

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В MATHCAD**

Методические указания и контрольные задания к выполнению
лабораторной работы по курсу
«Аналитические и численные методы решения уравнений
математической физики» для студентов, обучающихся в магистратуре

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2011

УДК 539.3/6. (076.5)

Решение двумерной задачи теплопроводности методом конечных элементов в MATHCAD : методические указания и контрольные задания к выполнению лабораторной работы по курсу «Аналитические и численные методы решения уравнений математической физики» для студентов, обучающихся в магистратуре / сост. Л. М. Иванников. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. – 28 с.

Методические указания составлены на кафедре «Механика деформируемого твердого тела». Включают содержание лабораторной работы и рекомендации к изучению разделов курса «Аналитические и численные методы решения уравнений математической физики», необходимых к ее выполнению, список рекомендуемой литературы и задачи для лабораторной работы.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Механика деформируемого твердого тела» и методического совета института строительства и архитектуры.

© Тихоокеанский государственный университет, 2011

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Целью лабораторной работы является усвоение алгоритма расчета двумерных задач теплопроводности методом конечных элементов.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

Уравнение плоской задачи теплопроводности имеет вид [1]

$$K_x \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + Q(x, y) = 0, \quad (1)$$

где K_x, K_y – коэффициенты теплопроводности в направлении осей x, y , $\frac{\text{кВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; $T(x, y)$ – искомая функция температуры; $Q(x, y)$ – источник тепла внутри тела, $\frac{\text{кВт}}{\text{м}^3}$. $Q(x, y) > 0$, если тепло подводится к телу.

Граничные условия ставятся двух типов [2]:

$$1. \quad T = T_r(\Gamma), \quad (2)$$

если температура T известна на некоторой части границы Γ , где $T_r(\Gamma)$ – известная температура в точках границы, зависящая от координат точек поверхности s на границе Γ ;

$$2. \quad K_x \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} l + K_y \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} m + h(T - T_\infty) + q(x, y) = 0, \quad (3)$$

если на части поверхности Γ_1 происходит конвективный теплообмен, характеризуемый величиной $h(T - T_\infty)$, или задан поток тепла $q(x, y)$ на части поверхности Γ_2 , причем $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Обозначения в (2) и (3): h – коэффициент теплообмена, $\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$; $T(x, y)$ – неизвестная температура на границе, K ; T_∞ – известная температура окружающей среды, K ; l, m – направляющие косинусы; $q(x, y)$ – известный поток тепла, $\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$, считается положительным, если тепло теряется телом. Поток тепла и конвективная теплоотдача на одном и том же участке не могут действовать одновременно.

Если имеет место теплоизолированная граница, то поток тепла равен нулю и конвективный теплообмен отсутствует, тогда граничное условие запишется так:

$$\frac{dT}{dn} = 0,$$

где n – внешняя нормаль к границе рассматриваемой области.

ФУНКЦИОНАЛ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решение уравнения (1) по области s с граничными условиями (2) и (3) на Γ эквивалентно отысканию минимума функционала

$$\Phi(x, y) = \int_s \frac{1}{2} \cdot \left[K_x \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_y \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2Q \cdot T \right] \cdot ds + \int_{\Gamma} \left[q \cdot T + \frac{1}{2} h \cdot (T - T_{\infty})^2 \right] \cdot d\Gamma. \quad (4)$$

При решении задачи МКЭ область s разбивается на n подобластей (конечных элементов), которые обычно принимаются в форме треугольников (рис. 1). Далее все формулы приводятся для треугольных КЭ. Функционал записывается как сумма вкладов всех конечных элементов по области. Тогда (4) примет вид

$$\Phi(x, y) = \sum_{e=1}^n \left[\frac{1}{2} \cdot \int_{s^{(e)}} \{g^{(e)}\}^T \cdot [D^{(e)}] \cdot \{g^{(e)}\} \cdot ds - \int_{s^{(e)}} T^{(e)} \cdot Q^{(e)} \cdot ds + \int_{\Gamma_2^{(e)}} T^{(e)} \cdot q^{(e)} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1^{(e)}} \frac{1}{2} \cdot [T^{(e)} \cdot T^{(e)} - 2 \cdot T^{(e)} \cdot T_{\infty} + (T_{\infty})^2] \cdot d\Gamma \right], \quad (5)$$

где $\{g^{(e)}\}^T = \left[\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \quad \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right]$; $[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} K_x^{(e)} & 0 \\ 0 & K_y^{(e)} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов теплопроводности.

Или

$$\Phi(x, y) = \sum_{e=1}^n \Phi^{(e)}(x, y).$$

Представим температуру, изменяющуюся в пределах КЭ, через узловые значения:

$$T^{(e)} = [N^{(e)}] \cdot \{T\},$$

где $[N^{(e)}]$ – матрица функций формы КЭ, учитывающая распределение температуры в пределах КЭ.

Тогда

$$\{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \text{ или } \{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \cdot \{T\},$$

где $[B^{(e)}]$ – матрица градиентов функций формы КЭ.

Для каждого КЭ теперь можно записать вклад каждого КЭ в выражение для функционала (4):

$$\begin{aligned} \Phi^{(e)} = & \int_{s^{(e)}} \frac{1}{2} \cdot \{T\}^T \cdot [B^{(e)}]^T \cdot [D^{(e)}] \cdot [B^{(e)}] \cdot \{T\} \cdot ds - \int_{s^{(e)}} Q^{(e)} \cdot [N^{(e)}] \cdot \{T\} + \\ & + \int_{\Gamma_2^{(e)}} q^{(e)} \cdot [N^{(e)}] \cdot \{T\} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} \cdot [T]^T \cdot [N^{(e)}]^T \cdot [N^{(e)}] \cdot \{T\} \cdot d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_1^{(e)}} h^{(e)} \cdot (T_\infty) \cdot [N^{(e)}] \cdot \{T\} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} \cdot (T_\infty)^2 \cdot d\Gamma. \end{aligned}$$

Минимум функционала (4) требует выполнения следующего условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^n \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0.$$

Для отдельного КЭ получим

$$\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \{T\}} = [k^{(e)}] \cdot \{T\} + \{F^{(e)}\},$$

где матрица теплопроводности КЭ $[k^{(e)}]$ имеет вид

$$[k^{(e)}] = \int_{s^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot [D^{(e)}] \cdot [B^{(e)}] \cdot ds + \int_{\Gamma_1^{(e)}} h^{(e)} \cdot [N^{(e)}]^T \cdot [N^{(e)}] \cdot d\Gamma,$$

а вектор внешнего воздействия будет

$$\{F^{(e)}\} = - \int_{s^{(e)}} Q^{(e)} \cdot [N^{(e)}]^T \cdot ds + \int_{\Gamma_2^{(e)}} q^{(e)} \cdot [N^{(e)}]^T \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1^{(e)}} h^{(e)} \cdot (T_\infty) \cdot [N^{(e)}]^T \cdot d\Gamma.$$

Для всей рассматриваемой области получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^n ([k^{(e)}] \cdot \{T\} + \{F^{(e)}\}) = 0,$$

или

$$[K] \cdot \{T\} = \{F\}, \quad (6)$$

где

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k^{(e)}], \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^n \{F^{(e)}\}.$$

Уравнение (6) является основным уравнением для решения задачи теплопроводности методом конечных элементов.

