Лекции 15-16 представляют тему «Функции двух переменных»

Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$\boxed{\textbf{Alt}}$ $\boxed{\rightarrow}$

Бидерман В. И.

Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 15.

Функции двух переменных. Основные понятия

§ 15.1. Определение функции двух переменных

При определении функции одной переменной говорилось, что каждое изучаемое явление связано с тройкой элементов: причиной, следствием и правилом перехода от причины к следствию. При этом переход от причины к следствию фактически зависел от одной переменной, поэтому и множество X определялось как подмножество множества действительных чисел. На практике же изучение большинства явлений приводит к тому, что мы сталкиваемся, определяя причину с множеством факторов: так, например, состояние погоды зависит не только от температуры, но и от влажности воздуха, от скорости ветра, а также многих других параметров. А спрос на товар в экономике определяется не только ценой, но и доходами потребителя, ценами взаимозаменяемых[1] товаров, расходами на рекламу и так далее.

Поэтому естественно рассматривать в качестве области определения множество нескольких переменных. Выберем число этих переменных равным 2, рассматривая в качестве множества X подмножество множества упорядоченных пар действительных чисел, которое будем обозначать, как правило, либо $X = \{(x, y)\}$, либо $X = \{(x_1, x_2)\}$. В качестве второго множества выберем подмножество действительных чисел, которое в зависимости от обозначения элементов первого множества будем обозначать через $Z = \{z\}$ или $Y = \{y\}$.

Если отвлечься от природы множества X, а каждую его пару обозначать как один элемент (во втором случае это выглядит более естественно: $x = (x_1, x_2)$, то определение функции двух переменных совпадает с определением (**??**):

Определение 15.1. Отображение из множества X во множество Y, при котором по некоторому правилу f каждому элементу $(x_1, x_2) \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией двух переменных.*

Обозначение функции. Как и в случае функции одной переменной функция двух переменных будет обозначаться либо равенствами $z = f(x, y)$, $y = f(x_1, x_2)$, либо как $f(x, y)$ с указанием аргументов.

[1] Под взаимозаменяемыми товарами понимаются товары, которые с точки зрения потребителя служат одним и тем же целям (например, компьютеры одной производительности, но разных производителей).

Также, как и в случае функции одной переменной, можно дать

Определение 15.2. Множество X называется *областью определения функции* в том смысле, что для всех пар чисел $(x_1,\, x_2) \in X$ имеют смысл значения $f(x_1,\, x_2)$. При этом сохраняется обозначение D_f. Множество $Y = \{y :\in \mathbb{R}\, y = f(x_1,\, x_2)\}$ называется *множеством значений функции* и обозначается E_f.

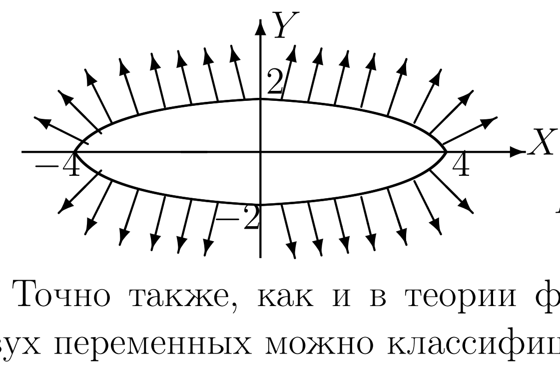
Но если в случае функции одной переменной область определения можно задать как интервал или отрезок прямой, не прибегая к графическому изображению, то в случае функции двух переменных наглядное изображение области определения играет большую роль.

Задача 15.1. Построить области определения функций $z = \ln(x^2 + 4y^2 - 16)$ и $z = \sqrt{2 - |x| - |y|}$.

Решение.

1. Область определения функции $z = \ln(x^2 + 4y^2 - 16)$ определяется неравенством $x^2 + 4y^2 - 16 > 0$. Чтобы определить соответствующее ему множество точек координатной плоскости надо построить соответствующее ему уравнение $x^2 + 4y^2 = 16$, которое определяет эллипс с полуосями 4 и 2 и центром в начале координат (см. рисунок ниже). При этом точки, входящие в область определения располагаются снаружи эллипса[1].

2. Область определения функции $z = \sqrt{2 - |x| - |y|}$ задаётся неравенством $2 - |x| - |y| \geq 0$ или $|x| + |y| \leq 2$. Соответствующее уравнение границы имеет вид $|x| + |y| = 2$ и определяет ромб (см. рисунок ниже). Так как точка $(0; 0)$ удовлетворяет данному неравенству, то точки области лежат вместе с ней внутри ромба.



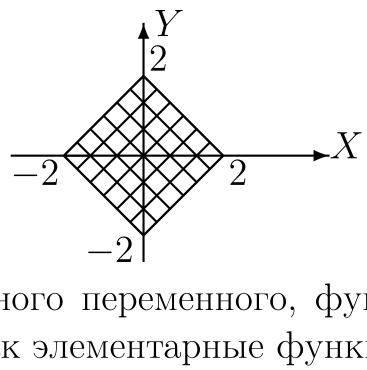


Рис. 15.1

Точно также, как и в теории функции одного переменного, функции двух переменных можно классифицировать как элементарные функции:

1. *Степенные*, среди которых чаще всего встречаются *линейные* $y = ax_1 + bx_2 + c$ и *квадратичные* $y = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.
2. *Логарифмические* $y = a\ln(x_1 - c_1) + b\ln(x_2 - c_2)$.
3. *Показательные* $y = ae^{bx_1 + cx_2}$.

Задача 15.2. Вычислить значение функции $z = x^2 + y^2$ в точке $A(-2;\, 3)$.

[1]Это можно определить с помощью такого индикатора, как точка $(0; 0)$: если она удовлетворяет неравенству, то она и точки области лежат по одну сторону границы. В нашем случае $0^2 + 4 \cdot 0y^2 - 16 = -16 < 0$, поэтому область лежит с внешней стороны эллипса (а точка $(0; 0)$ – с внутренней

Решение.

$$z(-2;3) = (-2)^2 + 3^2 \to z(-2;3) = 13.$$

С точки зрения геометрии каждой паре чисел $(x;y) \in D_f$ соответствует точка на координатной плоскости, имеющая аналогичные координаты. В силу того, что функция $f(x;y)$ отображает эту пару в $z = (x;y) \in E_f$, то соответствующей точке на координатной плоскости можно поставить в соответствие точку из трёхмерного пространства $OXYZ$, имеющую в этом пространстве координаты $(x;y;f(x;y))$. Исходя из этого соответствия можно дать следующее

Определение 15.3. *Графиком функции двух переменных $z = f(x;y)$ в декартовой системе координат $OXYZ$* называется *поверхность, множество точек $(x;y;z)$ которой удовлетворяет определению функции.* Так, например, графиками функций $z = 1 - x - y$ и $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ являются соответственно *плоскость* и *полусфера*, изображённые ниже:

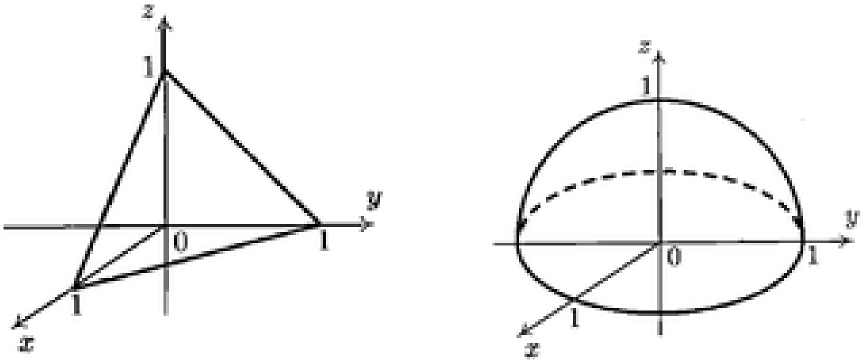


Рис. 15.2

Так как геометрическое изображение функций двух переменных является достаточно сложным процессом, требующим навыков в черчении и начертательной геометрии, то на практике достаточно часто используют изображение исследуемых функций с помощью *линий уровня.*

Определение 15.4. Множество точек координатной плоскости XOY, удовлетворяющих равенству $f(x;y) = C$, где C – произвольная константа, называется *линией уровня функции $z = f(x;y)$*.

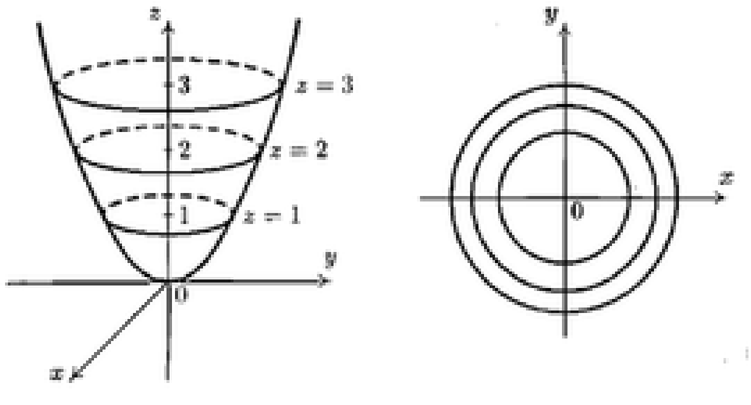


Рис. 15.3

Так в задаче оптимального распределения ресурсов изучение связи между функцией выпуска $z = a_o xy^2$ и линейной функцией затрат $z = P_1 x + P_2 y$ в точке $A\,(x_o; y_o)$ оптимального определения ресурсов связано с касанием линий уровня $a_o xy^2 = C_1$ $P_1 x + P_2 y = C_2$ соответствующих функций:

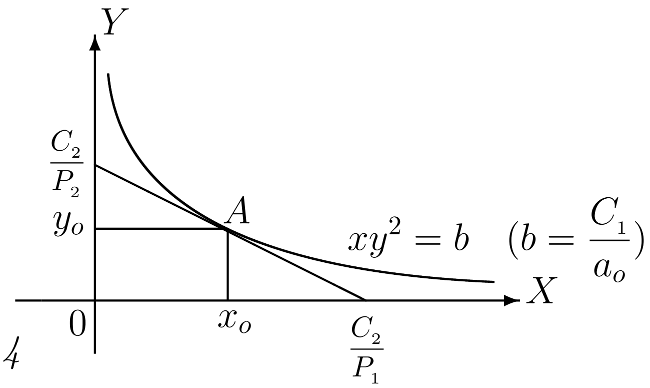


Рис. 15.4

Сформулируем следующие определения, которые позволят показать аналогию на основании общего свойства между функциями одной и двух переменных.

