Здесь представлены две лекции, целью которых является введение в тему «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$\boxed{\textbf{Alt}}$ $\boxed{\rightarrow}$

Бидерман В. И.
Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 1.

§ 1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

В начале семестра было положено начало изучению функций одной переменной. Поводом для этого было признание того факта, что функция одной переменной является математическим описанием процесса, который развивается только во времени или только в одномерном пространстве.

При этом были рассмотрены две взаимно обратные задачи:

Прямая задача	Обратная задача
Дано: $y = f(x)$	**Дано:** $y' = f(x)$
Найти: y'.	**Найти:** y.

Полное знание об исследуемом процессе предполагает знание об одновременном существовании двух взаимно противоположных операций, позволяющих исследовать процесс как от начальной стадии до заключительной, так и наоборот.

Но это легче сказать, чем сделать, поэтому на практике сначала изучается одна операция, а на базе её знания другая. Так сначала была изучена первая задача – дифференцирование функции. А затем, с её помощью, обратная к ней – интегрирование функции.

Выберем теперь в качестве исходной операции интегрирование, и с её помощью определим класс новых задач, которые называются *дифференциальными уравнениями.*

Первым и поэтому самым простым дифференциальным уравнением мы можем считать уравнение

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ – известная функция, а $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной x. Эта функция по определению является решением данного уравнения.

Из курса интегрального исчисления известно, что это уравнение имеет множество решений, которые называются *первообразными функциями для функции* $f(x)$. При этом сам процесс решения, то есть нахождения этих неизвестных функций, называется *интегрированием.* По этой причине, в дальнейшем, **процесс решения всех дифференциальных уравнений также называется интегрированием**[1]. То есть, *интегрирование дифференциального уравнения* и *решение дифференциального уравнения* – синонимы.

Пользуясь умением интегрировать и дифференцировать и зная таблицы производных и интегралов, можно решить некоторые простейшие дифференциальные уравнения. Самыми простыми из которых, наверно, можно считать следующие задачи:

Задача 1.1. Решить уравнение $y' = 2$.

Решение. Так как $y(x) = \displaystyle\int y' dx + C$, где C – произвольная константа, то $y = \displaystyle\int 2dx$, то есть $y = 2x + C$.

Проверка. $y' = (2x + C)' \Rightarrow y' = 2$. Следовательно, решением уравнения является множество функций вида $\boxed{y = 2x + C}$.

Задача 1.2. Решить уравнение $y' = x$.

Решение. Как и в предыдущей задаче, взяв интеграл $y = \displaystyle\int x\,dx$, получаем, что $y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Проверка. И так как $y' = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)'$, то $y' = x$. Поэтому, решением уравнения является множество функций вида $\boxed{y = \dfrac{x^2}{2} + C}$.

Задача 1.3. Решить уравнение $y' = y$.

Решение. Данное уравнение отличается от первых двух уравнений. Ведь в правой части находится не известная функция, явно выраженная через независимую переменную, там находится сама неизвестная функция. Методы решения таких уравнений нам неизвестны. Но в данном случае выручает знание таблицы производных, а также правил дифференцирования. Единственной функцией, у которой производная от неё совпадает с ней самой, является экспонента $y = e^x$, то есть $(e^x)' = e^x$. А так как постоянный коэффициент при дифференцировании роли не играет, поскольку константу можно выносить за знак производной, то $(Ce^x)' = Ce^x$.Поэтому решением данного уравнения является множество функций вида $\boxed{y = Ce^x}$.

Если немножко дать волю фантазии, то за третьим уравнением можно

[1]Хотя, в некоторых случаях, как будет видно далее, при решении собственно процесс интегрирования будет отсутствовать

увидеть более сложные конструкции:

$$y' = x - y,\ xy' - y = x^5,\ \left(x^2 + y^2\right) y' = x^2 - y^2$$

и многие другие, перечисление которых бессмысленно ввиду их разнообразия.

