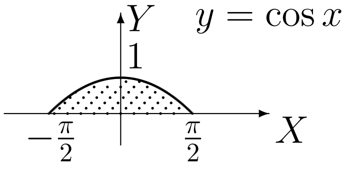

Рис. 3.2

Решение. Так как функция $y = \cos x$ является периодической в области определения с периодом, равным 2π, то площадь любой из таких фигур является числом постоянным, не зависящим от расположения фигуры относительно начала координат. Поэтому выберем ту из фигур, которая содержит начало координат. Чтобы найти концы отрезка интегрирования, решим уравнение $\cos x = 0$. Из тригонометрического круга следует, что с учётом периода уравнение имеет две серии корней:

$$x_{1k} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ и } x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Так как в нашем случае $k = 0$, то за пределы интегрирования a и b нужно соответственно взять точки $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$. Составим согласно формуле (3.12) интеграл и вычислим его значение

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Таким образом, $\boxed{S = 2 \text{ кв. ед.}}$

В данном случае умение интегрировать и знание о том, зачем это нужно уметь делать, помогли найти площадь фигуры, которую невозможно найти средствами элементарной математики.

А если это знание применить наоборот? Ведь теорема (3.4) позволяет найти интеграл от функции, которая является границей плоской фигуры, площадь которой можно вычислить при помощи формул, известных в элементарной математике.

Задача 3.4. Найти значение определённого интеграла $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

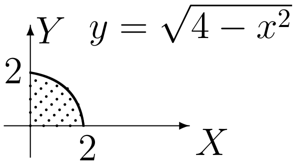

Рис. 3.3

Решение. Найти первообразную функцию для функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ с помощью таблицы (1.3) невозможно[1]. Поэтому обратимся к школьной геометрии. Функция $y = \sqrt{4 - x^2}$ определяет дугу окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположенную в верхней полуплоскости декартовой системы координат[1]. Из пределов интегрирования известно, что $0 \le x \le 2$. Поэтому данный интеграл численно совпадает с площадью криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$x = 0;\ x = 2;\ y = \sqrt{4 - x^2};\ y = 0.$$

То есть, он равен площади четверти круга, радиус которого $R = 2$. В школьной математике площадь круга определяется формулой $S = \pi R^2$. Следовательно, в нашем случае $S = \pi \cdot 2^2$ или $S = 4\pi$.

Поэтому $\boxed{\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \pi}$.

Так как возможности интегрирования с помощью таблиц не беспредельны, то рассмотрим свойства определённого интеграла, которые помогут увеличить эти возможности.

§ 3.4. Свойства определённого интеграла

Далее будем предполагать, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ $(a \le b)$ и $\forall\, x \in [a; b]$ $F^{'}(x) = f(x)$, а $G^{'}(x) = g(x)$.

Свойство 3.1. Свойство аддитивности. *Определённый интеграл от суммы функций равен сумме определённых интегралов от этих функций,* то есть

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Так как $(F(x) + G(x))^{'} = F^{'}(x) + G^{'}(x) = f(x) + g(x)$, то

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

[1]Это легко проверить, если возвести обе части уравнения, задающего функцию, в квадрат и учесть, что $y \ge 0$.

Свойство 3.2. Свойство однородности. *Постоянный множитель можно вынести за знак определённого интеграла*[1]. или

$$\forall\, k \in \mathbb{R} \quad \int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

В силу того, что

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

имеем

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = k(F(b) - F(a)) = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Задача 3.5. Найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$; $y = 0$; $x = x_{min}$; $x = x_{max}$, где $x = x_{min}$ и $x = x_{max}$ – точки экстремума функции, определяющей верхнюю границу трапеции.

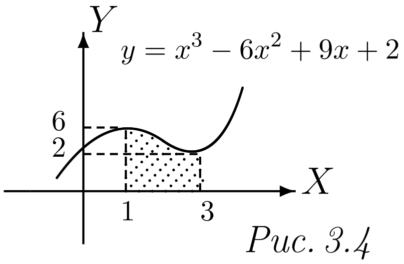

Рис. 3.4

Решение. Найдём точки экстремума функции и значения функции в этих точках. Производная кубического многочлена $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Опрделим её стационарные точки, решив уравнение

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3.$$

Так как многочлен – функция непрерывная, то одна из них есть точка максимума, а другая – точка минимума. Вычислим значения экстремумов: $y(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 + 2 \Rightarrow y(1) = 6$; $y(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 + 2 \Rightarrow y(3) = 2$. Очевидно, что максимум находится в точке $(1; 6)$, а минимум – в точке $(3; 2)$. На рисунке (3.4) изображён схематический график криволинейной трапеции. Подставим функцию и точки экстремума в правую часть формулы вычисления площади (3.13):

$$\int\limits_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x + 2)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - 6\cdot\frac{1}{3}x^3 + 9\cdot\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(3^4 - 1^4) - 2\cdot(3^3 - 1^3) + \frac{9}{2}\cdot(3^2 - 1^2) + 2\cdot(3 - 1) = 20 - 52 + 36 + 4 = 8.$$

[1] Это свойство, с точки зрения его применения, лучше бы звучало так: *постоянный множитель* **нужно** *вынести за знак определённого интеграла.*

Следовательно, $\boxed{S = 8 \text{ кв.ед.}}$.

Предположим далее, что точка $c \in [a;b]$.