Определение 15.5. Функция $f(x; y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_o; y_o)$ *из области её определения, если бесконечно малому приращению её аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции*, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(f(x_o + \Delta x,\, y_o + \Delta y) - f(x_o;\, y_o)\right) = 0.$$

Определение 15.6. Функция, непрерывная в каждой точке множества, называется *непрерывной на этом множестве.*

Определение 15.7. Точка называется *внутренней точкой множества*, если она принадлежит множеству с некоторой своей окрестностью. Множество внутренних точек множества называется *открытой областью.*

Определение 15.8. Точка называется *граничной точкой множества*, если любая её окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству, так и точки ему не принадлежащие. Множество граничных точек заданного множества называется *границей множества.*

Определение 15.9. Объединение открытой области и границы множества называется *замкнутой областью.*

Определение 15.10. Область называется *связной*, если любые две различные её точки можно соединить линией, целиком лежащей в данной области.

Определение 15.11. Область называется *ограниченной*, если существуют круг или прямоугольник, целиком содержащие данную область.

Теорема 15.1. Теорема Больцано-Коши *Если функция $f(x;\, y)$, непрерывная в замкнутой и связной области, принимает в двух точках* *области значения разных знаков, то внутри области существует точка, в которой функция обращается в нуль.*

Теорема 15.2. Первая теорема Вейерштрасса *Если функция $f(x;\, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она является ограниченной, то есть существуют числа m и M такие, что*

$$\forall\ (x;\, y) \in D\ \ m \le f(x;\, y) \le M.$$

Теорема 15.3. Вторая теорема Вейерштрасса *Если функция $f(x;\, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она достигает в этой области свои наибольшее и наименьшее значения.*

§ 15.2. Частные производные первого порядка функции двух переменных

Рассмотрим в области D_f точку с координатами $(x_o;\, y_o)$. Далее зафиксируем координату y_o, сделав её неподвижной и начнём изменять первую координату x, превратив в окрестности точки y_o функцию $f(x; y)$ в функцию одной переменной $z = f(x; y_o)$. Её графиком является линия пересечения поверхности $z = f(x; y)$ и плоскости $y = y_o$.

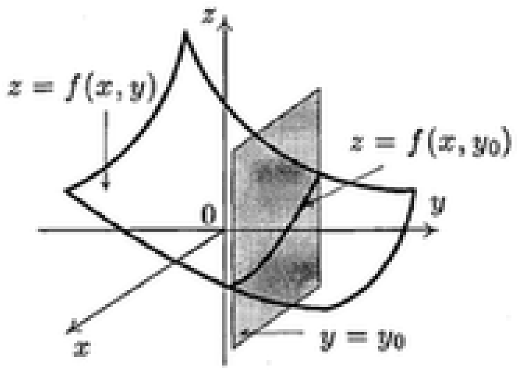


Рис. 15.5

Для этой функции можно рассмотреть вопрос о вычислении её производной в точке $x = x_o$. Если прибавить к x_o некоторое приращение Δx, тогда функция $z = f(x; y_o)$ получит приращение

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_o; y_o) = f(x_o + \Delta x;\, y_o) - f(x_o;\, y_o),$$

которое называется *частным приращением функции $f(x; y)$ по x*, так как оно вызвано приращением только одной переменной. С помощью этого приращения можно дать следующее

Определение 15.12. *Частной производной функции $f(x; y)$ по направлению x в точке $(x_o;\, y_o)$ называется предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x;\, y_o) - f(x_o;\, y_o)}{\Delta x}.$$

Обозначения частной производной по x. Частная производная по x может обозначаться следующим образом[1]:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial x},\ z_x',\ f_x'(x_o;\, y_o). \tag{15.1}$$

С точки зрения геометрии частная производная $\dfrac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial x}$ определяет тангенс угла наклона касательной к кривой $z = f(x;\, y_o)$ в точке $(x_o;\, y_o)$, то есть тангенсу угла наклона между касательной и линией параллельной оси OX:

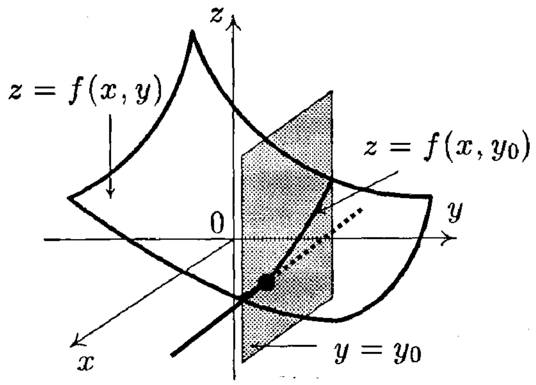


Рис. 15.6

То есть, частная производная по направлению x даёт возможность определить «крутизну» поверхности $z = f(x;\, y)$ в данной точке или скорость изменения функции по направлению параллельному оси OX.

Аналогично можно определить функцию одной переменной $z = f(x_o;\, y)$, зафиксировав первую координату точки $(x_o;\, y_o)$ и сделав подвижной её вторую координату.

Для этой функции также можно определить производную, если к значению y_o добавить некоторое приращение Δy. В этом случае функция $z = f(x_o;\, y)$ будет иметь приращение

$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_o; y_o) = f(x_o;\, y_o + \Delta y) - f(x_o;\, y_o),$$

которое называется *частным приращением функции $f(x; y)$ по y*. Это приращение позволяет дать

Определение 15.13. *Частной производной функции $f(x; y)$ по направлению y в точке $(x_o;\, y_o)$ называется предел*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o;\, y_o + \Delta y) - f(x_o;\, y_o)}{\Delta y}.$$

[1]Символ x внизу обозначения определяет только направление дифференцирования и не имеет никакого отношения к точке $(x_o;\, y_o)$, в которой находится производная.

Обозначения частной производной по y. Частная производная по y обозначается аналогично частной производной по x:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial y},\ z_y',\ f_y'(x_o;\, y_o). \tag{15.2}$$

Вычисляются частные производные первого порядка функции $f(x;\, y)$ точно также, как и производная функции одной переменной, с той лишь разницей, что постоянной величиной считаются не только числовые величины, но и та переменная, которая считается фиксированной. Аналогичным образом применимы арифметические свойства производных.

Рассмотрим несколько задач на вычисление частных производных первого порядка.

Задача 15.3. Найти частные производные функции $z = 4x^3+3x^2y+6y^2$ в точке $B(-1;\, 1)$.

Решение. Найдём сначала частные производные данной функции.

$$(4x^3+3x^2y+6y^2)_x' = 4\cdot(x^3)_x' + 3y\cdot(x^2)_x' + (6y^2)_x' = 4\cdot 3x^2 + 3y\cdot 2x + 0.$$

Выполнив алгебраические преобразования, получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 + 6xy.$

Аналогично, дифференцируем данную функцию по y:

$$(4x^3+3x^2y+6y^2)_y' = (4x^3)_y' + 3x^2\cdot(y)_y' + 6\cdot(y^2)_y' = 0 + 3x^2\cdot 1 + 6\cdot 2y.$$

После алгебраических преобразований имеем $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 12y.$

Теперь, точно так же, как и в задаче (15.2), вычислим значения найденных производных в указанной точке

$$\frac{\partial z(B)}{\partial x} = 12\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1)\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial z(B)}{\partial x} = 6.$$

$$\frac{\partial z(B)}{\partial y} = 3\cdot(-1)^2 + 12\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial z(B)}{\partial y} = 15.$$

В результате получаем $\boxed{\dfrac{\partial z(B)}{\partial x} = 6;\ \dfrac{\partial z(B)}{\partial y} = 15}$.

Задача 15.4. Найти частные производные функции $f(x;\, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}.$

Решение.

$$f_x' = \frac{1}{y}\cdot(x)_x' + y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow f_x' = \frac{1}{y}\cdot 1 + y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Приведя полученный результат к общему знаменателю, получим

$$f_x^{'}(x;\, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y}.$$

Так как данная функция симметрична относительно своих аргументов, то её частная производная по y может быть получена за счёт симметричной перестановки x и y в представлении $f_x^{'}(x;\, y)$:

$$f_y^{'}(x;\, y) = \frac{y^2 - x^2}{x y^2}.$$

Следовательно, $\boxed{f_x^{'}(x;\, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 y};\; f_y^{'}(x;\, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{x y^2}}$.

Задача 15.5. Найти частные производные функции $g(x;\, y) = \dfrac{3x - 2y}{4x + 5y}$.