Очевидно, что перед нами совершенно новый класс задач, и что бы с ним разобраться, понадобятся несколько определений.

Определение 1.1. *Уравнение, связывающее неизвестную функцию, её первую производную и её аргумент, называется дифференциальным уравнением первого порядка.*

Формально это можно записать так

$$y' = f(x,\, y) \tag{1.1}$$

или так

$$F\left(y',\, y,\, x\right) = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение вида (1.1) называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно первой производной.* А уравнение вида (1.2) называется *дифференциальным уравнением первого порядка, неразрешённым относительно первой производной.*

Среди приведённых выше шести дифференциальных уравнений первые четыре являются уравнениями первого вида, а последние два — второго вида. Объединяет эти уравнения в один класс **наличие в каждом уравнении первой производной неизвестной функции**[1].

Имея перед глазами только определение дифференциального уравнения и рассмотренные выше задачи, уже можно позволить себе, не умея решать такие уравнения, определить, является ли некоторая функция решением дифференциального уравнения, или нет. Так очевидно следующее

Определение 1.2. *Функция одной переменной называется решением дифференциального уравнения первого порядка, если она сама, её первая производная и аргумент удовлетворяют данному уравнению.*

То есть, при подстановке в уравнение они обращают уравнение в истинное равенство.

Задача 1.4. Доказать, что функции $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x \ln x$ и $y = \dfrac{x^3}{2} + 3x \ln x$ являются решениями дифференциального уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3$.

[1] Отсутствие в каждом уравнении из рассмотренных задач (1.2)-(1.3) аргумента или неизвестной функции не исключает эти уравнения из данного класса, так как их можно соответственно переписать так: $y' = 2 + 0 \cdot y + 0 \cdot x$, $y' = x + 0 \cdot y$, $y' = y + 0 \cdot x$.

Решение. Для того, чтобы подставить производную функции в уравнение, её надо знать. Поэтому найдём для каждой из функций соответствующую производную

$$\left(\frac{x^2}{2}+2x\ln x\right)^{'}=\frac{2x}{2}+2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=x+2\ln x+2;$$

$$\left(\frac{x^3}{2}+3x\ln x\right)^{'}=\frac{3x^2}{2}+3\ln x+3x\cdot\frac{1}{x}=\frac{3x^2}{2}+3\ln x+3.$$

Далее, вычитая в каждом случае $\dfrac{y}{x}$, получаем:

$$x+2\ln x+2-\frac{\dfrac{x^2}{2}+2x\ln x}{x}=x+2\ln x+2-\left(\frac{x}{2}+2\ln x\right)=\frac{x}{2}+2;$$

$$\frac{3x^2}{2}+3\ln x+3-\frac{\dfrac{x^3}{2}+3x\ln x}{x}=\frac{3x^2}{2}+3\ln x+3-\left(\frac{x^2}{2}+3\ln x\right)=x^2+3.$$

Так как $\dfrac{x}{2}+2\neq x^2+3$, то функция $y=\dfrac{x^2}{2}+2x\ln x$ не является решением данного уравнения. А из тождественного равенства $x^2+3\equiv x^2+3$ следует, что функция $y=\dfrac{x^3}{2}+3x\ln x$ является решением дифференциального уравнения $y^{'}-\dfrac{y}{x}=x^2+3$.

Таким образом, зная функцию, можно проверить, является ли она решением уравнения, или нет. Но что делать, если функция неизвестна? Иными словами, а как решить дифференциальное уравнение?

Если заглянуть в учебники по дифференциальным уравнениям, то можно обнаружить, что определение (1.2) является определением первого уровня, то есть определением для дилетантов. Так как решения делятся на *общие решения* и *частные решения*. А кроме них существуют еще *общие интегралы* и *частные интегралы*. И, наверно, для того, чтобы «добить несчастного студента» (а может быть, помочь разобраться?), существуют еще интегральные кривые дифференциального уравнения, которые определяют геометрическое решение этого уравнения.

