

РГР № 2
«Неопределенные и определенные интегралы»

Теоретические вопросы:

- 1) Неопределенный интеграл, его основные свойства.
- 2) Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
- 3) Понятие определенного интеграла, его основные свойства и геометрический смысл.
- 4) Замена переменной в неопределенном и определенном интегралах.
- 5) Интегрирование по частям в неопределенном и определенном интегралах.
- 6) Интегрирование рациональных функций.
- 7) Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
- 8) Интегрирование иррациональных выражений.
- 9) Вычисление площадей плоских фигур.
- 10) Вычисление длины кривой, объемов тел вращения.
- 11) Теорема о среднем, оценка определенного интеграла.

Теоретические упражнения:

- 1) Доказать, что если $f(x)$ - четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

- 2) Доказать, что для нечетной функции справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx \text{ и } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

- 3) Какой из интегралов больше

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx?$$

- 4) При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^n} dx$ выражается в элементарных функциях?

- 5) Оценить интеграл $J = \int_{-1}^1 \frac{5 dx}{8+x^3}$.

- 6) Найти точки экстремума функции $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt$.

Задания:

- 1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$; б) $\int \frac{2 dx}{8x+5}$; в) $\int_2^{10} \frac{4x+1}{\sqrt{x-1}} dx$;

г) $\int_0^{\pi/5} (3-x)\sin 5x dx$; д) $\int \frac{1+x^3}{x^3-8} dx$; е) $\int \operatorname{ctg} 7x dx$.

- 2) Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной $x = 0$, $y^2 = 3 + x$. Сделать чертеж.
- 3) Найти длину одной арки кривой $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$. Сделать чертеж.
- 4) Найти среднее значение функции $y = \cos^3 x$ на $[-\pi/2, 0]$.
- 5) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.