ДВУМЕРНЫЙ СИМПЛЕКС–ЭЛЕМЕНТ

Для решения плоской задачи теплопроводности используется треугольный КЭ с прямолинейными сторонами (см. рис. 1). Нумерация узлов проводится против часовой стрелки, начиная с некоторого узла, обозначаемого единицей. Нумерация сторон КЭ приведена на рис. 1.

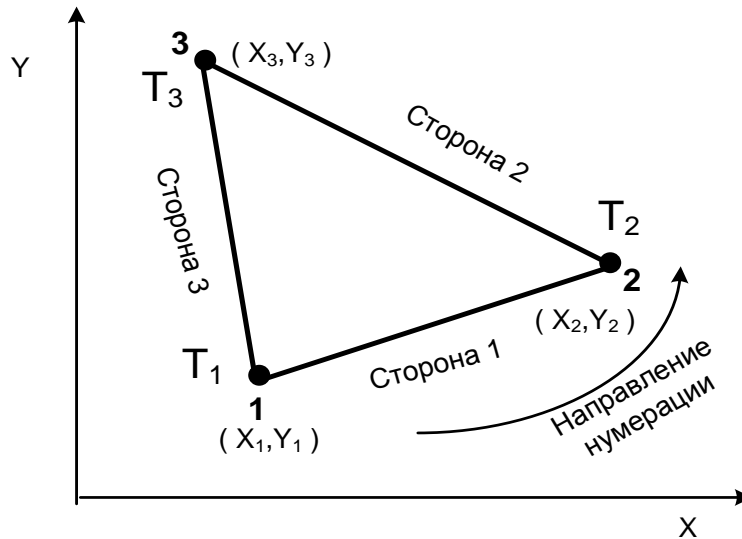


Рис. 1. Треугольный конечный элемент

Узловые значения температуры обозначаются T_1, T_2, T_3 . Температура в точке КЭ с координатами x, y определяется по формуле

$$T = N_1 \cdot T_1 + N_2 \cdot T_2 + N_3 \cdot T_3.$$

Ниже приводятся функции формы, применяемые для этого КЭ.

$$N_1 = \frac{1}{2 \cdot A} [a_1 + b_1 \cdot X + c_1 \cdot Y],$$

$$N_2 = \frac{1}{2 \cdot A} [a_2 + b_2 \cdot X + c_2 \cdot Y],$$

$$N_3 = \frac{1}{2 \cdot A} [a_3 + b_3 \cdot X + c_3 \cdot Y].$$

Площадь КЭ вычисляется по известной формуле

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты, входящие в функции формы, зависят от координат узлов, они приведены ниже:

$$a_1 = X_2 \cdot Y_3 - X_3 \cdot Y_2, \quad a_2 = X_3 \cdot Y_1 - X_1 \cdot Y_3,$$

$$a_3 = X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1,$$

$$b_1 = Y_2 - Y_3, \quad c_1 = X_3 - X_2, \quad b_2 = Y_3 - Y_1,$$

$$c_2 = X_1 - X_3, \quad b_3 = Y_1 - Y_2, \quad c_3 = X_2 - X_1.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КЭ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ СЕТКИ

Для предварительного нанесения сетки с крупной ячейкой (разбивкой области на зоны) используются четырехугольные квадратичные элементы (рис. 2). На каждой стороне КЭ вводится по три узла.

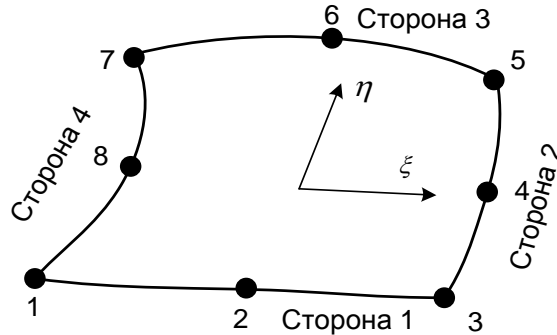


Рис. 2. Четырехугольный квадратичный КЭ

На рис. 2 показаны местные относительные координатные оси, в которых узел 1 имеет координаты $\xi = -1, \eta = -1$; узел 3 ($\xi = 1, \eta = -1$); узел 5 ($\xi = 1, \eta = 1$); узел 7 ($\xi = -1, \eta = 1$). Нумерация узлов такого КЭ, начиная с узла 1, проводится против часовой стрелки. Узлы 2, 4, 6, 8 могут располагаться в произвольной точке соответствующей стороны, что позволяет в дальнейшем строить более густую сетку вблизи точечных воздействий. В дальнейшем каждая сторона такого КЭ разбивается на заданное число участков. Нумерация узлов проводится следующим образом: по вертикали от узла с координатами ($\xi = -1, \eta = 1$) вниз по оси η и слева направо по оси ξ . Таким образом, крупные элементы делятся на более мелкие, которые в свою очередь меньшей по длине диагональю разбиваются на треугольные КЭ. Треугольные участки зоны также представляются в виде четырехугольных квадратичных элементов (рис. 3).

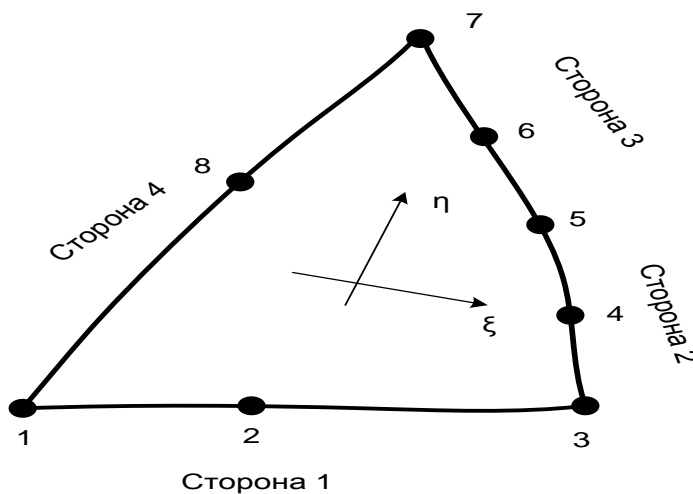


Рис. 3. Представление треугольной области в виде четырехугольного квадратичного элемента

МАТРИЦА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КЭ

Для треугольного КЭ матрица теплопроводности имеет вид

$$[k^{(e)}] = \frac{k_x}{4 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_3 \\ b_2 \cdot b_1 & b_2 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_3 \\ b_3 \cdot b_1 & b_3 \cdot b_2 & b_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot c_3 \\ c_2 \cdot c_1 & c_2 \cdot c_2 & c_2 \cdot c_3 \\ c_3 \cdot c_1 & c_3 \cdot c_2 & c_3 \cdot c_3 \end{bmatrix} + \\ + \frac{h^{(e)} \cdot L_{1-2}}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{h^{(e)} \cdot L_{2-3}}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h^{(e)} \cdot L_{3-1}}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

где $L_{1-2}, L_{2-3}, L_{3-1}$ – длины соответствующих сторон КЭ. Последние три члена учитывают конвективный теплообмен по каждой стороне КЭ. Так как КЭ входит составной частью в рассматриваемую область, то конвективный теплообмен обычно происходит по одной или двум сторонам КЭ.