Чтобы со всем этим разобраться, далее понадобятся несколько определений.

Определение 1.3. *Функция вида $y=f(x)$ называется явно заданной функцией.*

Например, функции $y = x^2$, $x = \sin t$, $z = e^y$ являются явно заданными функциями своих аргументов.

Определение 1.4. *Если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $\Phi(x,\, y) = 0$, то она называется неявно заданной функцией.*

Так, если в известном уравнении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ переменная y зависит от переменной x, то уравнение определяет неявно заданную функцию $y = y(x)$ (так как его можно переписать в виде $x^2 + y^2 - R^2 = 0$)[1].

Определение 1.5. *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,\, y)$ (или $F(y',\, y,\, x) = 0$) называется семейство явно заданных функций $y = \varphi(x,\, C)$ (где C – произвольная константа) таких, что:*

1) $\forall\, C\; y = \varphi(x,\, C)$ удовлетворяет уравнению (то есть $\varphi' \equiv f(x,\, \varphi)$);

2) для любого набора чисел $(x_o,\, y_o)$ существует единственная константа $C_o :\; y_o \equiv \varphi(x_o,\, C_o)$.

Так, например, в задаче (1.3) семейство функций $y = Ce^x$ будет общим решением уравнения $y' = y$ не только потому, что $(Ce^x)' = Ce^x$. Но и потому, что для любого набора чисел $(x_o,\, y_o)$ существует единственная константа $C_o = \dfrac{y_o}{e^{x_o}}$ такая, что $y_o \equiv C_o x_o$.

В том случае, когда значение константы известно, то имеет место

Определение 1.6. *Частным решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,\, y)$ (или $F(y',\, y,\, x) = 0$) называется любая явно заданная функция $y = \varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению.*

То есть, для того же уравнения $y' = y$ функция $y = C_o e^x$ будет являться частным решением при любом фиксированном числе C_o.

Далее обнаружится, что находить общее и частное решения для некоторых уравнений не такая простая вещь. По причине этого можно смириться с двумя новыми определениями.

Определение 1.7. *Общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,\, y)$ (или $F(y',\, y,\, x) = 0$) называется семейство неявно заданных функций $\Phi(x,\, y,\, C) = 0$ (где C – произвольная константа) таких, что:*

1) $\forall\, C\; \Phi(x,\, y,\, C) = 0$ удовлетворяет уравнению;

2) для любого набора чисел $(x_o,\, y_o)$ существует единственная константа $C_o :\; \Phi(x_o,\, y_o,\, C_o) \equiv 0$.

Так для уравнения $yy' + x = 0$ семейство неявно заданных функций

[1]Это же уравнение определяет явно заданные функции $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (Однако заметим, что не каждое неявно заданное уравнение позволяет определить явно заданную функцию. Например, из уравнения $\sin(x + y) = x - y$ невозможно определить ни $y = f(x)$, ни $x = g(y)$).

$x^2 + y^2 = C$ является общим интегралом потому, что, во-первых:

$$\left(x^2 + y^2\right)'_x = (C)'_x \Leftrightarrow 2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow yy' + x = 0.$$

(Здесь $\left(y^2\right)'_x = 2y \cdot y'$ потому, что $y = y(x)$. Следовательно, определяем производную сложной функции.)

И, во-вторых, для любого набора чисел $(x_o,\, y_o)$ существует единственная константа $C_o = x_o^2 + y_o^2$.

Определение 1.8. *Частным интегралом дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,\, y)$ (или $F(y',\, y,\, x) = 0$) называется любая неявно заданная функция $\Phi(x,\, y) = 0$, удовлетворяющая уравнению.*

То есть, если C_o – некоторая фиксированная константа, то неявно заданная функция, определяемая уравнением $x_o^2 + y_o^2 = C_o$, является частным решением дифференциального уравнения $yy' + x = 0$.

С помощью рассмотренных выше определений можно уточнить определение (1.2).