Свойство 3.3. Свойство аддитивности отрезка интегрирования

Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит на отрезки $[a;c]$ и $[c;b]$, то определённый интеграл по отрезку $[a;b]$ равен[1] *сумме интегралов по отрезкам разбиения*, то есть

$$\forall\ c \in [a;b] \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если $[a;b] = [a;c] \cup [c;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) =$$

$$= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Пусть $y = f(x)$ – знакопеременная непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$. Если предположить, что $f(x) \leq 0$ при $x \in [a;c]$ и $f(x) > 0$ при $x \in [c;b]$, то из данной теоремы вытекает «геометрическое»

Следствие 3.3. *Определённый интеграл от знакопеременной непрерывной функции определяет алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций. При этом площади трапеций, расположенных над осью OX – положительны, а площади трапеций, расположенных под осью OX – отрицательны.* То есть,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = -S_1 + S_2$$

или

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2.$$

(Здесь S_1, S_2 – площади соответствующих криволинейных трапеций).

[1] Для непрерывной функции $y = f(x)$ это верно и в случае, когда c расположено вне отрезка $[a;b]$.

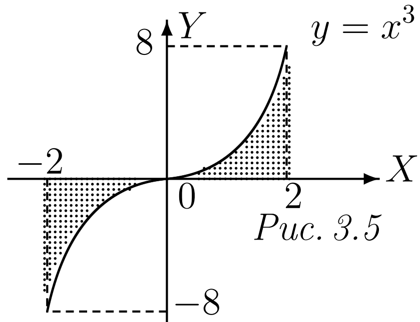

Рис. 3.5

Задача 3.6. Найти площадь S плоской фигуры, ограниченной кубической параболой $y = x^3$, осью OX и вертикальными прямыми $x = -2$ и $x = 2$.

Решение. Из Рис. 3.5 видно, что функция $y = x^3$ является знакопеременной и поэтому интервал между вертикальными прямыми следует разбить[1] точкой $c = 0$. И так как слева от $c = 0$ функция отрицательна, то согласно «геометрическому» следствию

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx = -\int\limits_{-2}^{0} x^3 dx + \int\limits_{0}^{2} x^3 dx = -\left(\frac{1}{4}x^4\Big|_{-2}^{0}\right) + \frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\left(0^4 - (-2)^4\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2^4 - 0^4\right) = -\left(\frac{1}{4}\cdot(-16)\right) + \frac{1}{4}\cdot 16 = 4 + 4 = 8.$$

В результате получаем, что $\boxed{S = 8 \textit{ кв.ед.}}$

Рассмотрим ещё одну задачу на вычисление площади плоской фигуры, решение которой связано со свойствами аддитивности площади и линейными свойствами определённого интеграла.

Задача 3.7. Найти площадь S плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

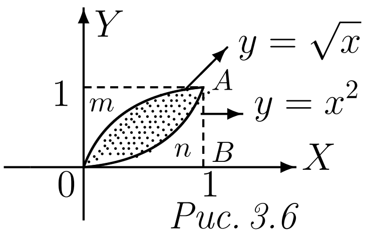

Рис. 3.6

Решение. Решив уравнение $x^2 = \sqrt{x}$, найдем границы проекции фигуры на ось OX.

$$\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1.$$

Из рисунка (3.6) видно, что площадь лунки $0mAn0$ можно найти как разность площадей криволинейных трапеций $0mAB$ и $0nAB$. А так как разность интегралов, заданных на одном отрезке интегрирования, равна интегралу разности, то

$$S = \int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx.$$

[1]Если отрезок интегрирования не разбивать, то мы получим, что площадь окажется равной нулю, так как $\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx = 0$.

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x} - x^2)\,dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{2}} dx - \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot(1-0) - \frac{1}{3}\cdot(1-0) = \frac{1}{3}.$$

Поэтому, $\boxed{S \approx 0,33 \textit{ кв. ед.}}$

Свойство 3.4. Свойство неотрицательности.

Если подынтегральная функция $f(x) \geq 0$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Так как $F^{'}(x) = f(x) \geq 0$, то первообразная функция $y = F(x)$ является неубывающей. То есть, если $a \leq b$, то $F(a) \leq F(b)$. Поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

Свойство 3.5. Свойство монотонности.

Если $\forall\ x \in [a;b]\ f(x) \leq g(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если $\forall\ x \in [a;b]\ f(x) \leq g(x)$, то $g(x) - f(x) \geq 0$. Следовательно, в силу свойства (3.4)

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0.$$

Откуда вытекает, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Свойство 3.6. Теорема о среднем.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$, то внутри отрезка существует точка $x = c$ такая, что определённый интеграл от данной функции равен произведению значения функции $f(c)$ на длину отрезка интегрирования, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Согласно формуле Ньютона-Лейбница (3.8), интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F^{'}(x) = f(x).$$

Если применить к разности первообразных теорему Лагранжа (**??**), то мы получим

$$F(b) - F(a) = F^{'}(c)(b-a) = f(c)(b-a) \text{ где } c \in (a;b).$$

В итоге

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \text{ где } c \in (a;b). \tag{3.14}$$

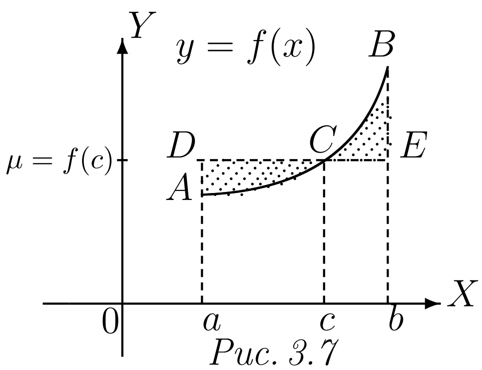

Рис. 3.7

Замечание 3.2. С точки зрения геометрии формула (3.14) имеет простое объяснение. Предположим, что левая часть формулы определяет площадь криволинейной трапеции $aABb$, где кривая AB задаётся равенством $y = f(x)$, а a и b – абциссы точек A и B. Тогда её правая часть представляет площадь прямоугольника $aDEb$ с основанием $b - a$ и высотой $f(c)$.