ВЕКТОР ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА КЭ

Внешними (известными) воздействиями являются:

1. Источник тепла внутри КЭ постоянной интенсивности $Q^{(e)}$.
2. Приток тепла за счет теплового потока $q^{(e)}$.
3. Конвективный теплообмен не более чем по двум сторонам КЭ с коэффициентом теплообмена $h^{(e)}$.
4. Точечный источник тепла $Q^*(X_0, Y_0)$, находящийся внутри КЭ.

Вектор внешних воздействий на КЭ имеет вид

$$F^{(e)} = \frac{Q^{(e)}}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q^{(e)} + h \cdot (T_\infty)}{2} \cdot \left[L_{1-2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + L_{2-3} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + L_{3-1} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] + Q^* \cdot \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}_{(X=X_0, Y=Y_0)}.$$

ГРАДИЕНТЫ ТЕМПЕРАТУР И СРЕДНЯЯ ТЕМПЕРАТУРА ПО КЭ

Градиенты температур и средняя температура по КЭ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{Bmatrix} Grad_x \\ Grad_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix},$$

$$T_{cp} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 T_k.$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В MATHCAD 14

НАНЕСЕНИЕ СЕТКИ УЗЛОВ НА РАССМАТРИВАЕМУЮ ОБЛАСТЬ

Область решения задачи помещается в систему глобальных координат X, Y. Рассматриваемая область должна быть покрыта сеткой узлов. Чем меньше будет ячейка сетки, тем точнее будет решение задачи. Нанесение сетки проводится согласно [2] в 2 этапа.

I этап. Рассматриваемая область разбивается на ряд прямоугольных и треугольных зон (четырёхугольные квадратичные элементы). Зоны нумеруются в произвольном порядке. Для каждой такой зоны задаются 8 узловых точек (по три на каждой стороне, включая угловые точки). Для треугольной зоны одна из сторон соответствует двум сторонам прямоугольника (5 точек).

Таким образом, при разбивке на зоны используются четырёхугольные квадратичные элементы.

Составляются следующие таблицы исходных данных:

а) Табл. 1 соединения зон, определяющая, какие стороны зон контактируют между собой.

Соединение зон в рассматриваемой области. *Таблица 1.*

Номер зоны	Сторона 1	Сторона 2	Сторона 3	Сторона 4
1	2	0	0	0
2	1	0	0	3
3	0	2	0	0

В приведенной табл. 1 показано, что зона 1 контактирует только с зоной 2 по первой стороне, зона 2 контактирует с зоной 1 по первой стороне и с зоной 3 по четвертой стороне. Зона 3 контактирует только с зоной 2 по второй стороне (рис. 4). Нумерация сторон зависит от ориентации местных осей в относительных координатах ξ, η , которые показаны на рисунке жирными цифрами. На рис. 4 показано направление нумерации узлов зон от начального узла H.

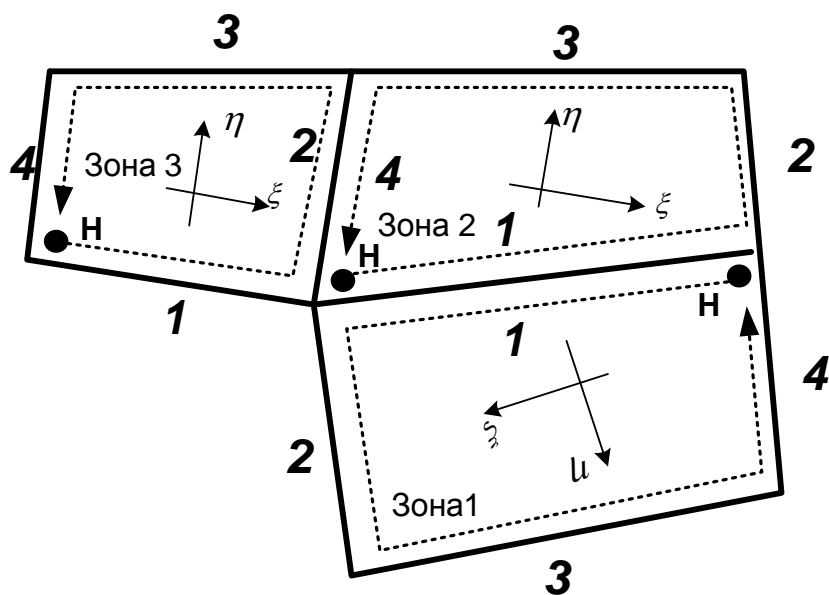


Рис. 4. Формирование таблицы соединения зон

б). Табл. 2 координат узлов, нанесенных на границы зон, в принятой глобальной системе координат.

Координаты узлов на границах зон *Таблица 2.*

Номер узла	Координата X, см	Координата Y, см
.....

в). Табл. 3, в которой указывается число полос по вертикали и горизонтали, на которые разбивается каждая зона для получения сетки с ячейками меньших размеров.

Формирование сетки с меньшими по размеру ячейками *Таблица 3.*

Номер зоны	Число полос по высоте	Число полос по ширине
1	5	6

Зона 1 разбивается на пять полос по высоте и шесть полос по ширине.

г). Табл. 4, в которой для каждой зоны указываются ранее нанесенные узлы.

Номера узлов предварительной сетки для каждой зоны *Таблица 4*.

Номер зоны	Номера узлов четырехугольных КЭ							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	11	12	13	14	15	16	17	18

В табл. 4 указано, что восемь узлом второй зоны имеют такие номера при обходе рассматриваемой зоны против часовой стрелки.

II этап. Далее в Mathcad реализована программа “grid” [2], в которой задается число полос по высоте и ширине для каждой зоны, позволяющее разбить каждую зону на прямоугольники гораздо меньших размеров. Затем каждый из этих малых прямоугольников меньшей по длине диагональю делится на два треугольника и вся рассматриваемая область покрывается сеткой с треугольной ячейкой.

В результате работы этой программы выдаются следующие данные:

- а). Число треугольных КЭ (Kol_Elem).
- б) Следующие табл. 5, 6, 7.

Нумерация узлов сетки по сторонам зон *Таблица 5*

$$Uzly_Zon_3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 16 & 1 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix}$$

Таблица выдается в форме матрицы размером (число полос зоны по высоте × число полос зоны по ширине) для каждой зоны, что упрощает построение сетки.

Приведенная матрица показывает, что в зоне 3 на стороне 1 располагаются узлы 23, 24, 25, 26; на стороне 2 располагаются узлы 26, 22, 1; на стороне 3 – узлы 1, 16, 13, 10; на стороне 4 – узлы 10, 19, 23. Обход зоны против часовой стрелки. Эта нумерация показана в приведенном ниже примере.

Расположение КЭ и принадлежность узлов КЭ треугольной сетке *Таблица 6*

Номер зоны	Номер КЭ	Узел 1 КЭ	Узел 2 КЭ	Узел 3 КЭ
.....
2	19	2	3	18
.....

Координаты узлов КЭ *Таблица 7*

Номер узла	Координата X	Координата Y
.....
12	20	15
.....