Определение 1.9. *Решить дифференциальное уравнение первого порядка, это значит:*

1) найти его общее решение $y = \varphi(x,\, C)$, либо

2) найти его общий интеграл $\Phi(x,\, y,\, C) = 0$.

Либо, при дополнительных ограничениях на искомую функцию,

3) найти его частное решение $y = \varphi(x)$ или

4) частный интеграл $\Phi(x,\, y) = 0$.

Введя такое количество новых понятий, можно, наконец, попробовать научиться решать если не все дифференциальные уравнения первого порядка[1], то хотя бы некоторые.

Первым таким классом, самым большим и самым эксплуатируемым не только в области самих дифференциальных уравнений, но и её приложений к задачам техники и экономики, является класс

§ 1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение 1.10. *Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,\, y)$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если функция $y' = f(x,\, y)$ может быть представлена только как произведение (или частное) функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.*

[1]Эта задача не разрешима вообще, поэтому нет смысла даже пытаться её решить.

Формально дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными можно было бы представить следующим образом:

$$f_1(x)g_1(y)y' = f_2(x)g_2(y) \tag{1.3}$$

или

$$f_1(x)g_1(y)y' + f_2(x)g_2(y) = 0. \tag{1.4}$$

Если допустить, что $f_1(x) \neq 0$, $g_1(y) \neq 0$, то в первом представлении

$$f(x,\, y) = \frac{f_2(x)g_2(y)}{f_1(x)g_1(y)},$$

а во втором представлении

$$f(x,\, y) = -\frac{f_2(x)g_2(y)}{f_1(x)g_1(y)}.$$

То есть, каждая из четырёх функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, определяющих $f(x,\, y)$, зависит только от одной переменной.

Далее, если учесть, что производную можно представить в виде отношения дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то каждое из этих уравнений можно соответственно переписать в виде

$$f_1(x)g_1(y)dy = f_2(x)g_2(y)dx \tag{1.5}$$

или

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Заметим, что термин *разделяющиеся переменные* произошёл не от операции «алгебраическое деление переменных», а от операции «разделение переменных», то есть отделение их друг друга за счёт того, что **различные** переменные перебрасывают в **разные** части одного и того же уравнения. А сделать это можно только тогда, когда разные переменные связаны операциями умножения и деления.

Рассмотрим конкретные примеры уравнений с разделяющимися переменными:

$$x^2y' = y^2;$$

$$x^2y^2y' = (x^2+1)(y^2+1);$$

$$\frac{x}{y}y' = 1;$$

$$xy' = y + 1.$$

В то же время уравнения вида $y' = x+y$ или $y' = \sin(xy)$ нельзя считать уравнениями с разделяющимися переменными, так как невозможно переписать эти уравнения таким образом, чтобы неизвестная функция и её аргумент находились по «разные стороны баррикады», то есть в разных частях уравнения относительно знака равенства.

1.2.1. Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

Предположим, что рассматриваемое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет вид (1.4):

$$f_1(x)g_1(y)y' + f_2(x)g_2(y) = 0.$$

Предположим также, что функции $f_1(x)$, $g_1(y)$, $f_2(x)$ и $g_2(y)$ являются непрерывными функциями. Будем также считать, что функции $f_1(x)$ и $g_2(y)$ отличны от нуля, то есть $f_1(x) \neq 0$ и $g_2(y) \neq 0$.