То есть, *внутри отрезка $[a;b]$ существует такая точка c, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, построенного на $[a;b]$, с высотой, равной $f(c)$.*

Определение 3.4. Число $\mu = f(c)$ называется *средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

Замечание 3.3. В экономических исследованиях и практике средние значения функций используются достаточно часто. Так, например, при моделировании государственной стратегии пенсионного обеспечения исследуется функция
$z = f(t)$ зарплаты от возраста. При этом с точки зрения государства и с точки зрения работника изучается вопрос о длине периода T при определении стратегии

$$\min_{T} \max_{t_o} \left(\frac{1}{T} \int\limits_{t_o}^{t_o+T} f(t)\, dt \right).$$

Предположим, что

$$m = \underset{x\in[a;b]}{MIN} f(x); \;\; M = \underset{x\in[a;b]}{MAX} f(x).$$

Из формулы (3.14) вытекает следствие, которое играет большую роль при оценке определённых интегралов.

Следствие 3.4. Об оценке определённых интегралов

Если $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

Задача 3.8. Оценить интеграл $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение. Так как функция $y = \cos x$ является убывающей на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, то функция $y = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ возрастает на этом отрезке. Поэтому

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{1+\cos^2 \frac{\pi}{3}} \leq \frac{1}{1+\cos^2 x} \leq \frac{1}{1+\cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} \leq 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

То есть,

$$\frac{2\pi}{15} \leq \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{6}.$$

Зная границы интеграла, найдём его приближённое значение

$$\approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\pi}{20} = 0,471.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} \approx 0,471.$$

С помощью таблиц Г.Двайта[1] (см. стр.25) для сравнения можно найти точное значение интеграла

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{1-3\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{5} \right) = 0,484.$$

§ 3.5. Методы интегрирования в определённом интеграле

3.5.1. Замена переменной в определённом интеграле

Одним из неудобств метода замены переменной в неопределённом интеграле (см. решение задач (2.8)-(2.9)) является возврат к «старой» переменной. Определённый интеграл позволяет избавиться от этого дискомфорта.

Теорема 3.5. О замене переменной в определённом интеграле.

Пусть имеют место следующие предположения:

1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2) существует функция $y = F(x)$ такая, что $F^{'}(x) = f(x)$;
3) функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$;
4) при изменении t от α до β значения x пробегают отрезок $[a; b]$, так что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)\,dt. \qquad (3.16)$$

Рассмотрим сложную функцию $y = F(\varphi(t))$ и найдём её производную

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F^{'}_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi^{'}(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi^{'}(t).$$

[1] Формула 444.05.

Из вычислений видно, что функция $y = F(\varphi(t))$ является первообразной функцией для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi^{'}(t)$.

Поэтому, на основании формулы Ньютона-Лейбница (3.8) и четвёртого условия теоремы имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Из доказательства теоремы видно, что каждый интеграл имеет свои пределы, что позволяет не возвращаться к старой переменной.

Задача 3.9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{2}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$..

Решение.

$$\int\limits_{2}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} = \left|\begin{array}{l} t = \sqrt{x-1} \\ x = t^2+1 \\ dx = 2tdt \\ t_{\text{н}} = \sqrt{2-1} = 1 \\ t_{\text{в}} = \sqrt{5-1} = 2 \end{array}\right| = 2\int\limits_{1}^{2} \frac{(t^2+1)tdt}{t} = 2\int\limits_{1}^{2} (t^2+1)dt =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}t^3\Big|_{1}^{2} + t\Big|_{1}^{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right) + 2 - 1 \right) = 2 \cdot \left(\frac{7}{3} + 1 \right) = 6\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\boxed{\displaystyle\int\limits_{2}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} \approx 6,67}$.

Замечание 3.4. Чтобы найти новые нижний $t_{\text{н}}$ и верхний $t_{\text{в}}$ пределы интегрирования, старые нижний $x_{\text{н}} = 2$ и верхний $x_{\text{в}} = 5$ пределы интегрирования были подставлены в формулу замены $t = \sqrt{x-1}$.

Задача 3.10. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{9}^{16} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$..

Решение.

$$\int\limits_9^{16}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x}+1 \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=\dfrac{dx}{2(t-1)} \\ dx=2(t-1)dt \\ t_{\text{н}}=\sqrt{9}+1=4 \\ t_{\text{в}}=\sqrt{16}+1=5 \end{array}\right|=2\int\limits_4^5\frac{(t-1)dt}{t}=$$

$$=2\int\limits_4^5\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\cdot\left(t\Big|_4^5-\ln t\Big|_4^5\right)=$$

$$=2\cdot(5-4-(\ln 5-\ln 4))=2\cdot\left(1-\ln\frac{5}{4}\right).$$

Так как $\ln 1,25\approx 0,223$, то $\boxed{\int\limits_9^{16}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\approx 1,55}$.