Также могут быть выведены таблицы, связывающие номер зоны, номер КЭ и координаты узлов КЭ.

На схему рассматриваемой области вручную наносится сетка с нумерацией КЭ и их узлов.

ФОРМИРОВАНИЕ ВЕКТОРА ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

На основании построенной сетки для рассматриваемой области отмечаются:

- а) Номера сторон, по которым происходит конвективный обмен тепла.
- б) Номера узлов, в которых температура задана.
- в) Номера КЭ, в которых на их сторонах, узлах или внутри располагаются сосредоточенные тепловые источники.

Составляются следующие табл. 8, 9, 10.

Стороны области с конвективной теплоотдачей *Таблица 8*

Номер КЭ	Номер стороны	Номер стороны

Предполагается, что конвективный теплообмен возможен только по двум сторонам КЭ из трех.

Узлы с заданной температурой *Таблица 9*

Номер узла	Температура

Таблица точечных источников тепла *Таблица 10*

Величина $Q,$ $Вт$	Номер элемента	Координаты ис- точника Q	
		$Q_x,$ см	$Q_y,$ см
200	22	4,5	6,3

В результате решения задачи выводятся:

- Таблица величин температуры в узлах КЭ.
- Таблица градиентов температур $Grad_x, Grad_y$ по осям X и Y соответственно.
- Таблица средней температуры T_{sred} по каждому КЭ.
- Распределение температур по рассматриваемой области с указанием величин изотерм.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

В теплопроводящей среде проходят 4 кабеля, как показано на рис. 5. Среда имеет коэффициенты теплопроводности $K_x = K_y = 10 \frac{Вт}{(см \cdot К)}$. Коэффициент теплообмена на поверхности среды $h = 5 \frac{Вт}{(см^2 \cdot К)}$. По боковым сторонам рассматриваемая среда ограничена толстым слоем изоляции. Температура воздуха на поверхности среды $T_\infty = +30 \text{ } ^\circ\text{C}$. Температура нижнего слоя среды $T = +20 \text{ } ^\circ\text{C}$. Мощность излучения тепла каждым кабелем составляет $Q = 200 \text{ Вт}$.

Требуется:

1. Определить распределение температуры в заданной области.
2. Определить градиенты температур и среднюю температуру по области.
3. Построить графики изменения полученных величин.

УКАЗАНИЯ:

- а) при выполнении лабораторной работы учесть симметрию области и симметрию температурного воздействия;
- б) разбить рассматриваемую часть области на три или четыре зоны;
- в) каждую зону разбивать от трех до пяти полос по высоте и ширине для упрощения нанесения сетки на область.

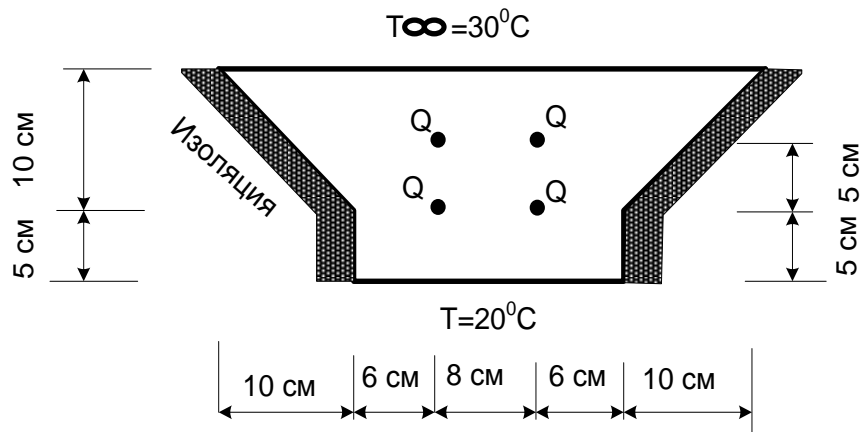


Рис. 5. Кабели в теплопроводящей среде

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Учитывая симметрию рассматриваемой области, в расчете будем учитывать только половину этой области (рис. 6).

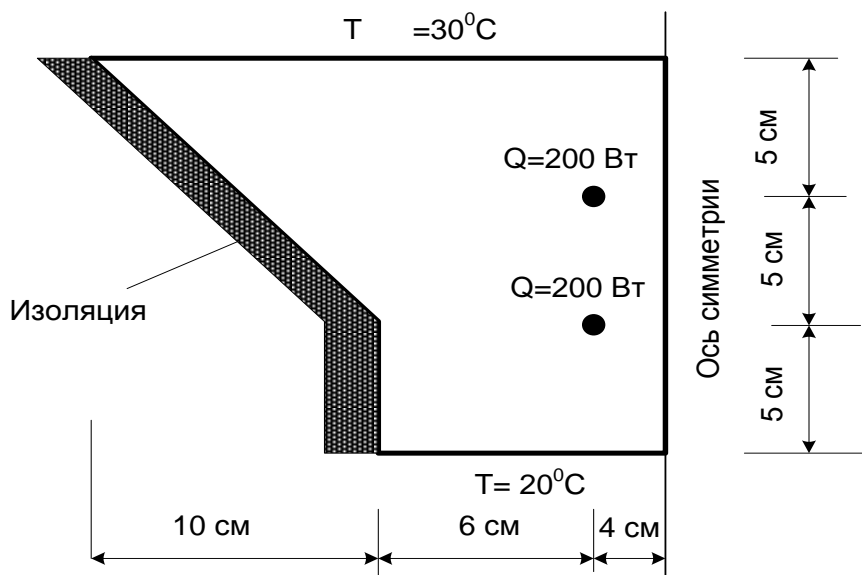


Рис. 6. Рассматриваемая в расчете область

Поместим рассматриваемую область в систему глобальных осей X и Y и разобьем ее на три зоны, на стороны которых нанесем узлы, полагая зоны четырехугольными квадратичными элементами рис. 7. Пронумеруем зоны и узлы, обходя область против часовой стрелки. Для определения номеров сторон зон для каждой зоны устанавливается система местных осей ξ , η .

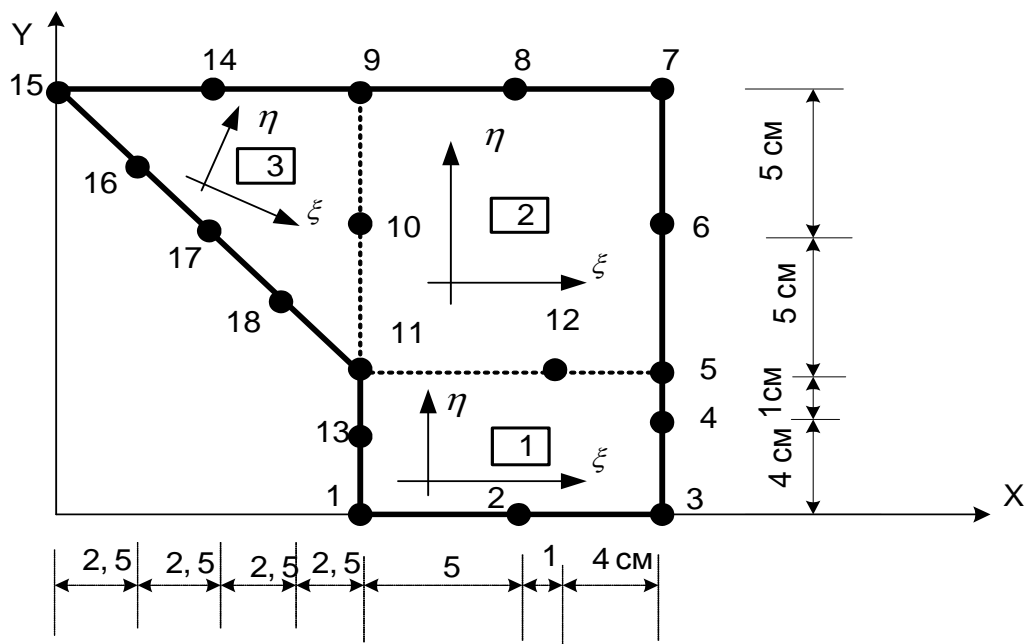


Рис. 7. Предварительная разбивка области на зоны

Для более точного решения задачи необходимо узлы на границе зон располагать ближе к точечным источникам тепла.