Решение. Данная функция представляет частное двух функций $3x-2y$ и $4x+5y$, каждая из которых является функцией двух переменных. Поэтому её частные производные по каждой из переменных есть производные частного и вычисляются согласно свойству (**??**).

$$\left(\frac{3x - 2y}{4x + 5y}\right)_x^{'} = \frac{(3x - 2y)_x^{'}(4x + 5y) - (3x - 2y)(4x + 5y)_x^{'}}{(4x + 5y)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (4x + 5y) - (3x - 2y) \cdot 4}{(4x + 5y)^2} = \frac{12x + 15y - 12x + 8y}{(4x + 5y)^2} = \frac{23y}{(4x + 5y)^2}.$$

$$\left(\frac{3x - 2y}{4x + 5y}\right)_y^{'} = \frac{(3x - 2y)_y^{'}(4x + 5y) - (3x - 2y)(4x + 5y)_y^{'}}{(4x + 5y)^2} =$$

$$= \frac{-2 \cdot (4x + 5y) - (3x - 2y) \cdot 5}{(4x + 5y)^2} = \frac{-8x - 10y - 15x + 10y}{(4x + 5y)^2} = -\frac{23x}{(4x + 5y)^2}.$$

В итоге $\boxed{g_x^{'}(x;\, y) = \dfrac{23y}{(4x + 5y)^2};\; g_y^{'}(x;\, y) = -\dfrac{23x}{(4x + 5y)^2}}$.

Задача 15.6. Найти частные производные функции $p(x;\, y) = \dfrac{6x - 5y^2}{y^2 + 4}$.

Решение. Функция $p(x;\, y)$ ведёт себя по-разному относительно своих аргументов. По отношению к переменной x она является линейной функцией, которую можно переписать в виде:

$$p(x;\, y) = \frac{6}{y^2 + 4}x - \frac{5y^2}{y^2 + 4}.$$

Поэтому её частная производная относительно x равна коэффициенту перед x:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{6}{y^2+4}.$$

Относительно переменной y её производная является производной частного точно так же, как и в предыдущей задаче.

$$\left(\frac{6x-5y^2}{y^2+4}\right)'_y=\frac{(6x-5y^2)'_y(y^2+4)-(6x-5y^2)(y^2+4)'_y}{(y^2+4)^2}=$$

$$=\frac{-10y\cdot(y^2+4)-(6x-5y^2)\cdot 2y}{(y^2+4)^2}=\frac{-10y^3-40y-12xy+10y^3}{(y^2+4)^2}=$$

$$=-\frac{4y(3x+10)}{(y^2+4)^2}.$$

Поэтому $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{6}{y^2+4};\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{4y(3x+10)}{(y^2+4)^2}}$.

Задача 15.7. Найти частные производные функции $\varphi(x;\,y)=x^y$.

Решение. В зависимости от того, в направлении какой переменной совершается дифференцирование, функция $\varphi(x;\,y)=x^y$ оказывается в разных классах элементарных функций. Так, если мы зафиксируем y, чтобы продифференцировать её по x, функция будет вести себя как степенная, а её производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yx^{y-1}$.

Если же сделать неподвижной первую координату x, то функция превратится в показательную. А значит её производная $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^y\ln x$.

Таким образом, общий результат $\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yx^{y-1};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^y\ln x}$.

Функция из следующей задачи является сложной функцией, но её собственные свойства помогают «обмануть » процесс дифференцирования.

Задача 15.8. Найти частные производные функции $q(x;\,y)=\ln\frac{8x^3}{\sqrt[6]{y^5}}$.

Решение. Прежде, чем дифференцировать эту функцию, преобразуем её, используя свойства логарифмической функции[1] из курса школьной алгебры,

$$\ln\frac{8x^3}{\sqrt[6]{y^5}}=\ln 8+3\ln x-\frac{5}{6}\ln y.$$

[1] $\forall\ a>0,\ b>0\ \ \ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b;\ \ \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b;\ \ \ln a^k=k\cdot\ln a.$

В результате преобразования процесс вычисления частных производных превратился в устную задачу.

$$\left(\ln\frac{8x^3}{\sqrt[6]{y^5}}\right)'_x = (\ln 8 + 3\ln x - \frac{5}{6}\ln y)'_x = 3\cdot(\ln x)'_x = 3\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

$$\left(\ln\frac{8x^3}{\sqrt[6]{y^5}}\right)'_y = (\ln 8 + 3\ln x - \frac{5}{6}\ln y)'_y = -\frac{5}{6}\cdot(\ln y)'_y = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{y} = -\frac{5}{6y}.$$

В итоге имеем $\boxed{q'_x = \frac{3}{x};\ q'_y = -\frac{5}{6y}}$.

15.2.1. Понятие о дифференцировании сложной функции двух переменных

Вычисление частных производных сложной функции двух переменных происходит по алгоритму, представленному в теореме о производной сложной функции одной переменной.

Задача 15.9. Найти частные производные функции

$$f(x;\, y) = (3x^2 + 4y^3)^4.$$

Решение. Взяв производную от четвёртой степени, умножаем её на частную производную от содержимого скобки по переменной x, считая переменную y постоянной:

$$\left((3x^2+4y^3)^4\right)'_x = 4(3x^2+4y^3)^3\cdot(3x^2+4y^3)'_x =$$

$$= 4(3x^2+4y^3)^3\cdot(3\cdot 2x+0) = 12x(3x^2+4y^3)^3.$$

Обратите внимание, что на первом этапе, когда берётся производная от внешней функции, не играет никакой роли, по какой именно переменной берётся эта производная. Поэтому, определяя частную производную по y от данной функции, первый её сомножитель можно переписать из уже найденной частной производной по направлению x.

$$\left((3x^2+4y^3)^4\right)'_y = 4(3x^2+4y^3)^3\cdot(3x^2+4y^3)'_y =$$

$$= 4(3x^2+4y^3)^3\cdot(0+4\cdot 3y^2) = 48y^2(3x^2+4y^3)^3.$$

В результате получаем, что $\boxed{f'_x = 12x(3x^2+4y^3)^3;\ f'_y = 48y^2(3x^2+4y^3)^3}$.

Задача 15.10. Найти частные производные функции

$$g(x;\, y) = \ln(3x+4y).$$

Решение.

$$(\ln(3x+4y))'_x = \frac{1}{3x+4y} \cdot (3x+4y)'_x = \frac{1}{3x+4y} \cdot 3 = \frac{3}{3x+4y}.$$

$$(\ln(3x+4y))'_y = \frac{1}{3x+4y} \cdot (3x+4y)'_y = \frac{1}{3x+4y} \cdot 4 = \frac{4}{3x+4y}.$$

Таким образом, $\boxed{\dfrac{\partial g(x;\,y)}{\partial x} = \dfrac{3}{3x+4y};\ \dfrac{\partial g(x;\,y)}{\partial y} = \dfrac{4}{3x+4y}}$.

Задача 15.11. Найти частные производные функции $\psi(x;\,y) = e^{\frac{x}{y}}$.

Решение.

$$\left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x)'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

Следовательно, $\boxed{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{1}{y} e^{\frac{x}{y}};\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}}$.

В заключение вопроса об определении частных производных рассмотрим один из фрагментов их применения в экономике.

Допустим, что спрос Q на некотороый товар зависит только от цены товара P и доходов потребителей Y. Тогда при изучении изменения спроса изучается влияние на него изменения цены и доходов потребителей. В качестве характеристик изменения исследуются *эластичность спроса от цены* E_P и *эластичность спроса от доходов* E_Y, определяемые как

$$E_P = \frac{\text{Процентное изменение спроса}}{\text{Процентное изменение цены}};\ E_Y = \frac{\text{Процентное изменение спроса}}{\text{Процентное изменение доходов}}.$$

Согласно определению, каждая из них определяется следующим образом[1]:

$$E_P = -\frac{\dfrac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\%}{\dfrac{\Delta P}{P} \cdot 100\%};\ E_Y = -\frac{\dfrac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\%}{\dfrac{\Delta Y}{Y} \cdot 100\%}.$$

Используя предельный переход по соответствующей переменной в каждом случае получаем, что

$$E_P = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P};\ E_Y = -\frac{Y}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial Y}.$$

[1]Знак «минус» используется для того. чтобы соответствующий коэффициент был положительным.

15.2.2. Понятие полного дифференциала первого порядка функции двух переменных

При исследовании приращения функции одной переменной в точке было введено понятие дифференциала (см. (**??**). Аналогично при изучении полного приращения функции в точке можно ввести понятие её полного дифференциала первого порядка, которое играет большую роль, как в теории, так и в практике.

Определение 15.14. *Полным дифференциалом первого порядка функции* $z = f(x;\, y)$ *в точке* $(x_o;\, y_o) \in D_f$ называется *линейная часть полного приращения функции в данной точке.* То есть, если полное приращение функции в данной точке

$$\Delta f(x_o;\, y_o) = f(x_o + \Delta x;\, y_o + \Delta y) - f(x_o;\, y_o),$$

то его линейная часть имеет следующий вид:

$$\Delta f(x_o;\, y_o) \approx \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial y}\Delta y.$$

Обозначается полный дифференциал первого порядка так:

$$df((x_o;\, y_o) = \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial y}\Delta y, \tag{15.3}$$

а **формула вычисления полного дифференциала** так:

$$df((x_o;\, y_o) = \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_o;\, y_o)}{\partial y}dy. \tag{15.4}$$

Если функция $z = f(x;\, y)$ дифференцируема во всей области определения, то формула полного дифференциала имеет вид

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{15.5}$$

При этом следует обратить внимание, что x и y в обозначении частных производных не зависят от x и y в обозначениях дифференциалов аргументов.