3.5.2. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Аналогично правилу (2.3) можно утверждать, что если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то имеет место

Теорема 3.6. Об интегрировании по частям в определённом интеграле

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx=(u(x)v(x))\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)dx,$$

где

$$(u(x)v(x))\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a).$$

Если вспомнить, что $u'(x)dx=du$, а $v'(x)dx=dv$, то, переписав равенство получим **формулу интегрирования по частям в определённом интеграле**:

$$\int\limits_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu. \tag{3.17}$$

Задача 3.11. Вычислить интеграл $\int\limits_1^3 x\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^3 x\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ \ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx \\ v=\displaystyle\int xdx=\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(3^2\cdot\ln 3 - 1^2\cdot\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int\limits_1^3 xdx\,dx = \frac{1}{2}\cdot 9\ln 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_1^3\right) \approx$$

$$\approx 4,5\cdot 1,099 - 0,25\cdot(3^2-1^2) = 4,944 - 2 = 2,944.$$

В итоге, $\boxed{\int\limits_1^3 x\ln x\,dx \approx 2,94.}$

Задача 3.12. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=x,\ \ du=dx \\ dv=\sin 2x\,dx \\ v=\displaystyle\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot\cos(2\cdot 0)\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\cdot 0)\right) = \frac{1}{4}\cdot(1-0) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx = 0,25.}$

В заключение параграфа рассмотрим приложение метода интегрирования по частям к решению одной задачи из мира экономики.

В экономике известна функция Кобба-Дугласа. Если в одном из её приложений считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то эта функция выглядит следующим образом:

$$KD(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}.$$

Зная эту функцию, можно найти объём Q выпускаемой продукции за период в T дет:

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt.$$

Задача 3.13. Найти объем продукции, произведенной за 2 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $KD(t) = (1+t)e^{2t}$.

Решение. В данном случае объём продукции $Q = \int\limits_0^2 (1+t)e^{3t} dt$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^2 (1+t)e^{2t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+t, \ du = dt \\ dv = e^{2t}\,dt \\ v = \displaystyle\int e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left((t+1)e^{2t}\Big|_0^2 \right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{2t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left((2+1) \cdot e^{2\cdot 2} - (0+1) \cdot e^{2\cdot 0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2t}\Big|_0^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(3e^4 - 1\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2\cdot 2} - e^{2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3e^{12} - 1\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(e^4 - 1\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(5e^4 - 1\right).$$

Вычислив приближённое значение $e^4 \approx 54,598$, получаем

$$\boxed{Q \approx 272,74 \ (\textit{усл. ед.})}.$$

ЛЕКЦИЯ 4.

Определённый интеграл как предел интегральных сумм

Понятие определённого интеграла как приращения первообразной (см. определение (3.1)) позволяет решить множество тех задач, в которых известны производная или дифференциал неизвестной функции. Но, кроме таких задач, существует неме́ньшее число задач, в которых неизвестны ни производная, ни дифференциал функции. Поэтому для решения этих задач необходимо другое определение определённого интеграла.

Попробуем разобраться с этим определением в два этапа. Сначала мы изучим вопрос определения площади криволинейной трапеции для неотрицательной непрерывной на отрезке функции[1], считая известным школьное определение площади прямоугольника: *площадью прямоугольника называется произведение длин двух его соседних сторон.*

4.0.3. Определение площади криволинейной трапеции

Далее будем считать, что у нас есть отрезок $[a;b]$, во всех точках которого функция $f(x)$ является непрерывной и неотрицательной.

Рассмотрим на этом отрезке множество точек

$$\Pi_1 = \{a = x_{10},\, x_{11},\, x_{12},\, x_{13},\, \ldots,\, x_{1(k-1)},\, x_{1k},\, \ldots,\, x_{n_1-1},\, x_{n_1} = b\}, \qquad (4.18)$$

которое назовём *разбиением* Π_1 *отрезка* $[a;b]$. Для точек этого разбиения имеет место следующее отношение порядка:

$$a = x_{10} < x_{11} < x_{12} <, x_{13} < \cdots < x_{1(k-1)} < x_{1k} < \cdots < x_{n_1-1} < x_{n_1} = b.$$

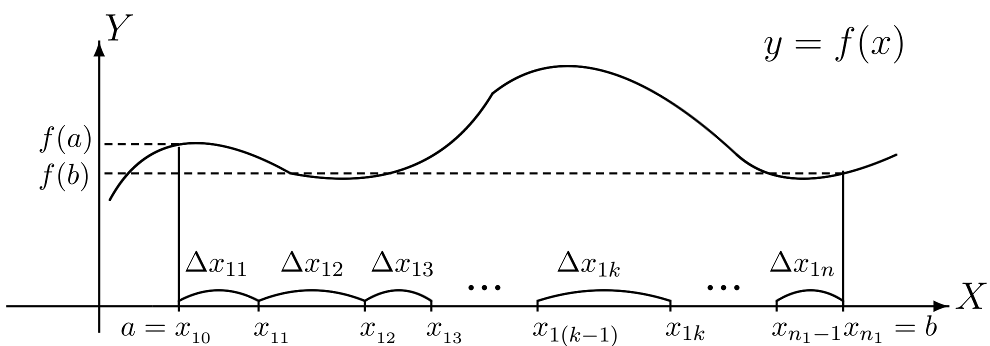

Рис. 4.1

[1]Изучение определения определённого интеграла можно было бы начать и с изучения задач школьной физики, но известно, что бо́льшее число людей знает, как найти площадь прямоугольника, нежели знает, как решать задачи школьной физики.