Составляются исходные данные для назначенных зон и узлов (табл. 1, 2, 3, 4). Программа расчета выдает табл. 5, 6, 7, представляющие полную информацию о треугольной сетке, нанесенной на область, используемую в дальнейшем расчете. По этим таблицам на листе строится сетка (рис. 8).

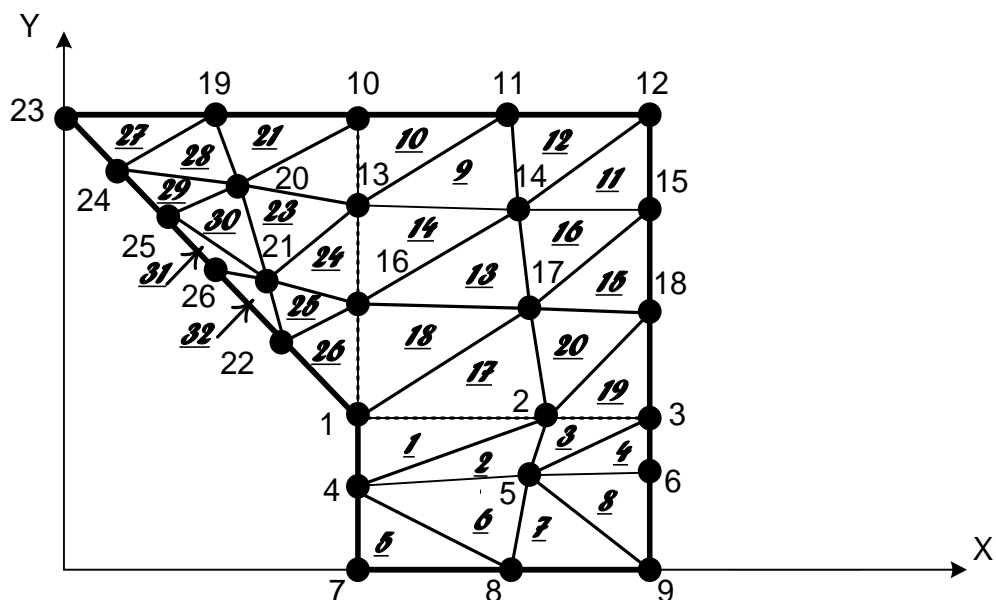


Рис. 8. Треугольная сетка, нанесенная на область

По полученной сетке проводится учет внешнего температурного воздействия и составляются табл. 8, 9, 10. После чего в табличной форме выводятся

ся результаты решения задачи и их графическое представление на рис. 9 и 10.

ORIGIN := 1

Chislo_Zon := 3

$$K_x := 10 \frac{Вт}{(см \cdot К)} \quad K_y := 10 \frac{Вт}{(см \cdot К)}$$

$$T_{\infty} = 30^{\circ}C$$

$$h := 15 \frac{Вт}{(см^2 \cdot К)}$$

Koord :=

	X	Y
	1	2
1	10	0
2	15	0
3	20	0
4	20	4
5	20	5
6	20	10
7	20	15
8	15	15
9	10	15
10	10	10
11	10	5
12	16	5
13	10	2.5
14	5	15
15	0	15
16	2.5	12.5
17	5	10
18	7.5	...

РАСПЕЧАТКА
РЕШЕНИЯ ЗА-
ДАЧИ

Таблица соединения зон

Zone :=

	1	2	3	4
1	0	0	2	0
2	1	0	0	3
3	0	0	2	0

Таблица данных
для каждой зоны

Rowcol :=

	1	2
1	3	3
2	4	3
3	3	4

Таблица узлов сетки
для каждой зоны

Uzly :=

Номер
Зоны

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	12	11	13
2	11	12	5	6	7	8	9	10
3	15	16	17	18	11	10	9	14

1. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ПО СОЗДАНИЮ СЕТКИ КЭ

УЗЛЫ СЕТКИ ПО ГРАНИЦАМ ЗОН

$$Uzly_Zon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$Uzly_Zon_2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Uzly_Zon_3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 16 & 1 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix} \quad Kol_Elem = 32$$

ТАБЛИЦА КЭ

Tabl_KE =

	1	2	3	4	5
1	"№ Зоны"	"№ КЭ"	"Узел 1 КЭ"	"Узел 2 КЭ"	"Узел 3 КЭ"
2	1	1	4	5	1
3	1	2	5	2	1
4	1	3	5	6	2
5	1	4	6	3	2
6	1	5	7	8	4
7	1	6	8	5	4
8	1	7	8	9	5
9	1	8	9	6	5
10	2	9	13	14	11
11	2	10	13	11	10
12	2	11	14	15	12
13	2	12	14	12	11
14	2	13	16	17	14
15	2	14	16	14	13
16	2	15	17	18	15
17	2	16	17	15	14
18	2	17	1	2	17
19	2	18	1	17	16
20	2	19	2	3	18
21	2	20	2	18	17
22	3	21	19	20	10
23	3	22	20	13	10
24	3	23	20	21	13
25	3	24	21	16	13
26	3	25	21	22	16
27	3	26	22	1	16
28	3	27	23	24	19
29	3	28	24	20	19
30	3	29	24	25	20
31	3	30	25	21	20
32	3	31	25	26	21
33	3	32	26	22	21

КООРДИНАТЫ УЗЛОВ КЭ

X =		1
	1	10
	2	16
	3	20
	4	10
	5	15.5
	6	20
	7	10
	8	15
	9	20
	10	10
	11	15
	12	20
	13	10
	14	15.33
	15	20
	16	10
	17	15.67
	18	20
	19	5
	20	5.83
	21	6.67
	22	7.5
	23	0
	24	1.67
	25	3.33
26	5	

Y =		1
	1	5
	2	5
	3	5
	4	2.5
	5	3.25
	6	4
	7	0
	8	0
	9	0
	10	15
	11	15
	12	15
	13	11.66667
	14	11.66667
	15	11.66667
	16	8.33333
	17	8.33333
	18	8.33333
	19	15
	20	12.5
	21	10
	22	7.5
	23	15
	24	13.33333
	25	11.66667
26	10	