Задача 15.12. Найти полный дифференциал первого порядка функции $z = x^3y^2$ в точке $A(2; -3)$.

Решение. Найдём частные производные данной функции

$$\left(x^3y^2\right)'_x = 3x^2y^2;\;\; \left(x^3y^2\right)'_y = 2x^3y.$$

Следовательно, полный дифференциал данной функции имеет вид:

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy.$$

Далее, вычислим значения частных производных в заданной точке:

$$z_x^{'}(2;-3) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-3)^2 \Rightarrow z_x^{'}(2;-3) = 108.$$

$$z_y^{'}(2;-3) = 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) \Rightarrow z_x^{'}(2;-3) = -48.$$

Подставляя вычисленные значения частных производных в формулу дифференциала, получим $\boxed{dz(2;-3) = 108dx - 48dy}$.

Рассмотрим одно из приложений полного дифференциала первого порядка в задачах экономики.

При описании поведения потребителей при покупке товара в зависимости от его количества вводят в качестве показателя коэффициент U, который называется *полезностью*. Например, если при наличии двух товаров G_1 и G_2 потребитель выбирает их в количестве x_1 и x_2 соответственно, то полезность представляется в виде некоторой функции

$$U = U(x_1;\, x_2).$$

В исследованиях предполагается, что полезность как функция в данном случае двух переменных есть функция дифференцируемая. При этом характеристиками её изменения по каждому виду товаров являются *предельные полезности*, которые определяются как частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}U(x_1;\, x_2);\;\; \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}U(x_1;\, x_2).$$

Если предположить, что x_1 и x_2 меняются незначительно, то полное изменение полезности приближённо определяется полным дифференциалом первого порядка:

$$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\Delta x_2.$$

Задача 15.13. Полезность задана функцией $U(x_1;\, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}$. Вычислить приближённо полное изменение полезности, если x_1 увеличивается от 100 до 101, а x_2 увеличивается с 50 до 52.

Решение. Найдём частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{2}{3}x_1^{-\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}};\;\; \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{3}x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}}.$$

Подставим численные значения $x_1 = 100$ и $x_2 = 50$ в представления частных производных:

$$\frac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_1} = \frac{2}{3} 100^{-\frac{1}{3}} 50^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}.$$

То есть, $\dfrac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_1} \approx 0,529.$

$$\frac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_2} = \frac{1}{3} 100^{\frac{2}{3}} 50^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial U(100;\, 50)}{\partial x_2} \approx 0,529.$

Приращения независимых переменных составляют

$$\Delta x_1 = 101 - 100, \text{ то есть } \Delta x_1 = 1; \;\; \Delta x_2 = 52 - 50, \text{ то есть } \Delta x_2 = 2.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta U(100;\, 50) \approx 0,529 \cdot 1 + 0,529 \cdot 2 \Rightarrow \Delta U(100;\, 50) \approx 1,59.$$

$\boxed{\text{Полное изменение полезности приблизительно равно 1,59.}}$

15.2.3. Понятие градиента функции двух переменных

В дальнейшем при изучении курса математики происходит встреча с методами математического программирования, в которых встречается понятие градиента.

Определение 15.15. *Градиентом функции двух переменных $z = f(x;\, y)$ называется вектор в координатной плоскости, в направлении которого функция изменяется наибольшим образом. Координатами вектора являются частные производные функции и обозначается он следующим образом:*

$$grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}. \qquad (15.6)$$

Задача 15.14. Найти градиент функции $z = 4x^2 + 9y^2$ и его величину в точке $M(2; 1)$.

Решение. Найдём частные значения функции и вычислим их значения в данной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x \Rightarrow \frac{\partial z(2; 1)}{\partial x} = 16.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 18y \Rightarrow \frac{\partial z(2; 1)}{\partial y} = 18.$$

Подставляя найденные значения в формулу градиента (15.6), получаем

$$grad\, f\Big|_M = 16\vec{i} + 18\vec{j}.$$

С помощью определения (**??**) найдём величину градиента в данной точке

$$|grad\, f|\Big|_M = \sqrt{16^2 + 18^2} \Rightarrow |grad\, f|\Big|_M = \sqrt{580}.$$

В итоге, получаем $\boxed{grad\, f\Big|_M = 16\vec{i} + 18\vec{j};\ |grad\, f|\Big|_M \approx 24}$.

ЛЕКЦИЯ 16.

§ 16.1. Частные производные второго порядка функции двух переменных

Предположим, что функция $z = f(x;\, y)$ имеет частные производные первого порядка
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{'}(x;\, y) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = f_y^{'}(x;\, y),$$
которые, в свою очередь сами являются функциями двух переменных. Для этих функций при определённых условиях могут существовать свои частные производные по x и y, которые для данной функции $f(x;\, y)$ являются *частными производными второго порядка*:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}^{''}(x;\, y) \tag{16.7}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}^{''}(x;\, y) \tag{16.8}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}^{''}(x;\, y) \tag{16.9}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}^{''}(x;\, y) \tag{16.10}$$
Частные производные второго порядка, полученные при последовательном дифференцировании по разным направлениям (16.8)-(16.9), называются *смешанными вторыми производными.*

Для смешанных производных справедлива

Теорема 16.1. О смешанных производных *Если функция $f(x;\, y)$ в некоторой точке $(x_o;\, y_o)$ из области определения D_f имеет непрерывные смешанные производные, тогда имеет место равенство*
$$f_{xy}^{''}(x_o;\, y_o) = f_{yx}^{''}(x_o;\, y_o).$$

В условиях теоремы уменьшается обём вычислений. Так как многочлен двух переменных является непрерывной функцией в области определения, то и его частные производные удовлетворяют условию непрерывности в каждой точке из области определения. Поэтому процесс вычисления его частных производных второго порядка уменьшается на одну операцию.

Задача 16.1. Найти частные производные второго порядка для функции

$$z = x^4 - 2x^3y^2 + 6xy^3 - 5x + 8y - 2$$
и вычислить их значения в точке $M(2; -1)$.

Решение. Найдём сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 6x^2y^2 + 6y^3 - 5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x^3y + 18xy^2 + 8.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, то

$$(4x^3 - 6x^2y^2 + 6y^3 - 5)'_x = 12x^2 - 12xy^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 12xy^2.$$

Далее, чтобы найти смешанные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, продифференцируем ту же частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ по переменной y:

$$(4x^3 - 6x^2y^2 + 6y^3 - 5)'_y = -12x^2y + 18y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12x^2y + 18y^2.$$

В силу того, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ определяется аналогично второй производной по x, имеем

$$(-4x^3y + 18xy^2 + 8)'_y = -4x^3 + 36xy \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^3 + 36xy.$$

Чтобы уменьшить количество действий при вычислении значений найденных функций в точке, перепишем их в виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x(x - y^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y(3y - 2x^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x(9y - x^2).$$

$$\frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x^2} = 12 \cdot 2 \cdot (2 - (-1)^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x^2} = 24.$$

$$\frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x \partial y} = 66.$$

$$\frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial y^2} = 4 \cdot 2 \cdot (9 \cdot (-1) - 2^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial y^2} = -104.$$

В итоге получаем

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x(x - y^2); \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y(3y - 2x^2); \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x(9y - x^2). \\ \dfrac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x^2} = 24; \quad \dfrac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial x \partial y} = 66; \quad \dfrac{\partial^2 z(2;-1)}{\partial y^2} = -104 \end{array}}.$$

§ 16.2. Понятие экстремума функции двух переменных

Определение 16.1. *Окрестностью точки* $(x_o;\, y_o)$ называется *множество внутренних точек любого круга или прямоугольника, содержащих эту точку*[1]

Так же, как и в случае функции одной переменной, будем обозначать окрестность точки $U(x_o;\, y_o)$.

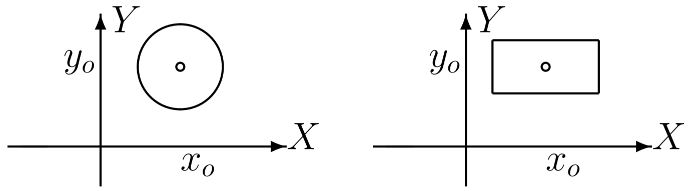


Рис. 16.1

Аналогично определениям (**??**) и (**??**) введём определения точек локального экстремума и самих локальных экстремумов функции двух переменных.

Предположим, что функция $f(x;\, y)$ определена в области D_f.