Далее, найдём длины отрезков, образовавшихся вследствие разбиения Π_1:

$$\Delta x_{11} = x_{11} - x_{10}; \Delta x_{12} = x_{12} - x_{11}; \ldots \Delta x_{1k} = x_{1k} - x_{1(k-1)}; \ldots \Delta x_{n_1} = x_{n_1} - x_{(n_1-1)}. \tag{4.19}$$

Назовём *диаметром разбиения* Π_1 длину наибольшего из отрезков:

$$d_1 = \max_{1 \le k \le n_1} \{\Delta x_{11}; \Delta x_{12}; \ldots \Delta x_{1k}; \ldots \Delta x_{1n_1}\}. \tag{4.20}$$

Выберем на каждом из отрезков $[x_{1(k-1)};\, x_{1k}]$ $(1 \le k \le n_1)$ по одной точке произвольным образом:

$$\alpha_{111} \in [x_{10};\, x_{11}];\ \alpha_{121} \in [x_{11};\, x_{12}]; ..\, \alpha_{1k1} \in [x_{1(k-1)};\, x_{1k}]; ..\, \alpha_{n_1 1} \in [x_{n_1-1};\, x_{n_1}]. \tag{4.21}$$

(О том, что эти точки выбраны произвольно[1], говорит третий индекс, который не зависит от номера отрезка разбиения (в данном случае это 1).)

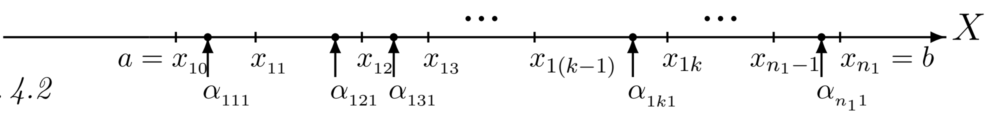

Рис. 4.2

Найдём в каждой из выбранных точек α_{1k1} значение функции[2] $f(\alpha_{1k1})$ и построим на каждом отрезке $[x_{1(k-1)}; x_{1k}]$, как на основании, прямоугольник с высотой $h_{1k1} = f(\alpha_{1k1})$.

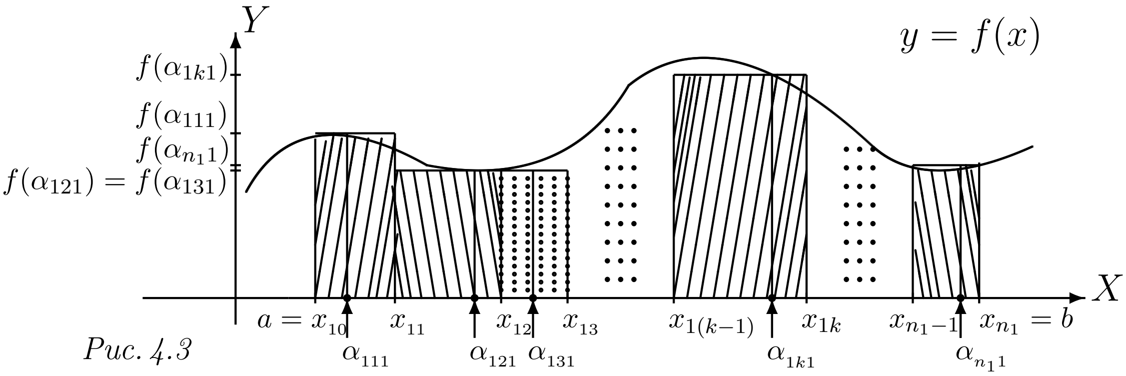

Рис. 4.3

Найдём сумму площадей построенных прямоугольников:

$$\sigma_{11} = f(\alpha_{111})\Delta x_{11} + f(\alpha_{121})\Delta x_{12} + \cdots + f(\alpha_{1k1})\Delta x_{1k} + \cdots + f(\alpha_{n_1 1})\Delta x_{1n_1}. \tag{4.22}$$

Более компактно её можно записать так[3]:

$$\sigma_{11} = \sum_{k=1}^{n_1} f(\alpha_{1k1})\Delta x_{1k}. \tag{4.23}$$

[1] Выбранная произвольно точка может совпадать с одним из концов отрезка, нужно только определить, какому из двух смежных отрезков она принадлежит, поскольку на каждом из них выбирается по одной точке.

[2] То, что это значение существует, вытекает из предположения о том, что функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$, а, следовательно, и ограниченной на этом отрезке в силу первой теоремы Вейерштрасса.

[3] Второй индекс в обозначении суммы площадей совпадает с третьим индексом в обозначении произвольных точек.

Понятно, что эта сумма площадей в силу случайности её выбора может сильно отличаться от площади криволинейной трапеции.

Поэтому вернёмся к отрезкам разбиения и выберем на каждом из отрезков $[x_{1(k-1)};\, x_{1k}]$ $(1 \le k \le n_1)$ подобно выбору (4.21) по новой точке также произвольным образом:

$$\alpha_{112} \in [x_{10};\, x_{11}];\ \alpha_{122} \in [x_{11};\, x_{12}]; \ldots \alpha_{1k2} \in [x_{1(k-1)};\, x_{1k}]; \ldots \alpha_{n_1 2} \in [x_{n_1-1};\, x_{n_1}]. \tag{4.24}$$

(То, что это новый набор точек, объясняется тем, что третий индекс увеличился на единицу и стал равным 2).