Шаг 1. Перепишем производную в виде отношения дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и подставим отношение в данное уравнение:

$$f_1(x)g_1(y)\frac{dy}{dx} + f_2(x)g_2(y) = 0.$$

Шаг 2. Домножим[1] обе части равенства на dx:

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0.$$

Шаг 3. Вычтем второе слагаемое из обеих частей, отделив тем самым дифференциал dx от дифференциала dy:

$$f_1(x)g_1(y)dy = -f_2(x)g_2(y)dx.$$

Шаг 3. В левой части уравнения множитель $f_1(x)$ явно кажется «чужим» для дифференциала dy. Точно также в правой части $g_2(y)$ «мешает» дифференциалу dx. Разделим обе части уравнения на произведение этих функций:

$$\frac{f_1(x)g_1(y)dy}{f_1(x)g_2(y)} = -\frac{f_2(x)g_2(y)dx}{f_1(x)g_2(y)}.$$

После сокращения общих множителей в левой и правой частях получим

Уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{g_1(y)dy}{g_2(y)} = -\frac{f_2(x)dx}{f_1(x)}.$$

[1]Так как нашей конечной целью в преобразовании является процесс интегрирования, а в интегралах дифференциал никогда не бывает в знаменателе.

Шаг 4. Проинтегрируем обе части полученного равенства дифференциалов: в левой части по переменной y, а в правой части по переменной x:

$$\int \frac{g_1(y)dy}{g_2(y)} = -\int \frac{f_2(x)dx}{f_1(x)}.$$

Предположим, что функция $G(y)$ является одной из первообразных для подынтегральной функции $\dfrac{g_1(y)}{g_2(y)}$, а функция $F(x)$ – первообразная для функции $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

Так как каждый интеграл представляет некоторое множество функций, то равенство интегралов можно представить с помощью равенства первообразных их подынтегральных функций с точностью до произвольной константы C.

Поэтому получаем отношение

$$G(y) = F(x) + C,$$

которое неявным образом определяет искомую функцию $y = y(x)$ с точностью до константы, то есть является общим интегралом данного дифференциального уравнения.

Замечание 1.2. Следует обратить внимание на то, что выражения «общий интеграл» или «частный интеграл» совсем не предполагают в общем случае, что запись решения будет содержать знаки интегралов. Более того, если представление общего или частного интегралов содержит знаки интегралов, то это говорит либо о незаконченном решении, либо о том, что дальнейшее решение уравнения надо искать приближённо: или с помощью представления в виде функционального ряда, или численными методами.

Используя полученный алгоритм, решим несколько уравнений с разделяющимися переменными.

Задача 1.5. Найти общее решение уравнения $y' = y - 1$.

Решение. Согласно алгоритму перепишем уравнение, представив производную как отношение дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx} = y - 1.$$

Далее, домножив обе части на dx:

$$dy = (y-1)dx,$$

получим, что явно «мешает» множитель $(y-1)$ в левой части. Предположим, что $y - 1 \neq 0$, и разделим обе части на $(y-1)$:

$$\frac{dy}{y-1} = dx.$$

Проинтегрировав обе части соответственно по y и по x:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int dx,$$

получаем общий интеграл уравнения в виде[1]:

$$\ln(y-1) = x + \ln C.$$

Так как нам нужно общее решение уравнения, то выполним следующие алгебраические преобразования:

$$\ln(y-1) = x + \ln C \Rightarrow \ln(y-1) - \ln C = x \Rightarrow \ln\frac{y-1}{C} = x.$$

Потенцируя слева и справа равенство по основанию e, имеем:

$$e^{\ln\frac{y-1}{C}} = e^x \Rightarrow \frac{y-1}{C} = e^x \Rightarrow y-1 = Ce^x \Rightarrow y = Ce^x + 1.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: $\boxed{y = Ce^x + 1}$.

Замечание 1.3. Вспомним о предположении $y - 1 \neq 0$, которое и привело к общему решению. Что может получится, если предположить, что $y - 1 = 0$? В этом случае $y' = 0$. Откуда вытекает, что $y = C$. А так как, по предположению, $y - 1 = 0$, то $C = 1$. Но это решение можно получить из общего, полагая $C = 0$. В том случае, когда подобное решение не вытекает из общего, оно называется *особым решением.*

Задача 1.6. Найти общее решение уравнения $(y-2)dx = (x+1)dy$.