ФОРМИРОВАНИЕ ВЕКТОРА ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Таблица сторон КЭ
с конвективной теплоотдачей

stor :=

	1	2	3
1	"№ эл-та"	"№ Стор"	"№ Стор"
2	10	2	0
3	12	2	0
4	21	3	0
5	27	3	0

Таблица узлов с заданной температурой

T_uzly :=

	1	2
1	"№ Узла"	Температура"
2	7	20
3	8	20
4	9	20

Таблица точечных источников тепла

Q :=

	1	2	3	4
1	"Величина Q"	№ Элемента "	"Qx"	"Qy"
2	200	16	16	10
3	200	3	16	5

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Температура в узлах элементов

	1
1	29.72
2	36.12
3	32.22
4	25.31
5	29.87
6	30.29
7	20
8	20
9	20
10	30.17
11	31.08
12	30.78
13	31.67
14	35.85
15	34.98
16	31.88
17	37.57
18	35.12
19	30.12
20	30.63
21	31.12
22	31.4
23	30
24	30.16
25	30.49
26	30.92

Градиенты температур и средняя температура по КЭ

Gradx =

	1
1	0.59
2	1.07
3	-0.53
4	-0.98
5	0
6	0.42
7	0
8	-0.34
9	0.78
10	0.18
11	-0.19
12	-0.06
13	1.01
14	0.78
15	-0.57
16	-0.19
17	1.07
18	1.01
19	-0.98
20	-0.57
21	0.01
22	0.16
23	0.23
24	0.2
25	0.21
26	-0.02
27	0.02
28	0.08
29	0.09
30	0.11
31	0.12
32	0.12

Grady =

	1
1	1.76
2	3.26
3	3.72
4	1.93
5	2.13
6	2.97
7	3.04
8	2.57
9	-1.35
10	-0.45
11	-1.26
12	-1.44
13	-0.42
14	-0.06
15	-0.04
16	-0.54
17	0.54
18	0.65
19	0.87
20	0.38
21	-0.2
22	-0.45
23	-0.12
24	-0.06
25	-0.04
26	0.65
27	-0.08
28	-0.18
29	-0.1
30	-0.16
31	-0.14
32	-0.07

Tsred =

	1
1	28.3
2	31.91
3	32.09
4	32.88
5	21.77
6	25.06
7	23.29
8	26.72
9	32.86
10	30.97
11	33.87
12	32.57
13	35.1
14	33.13
15	35.89
16	36.13
17	34.47
18	33.06
19	34.48
20	36.27
21	30.31
22	30.82
23	31.14
24	31.56
25	31.47
26	31
27	30.09
28	30.3
29	30.43
30	30.75
31	30.84
32	31.15

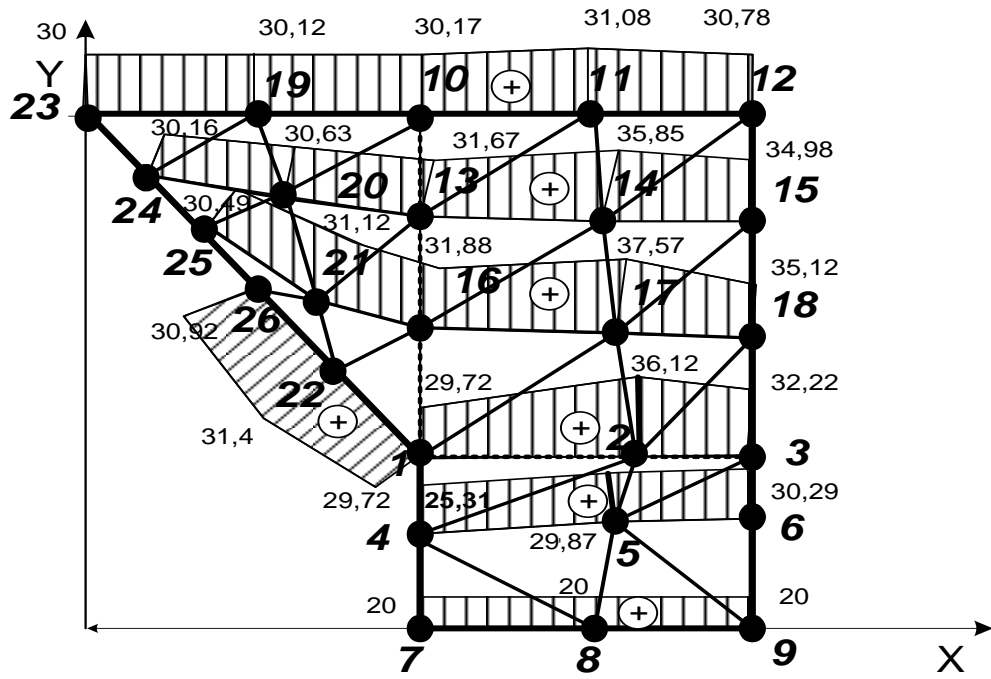


Рис. 9. Эпюра распределения температуры по линиям сетки

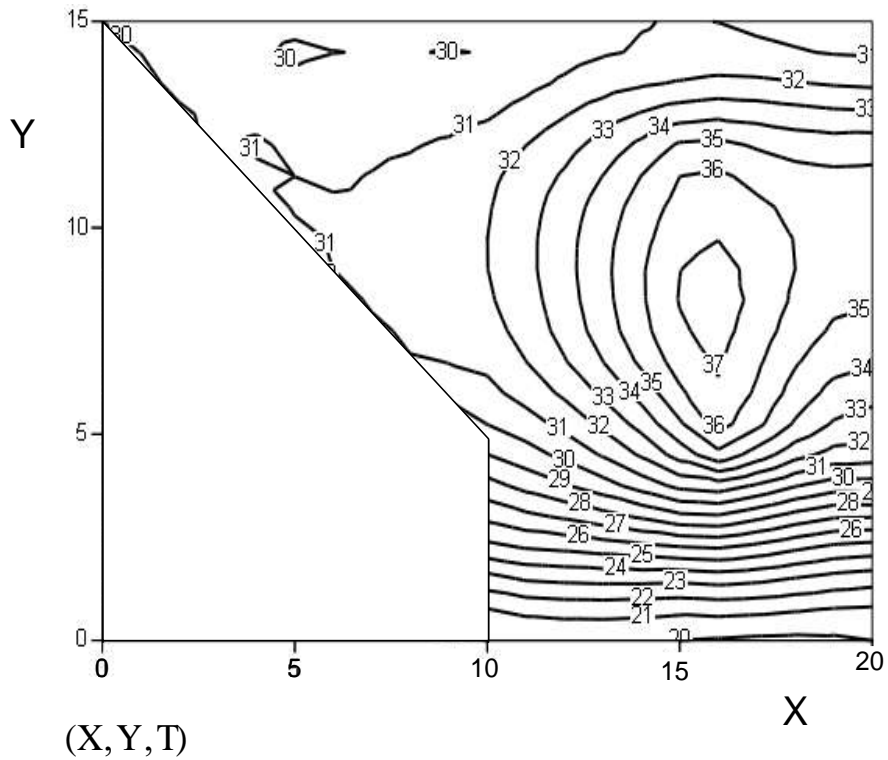


Рис. 10. Распределение температуры по области

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

В теплопроводящей среде, как показано на схеме, проходят кабели, излучающие тепло. Среда имеет коэффициенты теплопроводности K_x и K_y . Коэффициент теплообмена на поверхности среды h . На некоторых участках рассматриваемая среда ограничена толстым слоем изоляции. Температура воздуха на отдельных участках среды, где происходит конвективный теплообмен, T_∞ . На некоторых участках среды задана температура T .