Определение 16.2. Точка $(x_o;\, y_o)$ из области определения D_f функции $f(x;\, y)$ называется *точкой локального минимума функции или точкой минимума функции*, если существует хотя бы одна окрестность точки $U(x_o;\, y_o)$ такая, что

$$\forall\ (x;\, y) \in U(x_o;\, y_o)\ f(x;\, y) \geq f(x_o;\, y_o).$$

Значение функции в точке локального минимума $f(x_o;\, y_o)$ называется *локальным минимумом функции.*

Определение 16.3. Точка $(x_o;\, y_o)$ из области определения D_f функции $f(x;\, y)$ называется *точкой локального максимума функции или точкой максимума функции*, если существует хотя бы одна окрестность точки $U(x_o;\, y_o)$ такая, что

$$\forall\ (x;\, y) \in U(x_o;\, y_o)\ f(x;\, y) \leq f(x_o;\, y_o).$$

Значение функции в точке локального максимума $f(x_o;\, y_o)$ называется *локальным максимумом функции.*

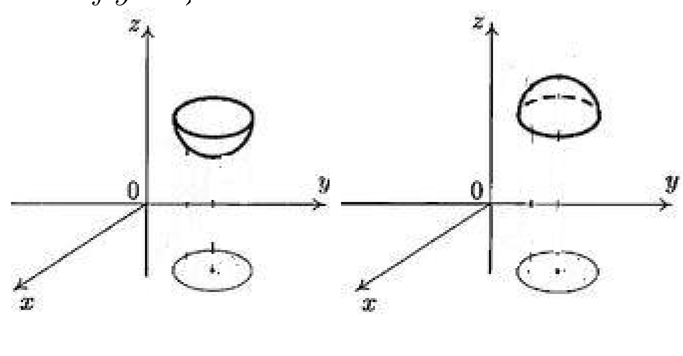


Рис. 16.2

[1] В том случае, когда точка не принадлежит своей окрестности, окрестность называется *выколотой.*

Как и в случае функции одной переменной, имеется аналог теоремы Ферма́:

Теорема 16.2. Необходимые условия локального экстремума

Если дифференцируемая функция $f(x;\,y)$ *имеет в точке* $(x_o;\,y_o)$ *экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю.*

Точно так же, как и при определении частной производной по x (см. 15.12), зафиксируем направление $y = y_o$. Функция $z = f(x;\,y)$ вдоль этого направления обратится в функцию одной переменной $z = f(x;\,y_o)$, имеющую экстремум в точке $(x_o;\,y_o)$. Согласно теореме Ферма́ производная $\dfrac{df(x_o;\,y_o)}{dx} = 0$. Но так как $\dfrac{\partial f(x_o;\,y_o)}{\partial x} = \dfrac{df(x_o;\,y_o)}{dx}$, то $\dfrac{\partial f(x_o;\,y_o)}{\partial x} = 0$. Аналогично доказывается, что и $\dfrac{\partial f(x_o;\,y_o)}{\partial y} = 0$.

Как и в случае функции одной переменной имеет место

Определение 16.4. *Точки* $(x_o;\,y_o)$ *из области определения фунции* $f(x;\,y)$*, координаты которых удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x;\,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x;\,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{16.11}$$

называются *стационарными точками.*

Как и в случае функции одной переменной информация о стационарных точек функции не позволяет утверждать о наличии в этих точках экстремума. Поэтому нужны дополнительные условия, связанные со вторыми частными производными функции.

Предположим, что в области определения функция $f(x;\,y)$ является непрерывной вместе со своими частными производными первого и второго порядка. Допустим также, что $M(x_o;\,y_o)$ – является её стационарной точкой, в которой известны значения вторых частных производных данной функции:

$$\frac{\partial^2 f(x_o;\,y_o)}{\partial x^2} = A;\quad \frac{\partial^2 f(x_o;\,y_o)}{\partial x \partial y} = B;\quad \frac{\partial^2 f(x_o;\,y_o)}{\partial y^2} = C.$$

С учётом этих условий имеет место

Теорема 16.3. Достаточные условия локального экстремума

1) *Если*

$$B^2 - AC < 0, \tag{16.12}$$

то функция имеет в точке $M(x_o;\,y_o)$ *локальный экстремум, который является максимумом, если* $A < 0$ *и минимумом , если* $A > 0$.

2) *Если*

$$B^2 - AC > 0, \tag{16.13}$$

то функция не имеет экстремум в данной точке.

3) *Если*

$$B^2 - AC = 0, \tag{16.14}$$

то необходимы дальнейшие исследования с помощью частных производных более высоких порядков[1] .

Задача 16.2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x + 34y + 7.$$

Решение. Найдём частные производные первого порядка данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 2y - 10; \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 10y + 34.$$

Определим стационарные точки функции (16.4), приравняв найденные производные нулю.

$$\begin{cases} 6x + \ \ 2y - 10 = 0, \\ 2x + 10y + 34 = 0. \end{cases}$$

Так как все коэффициенты в каждом из полученных уравнений чётные, то разделим обе части каждого из уравнений на 2, а затем перенесём свободные члены в правую часть.

$$\begin{cases} 3x + \ \ y = \ \ \ 5, \\ \ \ x + 5y = -17. \end{cases}$$

Согласно методу Гаусса умножим первое уравнение на 5 и вычтем из полученного результата второе уравнение: $14x = 42$. Найденное значение $x = 3$ подставим в первое уравнение и вычислим значение $y = -4$. Полученное решение системы определяет стационарную точку данной функции $M(3; -4)$.

Далее найдём частные производные второго порядка заданной функции.

$$(6x + 2y - 10)'_x = 6 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6.$$

$$(6x + 2y - 10)'_y = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2.$$

$$(2x + 10y + 34)'_y = 10 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

[1]Доказательство теоремы не входит в программу данного курса. Для знакомства с ним нужно обратиться к литературе из библиографического списка, приведённого в конце лекций.

Так как все частные производные второго порядка являются постоянными, то во всех точках области определения, а следовательно и в стационарной,

$$A = 6;\ \ B = 2;\ \ C = 10.$$

Поэтому $B^2 - AC = 2^2 - 6 \cdot 10 < 0$. Что согласно условию (16.12) из теоремы (16.3) означает, что стационарная точка $M(3;\ -4)$ является точкой экстремума. А так как $A = 6 > 0$, то она является точкой локального минимума исследуемой функции.

Для того, чтобы найти локальный минимум функции, вычислим её значение в точке $M(3;\ -4)$:

$$z(3;\ -4) = 3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4)^2 - 10 \cdot 3 + 34 \cdot (-4) + 7 \Rightarrow z(3;\ -4) = -76.$$

Таким образом, $\boxed{z_{min}(3; -4) = -76}$.

Рассмотрим ещё одну задачу на экстремум, на сей раз в экономических терминах. Введём обозначения, которые нам понадобятся для формулировки задачи:
K – капитальные вложения;
L – затраты труда;
Y – объём выпускаемой продукции;
$Y = F(L,\ K)$ – производственная функция, описывающая связь между используемыми ресурсами (факторами производства) и объёмом выпускаемой продукции;
P – цена продукции;
T_L – цена на затраты труда;
T_K – цена на капитальные вложения.

Обозначим функцию прибыли, получаемой в рамках производственного процесса как разность между полученным доходом и вложенными затратами:

$$S(L,\ K) = PF(L,\ K) - T_L L - T_K K.$$

В том случае, когда в стационарной точке $(L_o,\ K_o)$ прибыль имеет максимальное значение, стационарная точка называется *оптимальным планом.*

Задача 16.3. Задана производственная функция $Y = 2L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$. Полагая цену продукции $P = 1$, доказать, что функция прибыли

$$S(L,\ K) = 2L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} - T_L L - T_K K.$$

имеет максимум. Найти оптимальный план и максимальное значение функции прибыли.

Решение. Найдём частные производные данной функции по переменным L и K:

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{2}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - T_L; \quad \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}} - T_K.$$

Приравняв частные производные нулю, составим и решим систему уравнений, определяющую стационарную точку.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - T_L = 0; \\ \frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}} - T_K = 0. \end{cases}$$

Переписав систему в виде

$$\begin{cases} L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}T_L; \\ L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}T_K, \end{cases}$$

перемножим соответственно левые и правые части уравнений

$$L^{-\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}T_L T_K.$$

Затем умножим полученное равенство таким же образом на первое уравнение последней системы

$$L^{-1} = \frac{27}{8}T_L^2 T_K$$

и найдём

$$L_o = \frac{8}{27T_L^2 T_K}.$$

В силу симметрии независимых переменных в задании функции прибыли вторая координата стационарной точки

$$K_o = \frac{8}{27T_L T_K^2}.$$

Таким образом, стационарная точка $\left(\frac{8}{27T_L^2 T_K}; \frac{8}{27T_L T_K^2}\right)$ найдена.

Надо доказать, что она является точкой максимума заданной функции. Определим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 S}{\partial L^2} = -\frac{4}{9}\frac{K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{5}{3}}}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial L \partial K} = \frac{2}{9}\frac{K^{-\frac{2}{3}}}{L^{-\frac{2}{3}}}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial K^2} = -\frac{4}{9}\frac{L^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{5}{3}}}.$$

Далее, попробуем вычислить знак выражения[1]

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial L \partial K}\right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial K^2} = \left(\frac{2}{9}\frac{K^{-\frac{2}{3}}}{L^{-\frac{2}{3}}}\right) - \left(-\frac{4}{9}\frac{K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{5}{3}}}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\frac{L^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{4}{81}\frac{K^{-\frac{4}{3}}}{L^{-\frac{4}{3}}} - \frac{16}{81}\frac{K^{-\frac{4}{3}}}{L^{-\frac{4}{3}}} = -\frac{4}{27}\frac{K^{-\frac{4}{3}}}{L^{-\frac{4}{3}}}.$$

Так как данное выражение является отрицательным для любых L и K, то, естественно оно является отрицательным и в стационарной точке. Поэтому эта точка является точкой экстремума. А так как $\frac{\partial^2 S}{\partial L^2} = -\frac{4}{9}\frac{K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{5}{3}}} < 0$, то точкой максимума, а значит и оптимальным планом. Осталось только вычислить значение функции прибыли в этой точке:

$$S_{max}(L_o,\, K_o) = \frac{8}{27T_LT_K}.$$

В результате вычислений имеем

$$\boxed{\text{Оптимальный план } \left(\frac{8}{27T_L^2T_K};\ \frac{8}{27T_LT_K^2}\right);\ S_{max} = \frac{8}{27T_LT_K}}.$$

§ 16.3. Задача о наименьшем и наибольшем значениях непрерывной функции двух переменных в замкнутой области

Точно так же, как и в случае функции одной переменной (см. теорему **??**) для функции двух переменных имеет место

Теорема 16.4. Теорема о наибольшем и наименьшем значении функции двух переменных, непрерывной в ограниченной и замкнутой области *Функция $f(x;\, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает свои наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках области или на её границе.*

Доказательство теоремы, как и в случае функции одной переменной, опирается на теоремы Вейерштрасса (15.2-15.3) и условия локального экстремума (16.2-16.3).