Далее, повторяя вышеописанный процесс, найдём новую, в данном случае вторую, сумму площадей, связанную с разбиением Π_1:

$$\sigma_{12} = \sum_{k=1}^{n_2} f(\alpha_{1k2})\Delta x_{1k}. \tag{4.25}$$

Повторяя этот процесс m раз, то есть выбирая на каждом из отрезков разбиения Π_1 точки α_{1km} $(1 \le k \le n_1)$, $m = 1, 2, \ldots$ бесконечное число раз всевозможными способами, получим бесконечную последовательность сумм площадей, соответствующую разбиению Π_1:

$$\sigma_{11},\, \sigma_{12},\, \sigma_{13},\, \ldots, \sigma_{1m}, \ldots \tag{4.26}$$

Но возникает вопрос, стремятся ли члены этой числовой последовательности к значению площади построенной криволинейной трапеции? Ведь нельзя же забывать, что разбиение Π_1, имеющее диаметр d_1, было выбрано случайным образом. Если бы было выбрано другое разбиение, то и площади построенных указанным способом прямоугольников имели бы другие значения. А значит и построенная из них последовательность, если бы и имела предел, то это было бы другое число.

Если выбрать новое разбиение Π_2 с диаметром разбиения $d_2 < d_1$, то новые прямоугольники, получившиеся в аналогичном выше описанному процессу построении, более плотно заполнят криволинейную трапецию, а значит ошибка, допускаемая при замене площади трапеции на их общую площадь, окажется меньше, чем в случае предыдущего разбиения. И объяснение тому можно увидеть не только на чертеже. Так как по предположению функция $y = f(x)$ является непрерывной, то в окрестности каждой точки малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. То есть, при уменьшении оснований прямоугольников высота каждого из них будет всё больше похожа на значения функции в соседних точках. Что, с точки зрения геометрии, означает, что кривая над основанием каждого прямоугольника в случае нового разбиения будет больше походить на верхнее основание соответствующего прямоугольника.

Повторив весь процесс, мы получим новую бесконечную последовательность сумм площадей, соответствующую разбиению Π_2:

$$\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \ldots, \sigma_{2m}, \ldots, \tag{4.27}$$

которую объединим с последовательностью (4.26).

Далее, последовательно уменьшая диаметр каждого следующего разбиения:

$$d_1 > d_2 > d_3 > \cdots > d_r > \ldots,$$

получим соответствующую этой цепочке разбиений последовательность сумм площадей прямоугольников, представляющую объединение последовательностей таких сумм для построенных разбиений.

Исходя из наглядности данного построения, а также свойств непрерывной на отрезке функции (см. теоремы Вейерштрасса), видим, что полученная последовательность сумм при диаметре разбиений $d_r \to 0$ имеет предел, не зависящий ни от выбора точек внутри разбиений, ни от выбора самих разбиений:

$$S = \lim_{\substack{r \to \infty \\ d_r \to 0}} \sum_{k=1}^{n_r} f(\alpha_{rkm}) \Delta x_{rk} \ (m = 1,\, 2 \ldots). \tag{4.28}$$

На основании вышесказанного, можно дать следующее

Определение 4.1. *Площадью S криволинейной трапеции, ограниченной линиями*

$$y = f(x);\ y = 0;\ x = a;\ x = b,$$

называется предел

$$S = \lim_{\substack{r \to \infty \\ d_r \to 0}} \sum_{k=1}^{n_r} f(\alpha_{rkm}) \Delta x_{rk},$$

не зависящий ни от выбора точек α_{rkm}, $(m = 1, 2, \ldots)$ внутри разбиений, ни от выбора самих разбиений Π_r.

Следует заметить, что опыт подобного определения для последующего вычисления количества был известен много лет назад и древним египтянам, и Евдоксу[1] (а сто лет позднее и Архимеду[2]). Именно многократное использование этого опыта привело к его обобщению в виде метода интегральных сумм, на основании которого и было построено конструктивное определение определённого интеграла.

[1]Евдокс Книдский (др.-греч. $E\vartheta\delta o\xi o\varsigma$, лат. Eudoxus; ок. 408 год до н. э. - ок. 355 год до н. э.) – древнегреческий математик и астроном.

[2]Архимед ($A\rho\chi\acute{\iota}\mu\eta\delta\eta\zeta$, 287 до н. э. - 212 до н. э.) – древнегреческий математик, физик, механик и инженер из Сиракуз.

Воспользуемся опытом определения площади криволинейной трапеции, чтобы воспроизвести это определение.

4.0.4. Определённый интеграл. Второе определение

Представленный далее алгоритм построения определения является повторением предыдущего раздела, из которого исключены геометрическая терминология и предположение о неотрицательности функции $f(x)$ (которое и появилось в связи с этой самой геометрической терминологией).

Предположим, что $[a;b]$ – отрезок из множества действительных чисел, на котором функция $f(x)$ является непрерывной.