Мощность излучения тепла каждым кабелем составляет Q .

Требуется, используя исходные данные для своего варианта и схему задания (табл. 11, рис. 11):

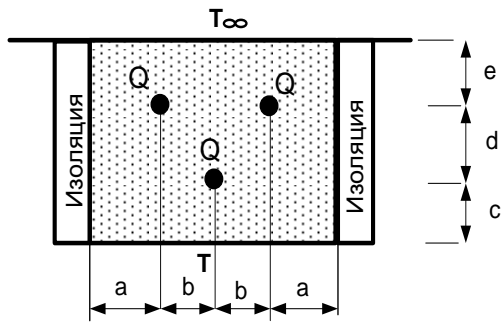
1. Определить распределение температуры в заданной области.
2. Определить градиенты температур и среднюю температуру по области.
3. Построить графики изменения полученных величин.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

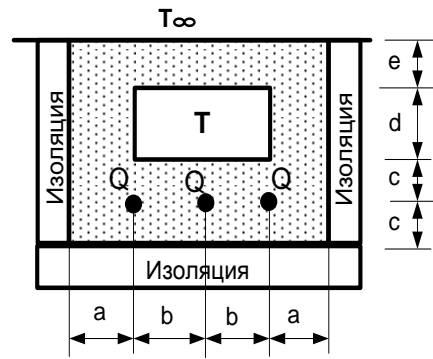
Исходные данные к лабораторной работе по вариантам *Таблица 11*

Но- мер Ва- ри- анта	a, см	b, см	c, см	d, см	e, см	Q, Вт	T, °C	T ∞ , °C	K_x , $\frac{Вт}{(см \cdot К)}$	K_y , $\frac{Вт}{(см \cdot К)}$	h, $\frac{Вт}{(см^2 \cdot К)}$
1	4	5	4	3	5	300	-30	+10	10	15	5
2	5	4	5	5	4	200	+20	+40	12	14	10
3	6	3	6	7	5	250	+15	-20	8	16	8
4	7	2	7	8	3	400	+25	-30	11	14	7
5	8	2	8	2	6	350	+10	+32	12	15	6
6	9	3	4	4	7	450	-20	+5	16	4	5
7	5	3	5	5	4	150	-10	+9	11	5	4
8	2	4	6	6	4	180	+15	-18	10	8	9
9	3	4	7	6	6	190	-25	+10	9	13	7
10	4	6	8	5	7	220	+18	-10	11	15	12

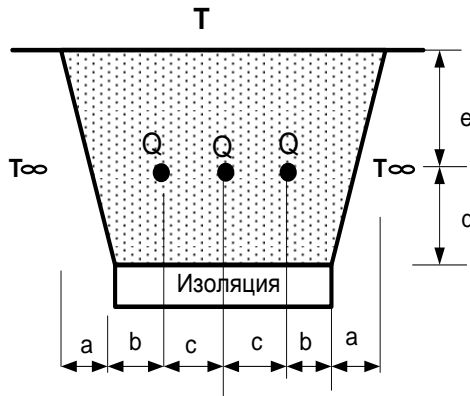
1



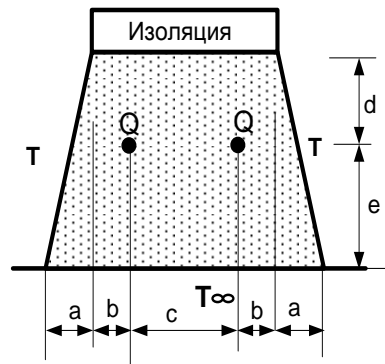
2



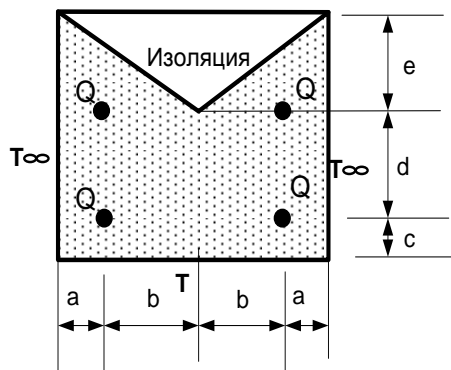
3



4



5



6

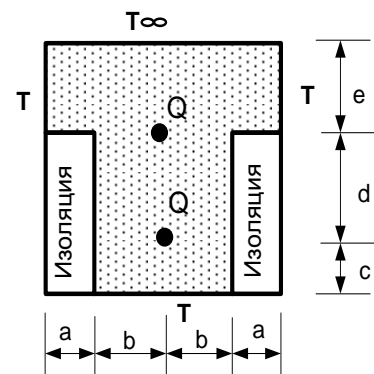
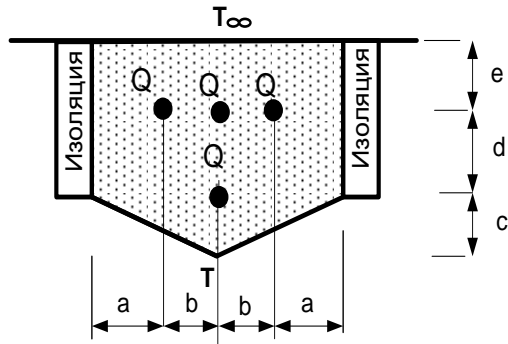
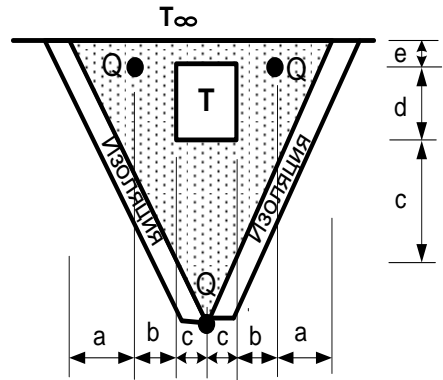