Рассмотрим задачи, связанные с данной теоремой. Отдельные этапы их решения повторяют решение задач (**??**-**??**).

Задача 16.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x^2 - xy + y^2 - 2x - 3y + 8$$

[1]Конечно, согласно теореме (16.3) о достаточных условиях экстремума надо вначале найти значения частных производных второго порядка A, B, C в стационарной точке, а уж затем вычислять знак данного выражения в данной точке. Но в силу большого числа вычислений этот процесс можно поменять местами.

в области E, заданной системой неравенств $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 1, \\ x + y \geq 4. \end{cases}$

Решение.

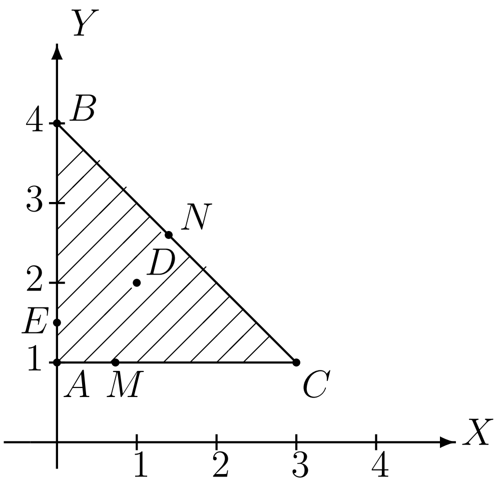


Рис. 16.3

Составим из неравенств, ограничивающих область, уравнения границ этой области

$$x = 0; \;\; y = 1; \;\; x + y = 4.$$

Построим в декартовой системе координат XOY линии, заданные этими уравнениями, и найдём точки их пересечения

$$A(0;\, 1); \;\; B(0;\, 4); \;\; C(3;\, 1).$$

Так как эти точки являются угловыми точками границы, вычислим значения данной функции в этих точках

$$z(A) = 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 8 \Rightarrow z(A) = 6.$$

$$z(B) = 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 4 + 4^2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 + 8 \Rightarrow z(B) = 12.$$

$$z(C) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 8 \Rightarrow z(C) = 15.$$

Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 2; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 3$$

и составим систему для поиска стационарных точек (16.11)

$$\begin{cases} 4x - y - 2 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Перенеся свободные члены в правую часть

$$\begin{cases} 4x - y = 2, \\ -x + 2y = 3, \end{cases}$$

найдём решение системы. Для этого умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым. $7x = 7 \Rightarrow x = 1$. Поэтому $y = 2$. Точка $D(1;\, 2)$ является стационарной точкой исследуемой функции. Отметив её в системе координат, убеждаемся, что она принадлежит заданной области. В силу этого, вычислим значение функции в этой точке

$$z(D) = 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 8 \Rightarrow z(D) = 4.$$

Рассмотрим поочерёдно поведение функции на границе области.
AB: $x = 0$. Следовательно, $z(0;\, y) = y^2 - 3y + 8$, $1 \le y \le 4$. Таким образом, нам нужно найти наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции одной переменной на отрезке. Следует учесть, что значения на концах данного отрезка уже найдены при исследовании угловых точек области. Поэтому нужно только выяснить имеет ли первая производная функции $z(0;\, y)$ стационарную точку, и если да, то принадлежит ли эта точка соответствующему интервалу.

$$z'(0;\, y) = 2y - 3 \Rightarrow 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1,5 \in (1;4).$$

А это означает, что точка $E(0;\, 1,5)$ лежит на границе AB.

$$z(E) = 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 1,5 + 1,5^2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1,5 + 8 \Rightarrow z(E) = 5,75.$$

Рассмотрим следующий отрезок границы (помня, что значения функции на его концах вычислены).
AC: $y = 1$. В этом случае $z(x;\, 1) = 2x^2 - 3x + 6$, $0 \le x \le 3$. Производная этой функции $z'(x;\, 1) = 4x - 3$.

Решим уравнение $4x - 3 = 0$. $x = 0,75 \in [0;3]$. Поэтому точка $M(0,75;\, 1)$ лежит на границе AC. Определим значение функции $z(x;\, y)$ в этой точке:

$$z(M) = 2 \cdot 0,75^2 - 0,75 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 0,75 - 3 \cdot 1 + 8 \Rightarrow z(M) = 4,875.$$

И, наконец, осталось выяснить, есть ли внутри отрезка BC стационарные точки, в которых может оказаться наибольшее или наименьшее значение исследуемой функции. BC: $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$, $0 \le x \le 3$. Подставив $y = 4 - x$ в уравнение заданной функции, мы вновь получим непрерывную функцию одной переменной, аргумент которой пробегает отрезок.

$$z(x;\, 4 - x) = 4x^2 - 11x + 12.$$

Определим стационарную точку производной данной функции.

$$z'(x; 4 - x) = 8x - 11 \Rightarrow 8x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1,375 \in [0;3].$$

Найдём значение $y(1,375) = 4 - 1,375x$. Следовательно, $y(1,375) = 2,625$. Точка $N(1,375;\, 2,625)$ – последняя из необходимых точек.

$$z(N) = 2{\cdot}1,375^2 - 1,375{\cdot}2,625 + 2,625^2 - 2{\cdot}1,375 - 3{\cdot}2,625 + 8 \Rightarrow z(N) = 4,4375.$$

Соберём всю найденную «коллекцию» точек вместе и определим в какой из них исследуемая функция достигает свои наибольшее и наименьшее значения.

$$z(A) = 6;\;\; z(B) = 12;\;\; z(C) = 15;\;\; z(D) = 4;\;\; z(E) = 5,75;$$

$$z(M) = 4,875;\ z(N) = 4,4375.$$

В результате выбора получаем, что

$$\boxed{\min_{(x;y)\in\Delta ABC} z(1;2) = 4; \quad \max_{(x;y)\in\Delta ABC} z(3;1) = 15}.$$

Задача 16.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + 3x^2 - (2x - 6)y + 2$$

в области E, заданной системой неравенств $\begin{cases} y \geq (x-1)^2, \\ y \leq 1. \end{cases}$

Решение. Найдём точки пересечения линий, ограничивающих область E, составив их уравнения и решив систему, образованную уравнениями, описывающими эти линии

$$\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 2.$$

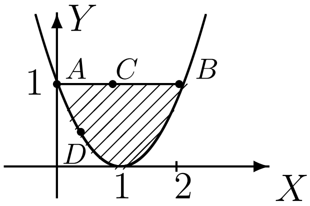


Рис. 16.4

Таким образом, область E имеет две угловые граничные точки $A(0;\ 1)$ и $B(2;\ 1)$. Найдем значения функции в этих точках: $z(A) = 8$; $z(B) = 24$. Определим стационарные точки исследуемой функции. Для этого найдём её частные производные.

$$z_x' = 3x^2 + 6x - 2y;\ \ z_y' = 6 - 2x.$$

Приравняв частные производные к нулю, составим систему уравнений для поиска стационарных точек.

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 2y = 0, \\ 6 - 2x = 0. \end{cases}$$

Из решения второго уравнения системы ($x = 3$) видно, что стационарная точка функции не принадлежит области E.

Учитывая, что $0 \leq x \leq 2$, подставим значение $y = 1$ верхней границы в уравнение функции и найдем стационарные точки функции

$$z_{\text{в}}(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 8,$$

внутри интервала $(0;\ 2)$ (помня, что значения в граничных точках отрезка нам известны).

$$z'_{\text{в}}(x) = 3x^2 + 6x - 2.$$

Составив уравнение $z'_{\text{в}}(x) = 0$, найдём его корни.

$$3x^2 + 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{15}+3}{3} \text{ или } x_2 = \frac{\sqrt{15}-3}{3}.$$

Так как $x_1 < 0$, то точка x_1 не не принадлежит исследуемому интервалу. Поэтому нас интересует значение заданной функции в точке $C\left(\frac{\sqrt{15}-3}{3}; 1\right)$: $z\left(\frac{\sqrt{15}-3}{3}; 1\right) = \frac{108-10\sqrt{15}}{9}$.