Решение. В данном случае дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными задано с помощью дифференциалов. Остаётся только понять, что множители $(y-2)$ и $(x+1)$ находятся «не на своих местах». Если допустить, что $y - 2 \neq 0$ и $x + 1 \neq 0$, то можно разделить обе части уравнения на произведение этих множителей:

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x+1}.$$

Далее, проинтегрировав полученное равенство

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x+1},$$

[1]1. Если быть педантичным, то следовало бы написать, что: $\ln|y-1| = x + \ln|C|$, Затем, нужно подобрать $\bar{C} \in \mathbb{R} : \bar{C} = |C| > 0$. Переписать $\ln|y-1| = x + \ln\bar{C}$. $\ln|\dfrac{|y-1|}{|C|}| = x$. Потом, после потенцирования получить $|y-1| = \bar{C}e^x$. Откуда следует, что $y - 1 = \pm\bar{C}e^x$. И после переобозначения $C = \pm\bar{C}$ получить, что $y = Ce^x + 1$. Но, зная это, поступают проще.
2. Если же написать общий интеграл с «обычной» константой C: $\ln|y-1| = x + C \Rightarrow |y-1| = e^{x+C}$ $\Rightarrow |y-1| = e^C e^x \Rightarrow |y-1| = C_1 e^{x+C}$, где $C_1 = e^C$.

получим, что

$$\ln(y-2) = \ln(x+1) + \ln C.$$

Затем, пользуясь свойством логарифмов, имеем

$$\ln(y-2) = \ln C(x+1) \Rightarrow y-2 = C(x+1).$$

Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения $\boxed{y = Cx + C + 2}$.

Задача 1.7. Найти общий интеграл уравнения $(y+3)y' = x - 4$.

Решение. Перепишем уравнение с помощью отношения дифференциалов:

$$(y+3)\frac{dy}{dx} = x - 4.$$

Домножим обе части на dx:

$$(y+3)dy = (x-4)dx.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int (y+3)dy = \int (x-4)dx.$$

Взяв интегралы, получаем:

$$\frac{(x-4)^2}{2} = \frac{(y+3)^2}{2} + \frac{C^2}{2}.$$

Умножив обе части уравнения на 2, имеем общий интеграл уравнения в виде $\boxed{(x-4)^2 - (y+3)^2 = C^2}$.

Замечание 1.4. Тот, кто еще помнит аналитическую геометрию, узнает в этом общем интеграле уравнение гиперболы, а точнее уравнение семейства гипербол, центром которых является точка $(4;\ -3)$, а полуоси $a = b = C$ $(C > 0)$.

Если же проинтегрировать равенство, опираясь на свойства линейности:

$$\int (y+3)dy = \int ydy + 3\int dy = \frac{y^2}{2} + 3y + C_1;$$

$$\int (x-4)dx = \int xdx - 4\int dx = \frac{x^2}{2} - 4x + C_2,$$

то за равенством

$$\frac{y^2}{2} + 3y = \frac{x^2}{2} - 4x + C$$

очень трудно увидеть это самое семейство гипербол[1].

Умея решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (а уравнения этого класса на практике встречаются чаще других) можно обратиться к вопросу: **А зачем нужны дифференциальные уравнения**? Если ответить, что дифференциальные уравнения являются математическим аппаратом, с помощью которого можно описать процессы в природе, технике, экономике. То это будет безусловно правдой. Но это правда ничего не скажет о том, что сами по себе дифференциальные уравнения описывают процесс в общем случае, а точнее множество процессов. Но ведь чаще всего интерес представляет однозначный процесс, который можно описать единственным решением. А на примере рассмотренных выше уравнений и их решений видно, что общее решение или общий интеграл не определяют эту единственность. Очевидно, что кроме самого дифференциального уравнения, описывающего проблему, нужна ещё дополнительная информация.