Рассмотрим разбиение этого отрезка в виде множества чисел, которые назовём *узлами разбиения*,

$$\Pi_1 = \{a = x_{10},\, x_{11},\, x_{12},\, x_{13},\, \dots,\, x_{1(k-1)},\, x_{1k},\, \dots,\, x_{n_1-1},\, x_{n_1} = b\}. \tag{4.29}$$

Обозначим полученное разбиение Π_1. Для узлов данного разбиения имеет место следующее отношение порядка:

$$a = x_{10} < x_{11} < x_{12} <, x_{13} < \dots < x_{1(k-1)} < x_{1k} < \dots < x_{n_1-1} < x_{n_1} = b.$$

Найдём разности между узлами разбиения Π_1:

$$\Delta x_{11} = x_{11} - x_{10};\, \Delta x_{12} = x_{12} - x_{11}; ... \,\Delta x_{1k} = x_{1k} - x_{1(k-1)}; ... \,\Delta x_{n_1} = x_{n_1} - x_{(n_1-1)}. \tag{4.30}$$

Наибольшую из получившихся разностей назовём *диаметром разбиения* Π_1:

$$d_1 = \max_{1\le k\le n_1} \{\Delta x_{11}; \Delta x_{12}; \dots \Delta x_{1k}; \dots \Delta x_{1n_1}\}. \tag{4.31}$$

Выберем между каждыми двумя соседними узлами $x_{1(k-1)}$ и x_{1k} $(1 \le k \le n_1)$ по одному числу произвольным образом:

$$\alpha_{111} \in [x_{10};\, x_{11}];\, \alpha_{121} \in [x_{11};\, x_{12}]; ..\, \alpha_{1k1} \in [x_{1(k-1)};\, x_{1k}]; ..\, \alpha_{n_11} \in [x_{n_1-1};\, x_{n_1}]. \tag{4.32}$$

(О том, что эти числа выбраны произвольно[1], говорит третий индекс, который не зависит от номера соответствующего правого узла разбиения (в данном случае это 1).)

Найдём для каждого из выбранных чисел α_{1k1} соответствующее ему значение функции[2] $f(\alpha_{1k1})$:

$$f(\alpha_{111}),\, f(\alpha_{121}),\, f(\alpha_{131}),\, \dots,\, f(\alpha_{1k1}),\, \dots,\, f(\alpha_{1n_11}). \tag{4.33}$$

[1]Выбранное произвольно число может совпадать с одним из соседних узлов разбиения, нужно только определить, с каким именно: с левым или с правым, поскольку между каждой парой узлов выбирается по одному числу.

[2]То, что это значение существует, вытекает из предположения о том, что функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a;b]$, а следовательно и ограниченной на этом отрезке в силу первой теоремы Вейерштрасса.

Определим скалярное произведение векторов значений функции (4.33) и разностей (4.30):

$$\sigma_{11} = f(\alpha_{111})\Delta x_{11} + f(\alpha_{121})\Delta x_{12} + \dots + f(\alpha_{1k1})\Delta x_{1k} + \dots + f(\alpha_{n_1 1})\Delta x_{1n_1}, \tag{4.34}$$

которое назовём *интегральной суммой.*

Более компактно её можно записать так[1]:

$$\sigma_{11} = \sum_{k=1}^{n_1} f(\alpha_{1k1})\Delta x_{1k}. \tag{4.35}$$

Для образования второй интегральной суммы выберем подобно выбору (4.32) новые числа α_{1k2} $(1 \le k \le n_2)$ также произвольным образом:

$$\alpha_{112} \in [x_{10};\, x_{11}];\, \alpha_{122} \in [x_{11};\, x_{12}];\, ..\alpha_{1k2} \in [x_{1(k-1)};\, x_{1k}];\, ..\alpha_{n_1 2} \in [x_{n_1-1};\, x_{n_1}]. \tag{4.36}$$

(То, что это новый набор чисел, объясняется тем, что третий индекс увеличился на единицу и стал равным 2).

Далее, повторяя вышеописанный процесс, найдём новую, в данном случае вторую, интегральную сумму, связанную с разбиением Π_1:

$$\sigma_{12} = \sum_{k=1}^{n_2} f(\alpha_{1k2})\Delta x_{1k}. \tag{4.37}$$

Повторяя этот процесс m раз, то есть выбирая между каждыми двумя узлами разбиения Π_1 числа α_{1km} $(1 \le k \le n_1)$, $m = 1, 2, \dots$ бесконечное число раз всевозможными способами, получим бесконечную последовательность интегральных сумм, соответствующую разбиению Π_1:

$$\sigma_{11},\, \sigma_{12},\, \sigma_{13},\, \dots, \sigma_{1m}, \dots \tag{4.38}$$

Главный вопрос для любой бесконечной последовательности – вопрос существования её предела. Но какой смысл исследования предела последовательности, которая связана с одним разбиением, выбранным совершенно случайно? Если бы было выбрано другое разбиение, то и интегральные суммы, построенные указанным способом, имели бы другие значения. А значит и построенная из них последовательность, если бы и имела предел, то это было бы другое число.

Если выбрать новое разбиение Π_2 с диаметром разбиения $d_2 < d_1$, то, повторив весь процесс, получим новую бесконечную последовательность интегральных сумм, соответствующую разбиению Π_2:

$$\sigma_{21},\, \sigma_{22},\, \sigma_{23},\, \dots, \sigma_{2m}, \dots, \tag{4.39}$$

[1] Второй индекс в обозначении интегральной суммы совпадает с третьим индексом в обозначении произвольных чисел.

которую объединим с последовательностью (4.38).

Далее, последовательно уменьшая диаметр каждого следующего разбиения:

$$d_1 > d_2 > d_3 > \dots > d_r > \dots,$$

получим соответствующую этой цепочке разбиений бесконечную последовательность интегральных сумм, представляющую объединение последовательностей соответствующих интегральных сумм для построенных разбиений.