Аналогично подставим значение $y = (x-1)^2$ нижней границы в уравнение функции и вычислим координаты стационарных точек функции

$$z_{\text{н}}(x) = x^3 + 3x^2 + (6-2x)(x-1)^2 + 2,$$

лежащие на интервале $(0; 2)$.

$$z'_{\text{н}}(x) = -3x^2 + 26x - 14.$$

$$-(3x^2 - 26x + 14) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{13-\sqrt{127}}{3} \text{ или } x_2 = \frac{13+\sqrt{127}}{3}.$$

В силу того, что $x_2 > 2$, то точка x_2 не принадлежит исследуемому интервалу. Найдём значение координаты y, соответствующее стационарной точке x_1 функции $z_{\text{н}}(x)$: $y\left(\frac{13-\sqrt{127}}{3}\right) = \frac{227-20\sqrt{127}}{3}$. Далее, найдём значение исследуемой функции в точке $D\left(\frac{13-\sqrt{127}}{3}; \frac{227-20\sqrt{127}}{3}\right)$:

$$z\left(\frac{13-\sqrt{127}}{3}; \frac{227-20\sqrt{127}}{3}\right) = \frac{774\sqrt{127}-10820}{27}.$$

Таким образом, найдены значения исследуемой функции в четырёх точках области E:

$$z(A) = 8;\ z(B) = 24;\ z(C) = \frac{108-10\sqrt{15}}{9};\ z(D) = \frac{227-20\sqrt{127}}{3}.$$

Вычислим приближённые значения функции в точках C и D:

$$\frac{108-10\sqrt{15}}{9} \approx 7,70; \quad \frac{774\sqrt{127}-10820}{27} \approx 77,68.$$

Следовательно, наименьшее значение достигается функцией в точке C, а наибольшее – в точке D. Найдя, приближённые значения координат этих точек получим:

$$\boxed{\min_{(x;y)\in E} z(0,96;1) \approx 7,70;\ \ \max_{(x;y)\in E} z(0,58;0,54) \approx 77,68}.$$

В задачах изучения потребительского спроса одной из характеристик исследования является *функция полезности*. Рассмотрим задачу об отыскании её наибольшего значения в замкнутой области.

Задача 16.6. С помощью функции полезности

$$U(x;\,y) = x^{\frac{p}{p+q+1}} y^{\frac{q}{p+q+1}}$$

исследуется потребительский спрос на две разновидности товара при известном доходе потребителя M. Найти величины спроса x и y на разновидности товара, определяющие наибольшее значение функции полезности, если соответствующие цены на товар равны p и q.

Решение. Так как потребитель может покупать только наборы $(x;\,y)$, стоимость которых не может превышать его доход M, то множеством исследования является треугольник на плоскости XOY, заданный неравенствами

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ px + qy \leq M$$

(см. Рис. 16.5).

Найдём частные производные исследуемой функции

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{p}{p+q+1} x^{\frac{q+1}{p+q+1}} y^{\frac{q}{p+q+1}};\ \ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{q}{p+q+1} x^{\frac{p}{p+q+1}} y^{\frac{p+1}{p+q+1}}.$$

Определим её стационарные точки, составив систему однородных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{p}{p+q+1} x^{\frac{q+1}{p+q+1}} y^{\frac{q}{p+q+1}} = 0, \\ \dfrac{q}{p+q+1} x^{\frac{p}{p+q+1}} y^{\frac{p+1}{p+q+1}} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система не имеет решений. Поэтому функция полезности, не имея стационарных точек внутри области, наибольшее значение может достигнуть только на границе области.

Рассмотрим поочерёдно её значения на границах треугольника.
Если $x = 0$, то $U(0;\,y) = 0$. Аналогично, при $y = 0$ $U(x;\,0) = 0$. Таким образом, если наибольшее значение, отличное от нуля, существует, то его надо искать на отрезке прямой $px + qy = M$. Выразим y через x:
$y = \dfrac{M - px}{q}$ и при условии, что $0 \leq x \leq \dfrac{M}{p}$ найдём производную функции

одной переменной

$$U\left(x;\ \frac{M-px}{q}\right)=q^{-\frac{q}{p+q+1}}x^{\frac{p}{p+q+1}}(M-px)^{\frac{q}{p+q+1}}:$$

$$\frac{dU(x)}{dx}=q^{-\frac{q}{p+q+1}}\left(\frac{p}{p+q+1}x^{-\frac{q+1}{p+q+1}}(M-px)^{\frac{q}{p+q+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{q}{p+q+1}x^{\frac{p}{p+q+1}}(M-px)^{-\frac{p+1}{p+q+1}}\cdot(-p)\right).$$

Найдём стационарную точку полученной производной, составив уравнение

$$\frac{dU(x)}{dx}=0.$$

Так как $q^{-\frac{q}{p+q+1}}\neq 0$ и $\dfrac{p}{p+q+1}\neq 0$, то уравнение примет вид:

$$x^{-\frac{q+1}{p+q+1}}(M-px)^{\frac{q}{p+q+1}}-q\cdot x^{\frac{p}{p+q+1}}(M-px)^{-\frac{p+1}{p+q+1}}=0.$$

Умножив обе части уравнения на $x^{\frac{q+1}{p+q+1}}$ и $(M-px)^{\frac{p+1}{p+q+1}}$, получим уравнение

$$M-px=qx.$$

Из которого следует, что

$$x=\frac{M}{p+q}.$$

А так как $y=\dfrac{M-px}{q}$, то получаем, что $y=\dfrac{M}{p+q}$.

Так как $U\left(\dfrac{M}{p+q};\ \dfrac{M}{p+q}\right)>0$, то наибольшее значение функция полезности достигает когда $\boxed{x=y=\dfrac{M}{p+q}}$.

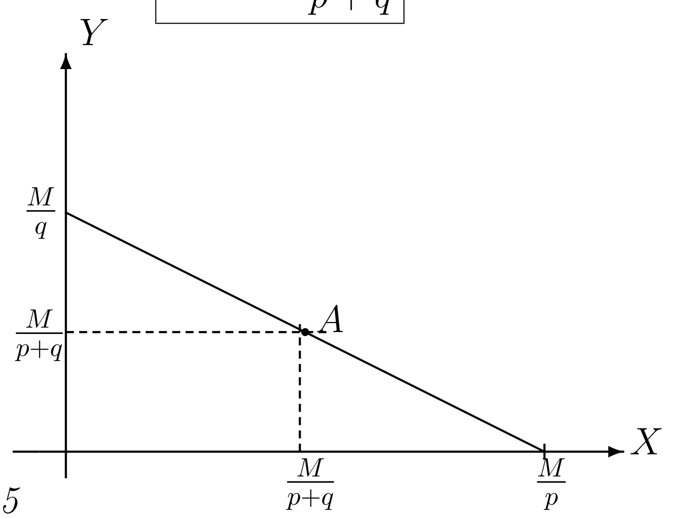


Рис. 16.5

§ 16.4. Понятие о методе наименьших квадратов

В восьмой лекции рассказывалось о классических способах задания функции. И если достаточно понятно, как от аналитического или графического способов задания функции перейти к табличному, выделив с этой целью интересующие значения аргумента, а затем вычислив или определив по графику соответствующие значения функции. То переход от табличного способа к аналитическому[1] вызывает проблемы.

Получив в ходе некоторого эксперимента массив данных, которые к тому же являются достаточно приблизительными в силу проблем, связанных с измерениями, исследователь процесса ставит цель определить, какая аналитическая зависимость может с бóльшей степенью точности описать наблюдаемую закономерность, так как напрямую воспользоваться результатами наблюдений невозможно. Во-первых, ни один эксперимент не может собрать всю информацию о процессе, а проводить новые эксперименты для получения дополнительной информации достаточно дорого. Во-вторых, в эпоху обработки численных экспериментов на компьютере желательно вводить в компьютер формулу аналитической зависимости, а не набор дискретных данных.

Далее становится понятным, что через массив полученных в ходе эксперимента и перенесённых на систему координат точек можно провести множество различных кривых. Поэтому возникает вопрос, что означает фраза *с бóльшей степенью точности описать наблюдаемую закономерность*?

Предположим, что есть некоторая функция $y = f(x)$, являющаяся точным описанием наблюдаемого процесса, которую можно представить следующим графиком.

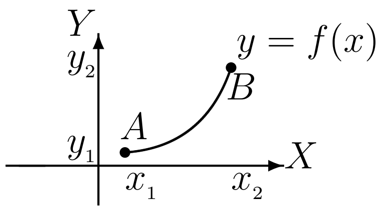


Рис. 16.6

Тогда точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ лежат на этом графике в силу предполагаемой точности, а значит сумма расстояний отклонений значений функции полученных в ходе эксперимента и при вычислении

$$S = (f(x_1) - y_1) + (f(x_2) - y_2) = 0.$$

Означает ли это, что, **чем меньше сумма отклонений S, тем ближе точки эксперимента к предполагаемой кривой и тем самым, точнее является функция, описывающая поведение этой кривой**?

[1]А также к графическому, понимая под графиком непрерывную кривую, а не дискретный набор точек.

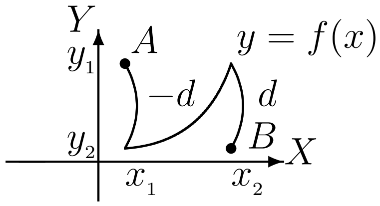


Рис. 16.7

Следующая картинка показывает, что это не так: $f(x_1) - y_1 = -d$, а $f(x_2) - y_2 = d$. В результате

$$S = (f(x_1) - y_1) + (f(x_2) - y_2) = -d + d = 0,$$

но ни одна из точек не лежит на предполагаемой кривой. То есть тот факт, что сумма расстояний отклонений точек эксперимента от точек, полученных с помощью предполагаемой функции в процессе вычислений, стремится к нулю или даже равна нулю, ни о чём не говорит. Причина этого в том, что отклонения, совпадая по модулю, отличаются друг от друга знаком, превращаясь в противоположные величины, сумма которых по определению равна нулю.

Таким образом, проблема заключается в уничтожении влияния знака.

Это можно сделать двумя способами:

Первый способ заключается в том, чтобы рассмотреть не сами отклонения, а их модули:

$$S = |f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2|.$$

Второй способ заключается в замене отклонений их квадратами:

$$S = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2.$$

Но так как функции, содержащие знак модуля не являются всюду дифференцируемыми, то в качестве метода выбора функции, имеющей наименьшее отклонение от таблично заданной функции, полученной в ходе эксперимента, остаётся второй способ, связанный с суммой квадратов отклонений. А так как целью поиска является найти наименьшую сумму квадратов, то поэтому алгоритм поиска получил своё название *метод наименьших квадратов*.