Рис. 11. Схемы вариантов задний для лабораторной работы

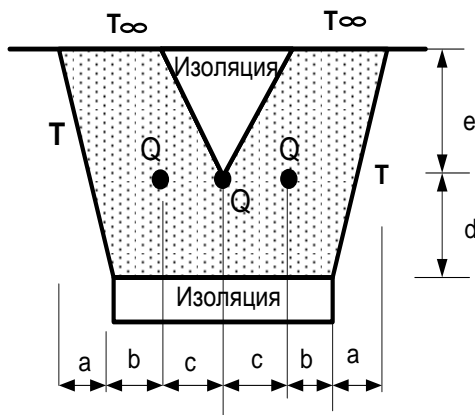
7



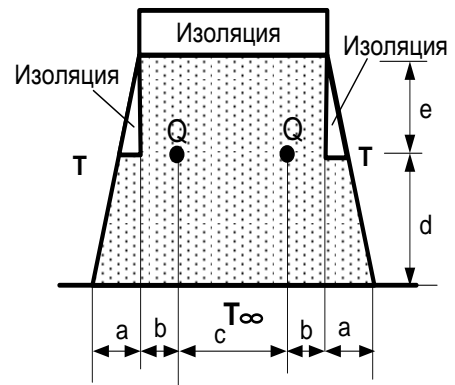
8



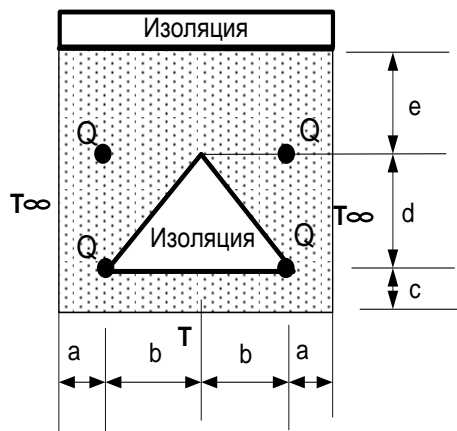
9



10



11



12

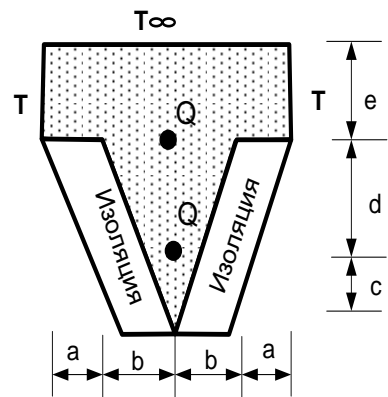
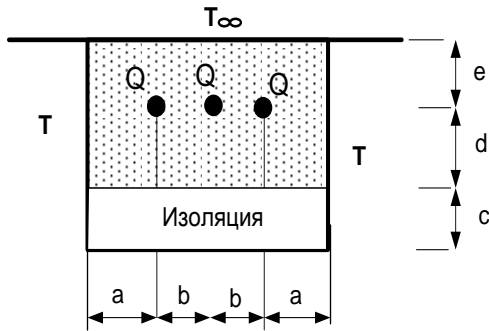
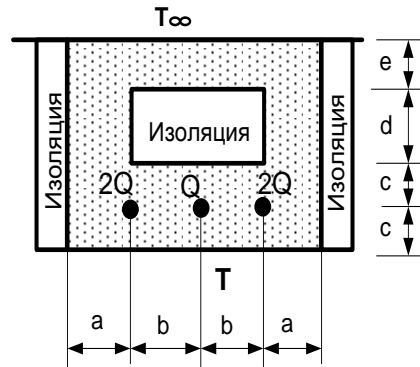


Рис. 11. Продолжение

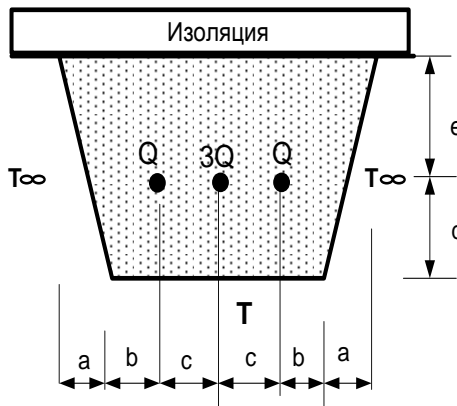
13



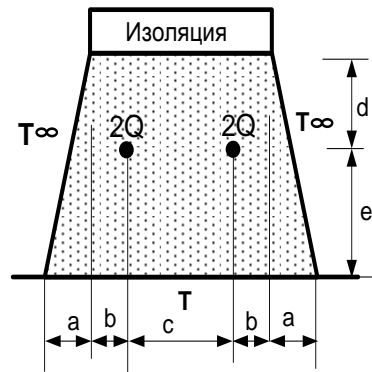
14



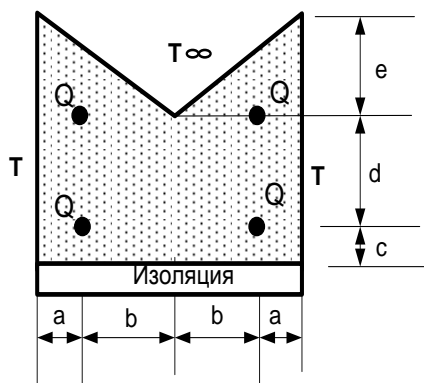
15



16



17



18

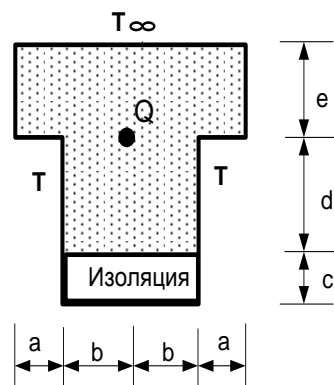


Рис. 11. Окончание

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите уравнение теплопроводности для двумерной задачи.
2. Запишите граничные условия для двумерной задачи теплопроводности.
3. Запишите полный функционал решения задачи теплопроводности.
4. Выведите основное уравнение для решения двумерной задачи теплопроводности методом конечных элементов.
5. Какие конечные элементы используются для решения двумерной задачи теплопроводности ?
6. Как определяются функции формы для двумерного симплекс–элемента?
7. С какой целью используются четырехугольные квадратичные элементы?
8. Как выбирается система местных координат и проводится нумерация сторон четырехугольного квадратичного элемента?
9. Запишите матрицу теплопроводности для треугольного КЭ.
10. Как формируется матрица теплопроводности для рассматриваемой области?
11. Как формируется вектор внешних тепловых воздействий для КЭ?
12. Как формируется вектор внешних воздействий для рассматриваемой области?
13. Как определяются градиенты температур и средняя температура по КЭ?
14. Как проводится нанесение сетки на рассматриваемую область?
15. Какие исходные данные необходимо подготовить для нанесения сетки?
16. Какие выходные данные используются для построения сетки и как она наносится на область?
17. Какие данные необходимо внести для формирования вектора внешних тепловых воздействий?
18. Как учесть знак величины точечного источника тепла? Притока тепла?
19. Какие выходные данные получаются в результате решения задачи теплопроводности?

Библиографический список

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 452 с.
2. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов/ Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ3
Уравнение переноса тепла3
Функционал решения задачи теплопроводности.....	.4
Двумерный симплекс элемент.....	.5
Применение четырехугольных КЭ для генерации сетки6
Матрица теплопроводности КЭ.....	.8
Вектор внешних воздействий на КЭ.....	.8
Градиенты температур и средняя температура по КЭ.....	.8
Порядок решения задачи теплопроводности в Mathcad 14.....	.9
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	.13
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ.....	.14
Распечатка решения задачи.....	.16
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ... ..	.22
Контрольные вопросы.....	.26
Библиографический список.....	.26

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В MATHCAD

Методические указания и контрольные задания к выполнению лабораторной работы по курсу «Аналитические и численные методы решения уравнений математической физики» для студентов, обучающихся в магистратуре.

Иванников Леонид Матвеевич

Главный редактор *А. А. Суевалова*

Редактор *Т. Ф. Шейкина*

Оператор компьютерной верстки *Л. М. Иванников*

Подписано в печать Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.

Усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского
государственного университета. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.