Используя данное построение, сформулируем следующее

Определение 4.2. *Определённым интегралом I от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке* $[a;\, b]$, называется *предел*

$$I = \lim_{\substack{r \to \infty \\ d_r \to 0}} \sum_{k=1}^{n_r} f(\alpha_{rkm})\Delta x_{rk},$$

не зависящий ни от выбора точек α_{rkm}, $(m = 1,\, 2,\, \dots)$ *внутри разбиений, ни от выбора самих разбиений* Π_r.

Как и в случае определения через приращение первообразной (см. определение 3.1), определённый интеграл на отрезке $[a;\, b]$ от функции $f(x)$ обозначается

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Можно доказать, что определения 3.1 и 4.2 эквивалентны, но это доказательство не входит в программу курса.

Задача 4.1. Используя определение 4.2, вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = 1$ на всём отрезке $[a;\, b]$, то из определения следует, что

$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{r \to \infty \\ d_r \to 0}} \sum_{k=1}^{n_r} \Delta x_{rk}.$$

В силу того, что при любом разбиении отрезка $[a;\, b]$

$$\sum_{k=1}^{n_r} \Delta x_{rk} = b - a,$$

получаем, что

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ d_r\to 0}} \sum_{k=1}^{n_r} \Delta x_{rk} = \lim_{\substack{r\to\infty\\ d_r\to 0}} (b-a) = b-a.$$

Таким образом, $\boxed{\int\limits_a^b dx = b-a}$.

Рассмотрим приложение метода интегральных сумм к выводу формулы величины начального вклада S_o, если регулярные выплаты по этому вкладу должны составлять $S(t)$ в год t в течение N лет.

Существует формула непрерывных процентов, которая позволяет определить величину вклада S_t через промежуток времени t при процентной ставке p, которая начисляется непрерывно.

Эта формула позволяет определить другую формулу

$$S_o = S_t e^{-\frac{pt}{100}}, \tag{4.40}$$

которая, в свою очередь, позволяет определить величину начального вклада S_o, если через t лет он должен стать равным S_t при непрерывной процентной ставке p.

Используем эту формулу в ситуации, когда регулярные выплаты по вкладу S_t проводятся ежегодно в течение N лет.

Определим разбиение промежутка N

$$\Pi_1 = \{0 = t_o,\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_k,\, t_{k+1},\, \ldots, t_{n-1},\, t_n = N\},$$

для которого

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \cdots = \Delta t_n = \Delta t = \frac{N}{n}.$$

Так как выплаты изменяются непрерывно, то за малый интервал времени они изменятся достаточно мало, следовательно, в течение этого интервала их можно принять за константу. Поэтому их величина за период $[t_{k-1};\, t_k]$ изменится на $S(t_k)\Delta t$.

А за время t_k уменьшенная за счёт процентной ставки величина вклада станет равной

$$S(t_k)\Delta t \cdot e^{-\frac{pt_k}{100}}.$$

Чтобы определить начальный вклад, просуммируем все изменения, составив интегральную сумму

$$S_o = S(t_1)e^{-\frac{pt_1}{100}}\Delta t + S(t_1)e^{-\frac{pt_1}{100}}\Delta t + \cdots + S(t_n)e^{-\frac{pt_n}{100}}\Delta t,$$

или в компактной форме[1]

[1]Здесь в качестве точек внутри интервалов были выбраны правые узлы образовавшихся интервалов

$$S_o = \sum_{k=1}^{n} S(t_k) e^{-\frac{pt_k}{100}} \Delta t.$$

Далее, выбирая новые разбиения с меньшим диаметром за счёт увеличения n, найдём предел при $n \to \infty$, который, согласно определению 4.2, есть не что иное, как определённый интеграл

$$S_o = \int_0^N S_t e^{-\frac{pt}{100}} dt. \tag{4.41}$$

В заключение рассмотрим задачу, связанную с полученной формулой.

Задача 4.2. Пусть функция $S(t) = 25t + 100$ описывает (в рублях) денежный поток непрерывной динамики доходов в течение четырёх лет. Полагая, что учётная ставка банка составляет 5%, определить начальную сумму S этого потока.

Решение. В условиях полученной формулы (4.41) имеем $N = 4$, $p = 5$. Следовательно, $\dfrac{p}{100} = 0,05$. Поэтому,

$$S_o = \int_0^4 (25t + 100) e^{-0,05t}\, dt.$$

Далее остаётся с помощью интегрирования по частям под знаком определённого интеграла вычислить полученный интеграл.

$$\int_0^4 (25t + 100) e^{-0,05t}\, dt = \left| \begin{array}{l} u = 25t + 100,\ du = 25dt \\ \qquad dv = e^{-0,05t}\, dt \\ \qquad v = \int e^{-0,05t}\, dt = -20e^{-0,05t} \end{array} \right| =$$

$$= -20(25t + 100)e^{-0,05t}\Big|_0^4 - (-20) \cdot 25 \int_0^4 e^{-0,05t}\, dt =$$

$$= -4000 \cdot e^{-0,02} + 2000 + 500 \cdot \left(-20 \cdot e^{-0,05t}\Big|_0^4 \right) =$$

$$= -4000 \cdot e^{-0,02} + 2000 - 10000 \cdot e^{-0,02} + 10000 =$$

$$= 12000 - 14000 \cdot e^{-0,02} \approx 537,769.$$

(ведь по определению, если предел последовательности интегральных сумм существует, то он существует и при таком выборе).

В итоге получаем, что

$$\boxed{S_o \approx 537,77\ (\textit{рублей})}.$$