Итак, мы имеем полученную в результате некоторого эксперимента таблицу значений

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

.

Предположим, что при перенесении на график полученное «облако» точек будет больше похоже на прямую, нежели на любую другую линию. Поставим своей целью, **найти такую прямую, которая наилучшим образом определяет данную функцию с точки зрения метода наименьших квадратов**.

Допустим, что эта прямая описывается уравнением $y = ax + b$, где a и b пока неизвестные коэффициенты, которые надо найти.

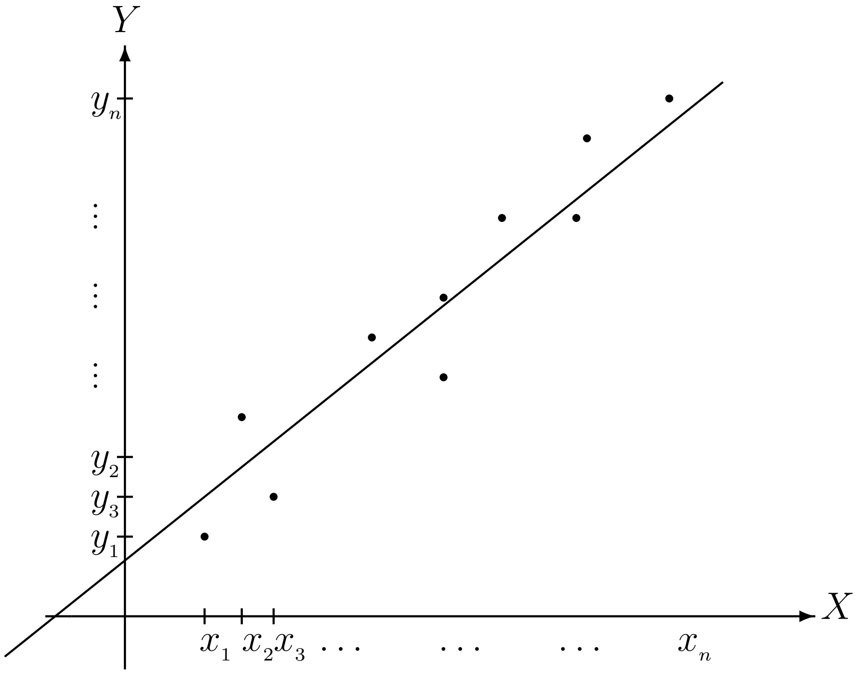


Рис. 16.8

Составим сумму квадратов отклонений значений y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ от чисел $ax_i + b$, описывающих значениях теоретической функции. Подробно сумма выглядит так:

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Как видно из представления, сумма квадратов S является функцией двух неизвестных переменных величин a и b, то есть $S = S(a;\, b)$.

А следовательно, стоит задача найти минимум функции двух переменных (то, что это именно минимум, вытекает из того, что сумма квадратов с положительными коэффициентами может иметь только наименьшее значение), при этом этот минимум является наименьшим значением функции $S(a;\, b)$ в области её определения.

Таким образом, найденная стационарная точка, если она существует, автоматически окажется точкой минимума созданной функции и позволит найти искомые числа a и b.

Перепишем функцию $S(a;\, b)$ с помощью знака сокращённого суммирования

$$S(a;\, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot (ax_i + b - y_i)'_a \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i.$$

Так как a и b не зависят от индекса суммирования i, а сумма является конечной, то найденную частную производную по a можно переписать так:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right).$$

Аналогично найдём частную производную по b:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot (ax_i + b - y_i)'_b \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot 1.$$

Как и в предыдущем случае, выделим несколько слагаемых, вынеся общие множители:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i \right).$$

Сумма единиц $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$, поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n - \sum_{i=1}^{n} y_i \right).$$

Составим систему для поиска стационарной точки (16.11)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Для удобства решения перенесём свободные члены, не зависящие от a и b, в правую часть уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \ b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{16.15}$$

Определение 16.5. Система (16.15) называется *системой нормальных уравнений метода наименьших квадратов*.

Найдём главный определитель составленной системы

$$\Delta = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то согласно правилу Крамера система имеет единственное решение. Следовательно, пара чисел $(a; b)$, являющаяся её решением, позволяет найти такую линейную функцию $y = ax + b$, которая является наилучшим приближением исследуемой таблично заданной функции в классе линейных функций[1].

Задача 16.7. Некоторая фирма занимается поставками различных грузов на короткие расстояния в черте города. Определите зависимость между расстоянием и затраченным временем, наилучшим образом описывающую данные, собранные в результате 10 поставок товара

Расстояние, *км*	3,5	2,4	4,9	4,2	3,0	1,3	1,0	3,0	1,5	4,1
Время, *мин*	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16

Решение. Перенесём на координатную плоскость XOY данные экспериментальной таблицы

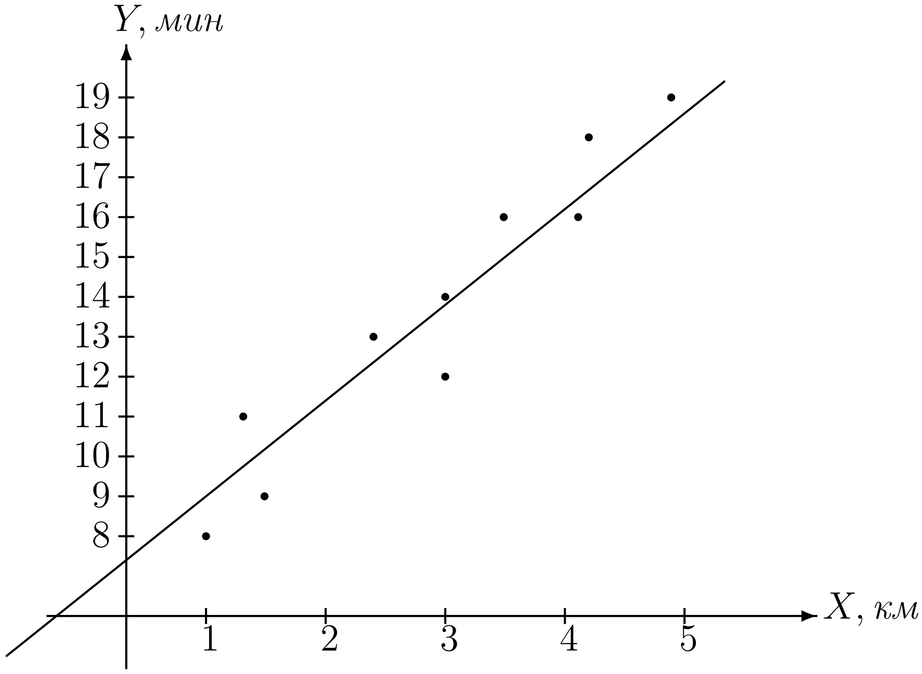


Рис. 16.9

Так как «облако» построенных точек достаточно близко расположено к вписанной в это множество прямой, то можно предположить, что зависимость между расстоянием и потраченным временем похожа на линейную зависимость вида $y = ax + b$. Попробуем с помощью метода наименьших квадратов найти такие a и b, чтобы отклонение экспериментальных данных от теоретической прямой было наименьшим.

Для того, чтобы составить нормальную систему уравнений метода (16.15),

[1]Естественно, что, если класс линейных функций не устраивает в силу недостаточно хорошего приближения, то решение следует искать в классах других функций.

полагая $n = 10$, вычислим предварительно суммы

$$\sum_{i=1}^{10} x_i,\ \sum_{i=1}^{10} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{10} y_i \text{ и } \sum_{i=1}^{10} x_i y_i.$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 3,5 + 2,4 + 4,9 + 4,2 + 3,0 + 1,3 + 1,0 + 3,0 + 1,5 + 4,1 = 28,9.$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 12,25 + 5,76 + 24,01 + 17,64 + 9,00 + 1,69 +$$
$$+ 1,00 + 9,00 + 2,25 + 16,81 = 99,41.$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 16 + 13 + 19 + 18 + 12 + 11 + 8 + 14 + 9 + 16 = 136.$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 3,5 \cdot 16 + 2,4 \cdot 13 + 4,9 \cdot 19 + 4,2 \cdot 18 + 3,0 \cdot 12 +$$
$$1,3 \cdot 11 + +1,0 \cdot 8 + 3,0 \cdot 14 + 1,5 \cdot 9 + 4,1 \cdot 16 = 42,00.$$

Подставляя полученные коэффициенты в систему (16.15), имеем

$$\begin{cases} 99,41a + 28,9b = 435,30 \\ 28,9a \quad + 10b = 136. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса. Для этого домножим первое уравнение на 10, а второе – на 28,9, а затем вычтем из первого произведения второе

$$(994,1 - 28,9^2)a = 4353 - 136 \cdot 28,9 \Leftrightarrow a = \frac{422,6}{158,9} \Leftrightarrow a = 2,66.$$

Подставляя найденное значение a во второе уравнение, получаем

$$b = \frac{136 - 28,9 \cdot 2,66}{10} \Leftrightarrow b = 5,91.$$

Таким образом, с точки зрения метода наименьших квадратов, функция $y = 2,66x + 5,91$ наиболее точно отражает зависимость между расстоянием и временем, затраченным на перевозки на это расстояние, в классе линейных функций.

В заключение следует заметить, что в задачи, связанные с экономическими исследованиями, метод наименьших квадратов приходит через теорию вероятностей и эконометрику, которая является приложением математической статистики к задачам экономики.