§ 1.3. Понятие о задаче Коши

Этой дополнительной информацией являются *начальные условия*, определяющие состояние процесса в некоторый, чаще всего начальный, момент времени (или его же состояние в некоторой точке пространства). А так как изучаемый процесс может быть описан с помощью функции, пусть даже в данный момент неизвестной, то начальные условия определяют некоторое знание о функции, то есть её значение в какой-то точке из области определения.

Определение 1.11. *Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называется постановка задачи, в которой задано само дифференциальное уравнение, а также начальные условия.*

Формально задача Коши описывается так:

$$y' = f(x,\, y),\; y(x_o) = y_o \text{ или так: } F(y',\, y,\, x) = 0,\; y(x_o) = y_o.$$

Решая задачу Коши, можно найти частное решение или частный интеграл, которые определяют единственный процесс, соответствующий заданным начальным условиям. Так как начальные условия согласно определениям (1.5) и (1.7) позволяют определить константу C_o единственным образом.

[1]Конечно, если вспомнить об определении типа кривой второго порядка на плоскости, и при этом уметь привести уравнение к каноническому виду с помощью алгебраических преобразований, тогда останется только один вопрос: *а зачем столько проблем*?

Задача 1.8. Решить задачу Коши $yy' + x = 0$, $y(3) = 4$.

Решение. Решим сначала уравнение, переписав его с помощью дифференциалов:

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Домножив обе части уравнения на dx и перенеся второе слагаемое в правую часть, получим:

$$ydy = -xdx.$$

Интегрируя обе части полученного равенства

$$\int ydy = -\int xdx,$$

имеем

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}.$$

Умножая на 2 обе части равенства, а затем прибавляя к его обеим частям x^2, получаем в качестве общего интеграла

$$x^2 + y^2 = C.$$

Далее, подставив из начальных условий $x_o = 3$ вместо x и $y_o = 4$ вместо y, находим решение задачи Коши $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$.

Задача 1.9. Построить на координатной плоскости решение задачи Коши $(x+2)y' - y + 1 = 0$, $y(-1) = 2$.

Решение. Так как процесс решения уравнения не таит в себе новизны, то приводим его без комментариев.

$$(x+2)\frac{dy}{dx} - y + 1 = 0;$$

$$(x+2)dy - (y-1)dx = 0;$$

$$(x+2)dy = (y-1)dx;$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+2};$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+2};$$

$$\ln(y-1) = \ln(x+2) + \ln C \Rightarrow \ln(y-1) = \ln C(x+2) \Rightarrow y - 1 = C(x+2).$$

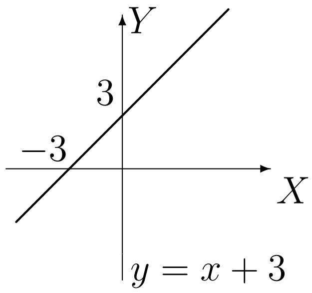

Рис. 1.1

Подставляя из начальных условий $x_o = -1$ вместо x и $y_o = 2$ вместо y: $2 - 1 = (-1 + 2)$, определяем значение $C_o = 1$. Следовательно, функция, являющаяся решением задачи Коши $y - 1 = x + 2$ или $y = x + 3$, является линейной, а её графиком на координатной плоскости является прямая линия.

ЛЕКЦИЯ 2.

Рассмотрим ещё один часто встречающийся на практике тип дифференциальных уравнений первого порядка.

§ 2.1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 2.1. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

(Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции.)

К таким уравнениям относится, например, уравнение

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x.$$

В этом уравнении $P(x) = -\dfrac{2}{x}$, а $Q(x) = x^2 e^x$.

Замечание 2.1. Данное уравнение называется линейным потому, что неизвестная функция и её производная входят в уравнение в первой степени.

Рассмотрим решение этого уравнения с помощью метода, созданного в 1693-94 годах Лейбницем[1].

§ 2.2. Метод Лейбница решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Предположим, что задано линейное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

[1]Так как этот метод впервые был опубликован в работах Якоба и Иоганна Бернулли, то в ряде учебников он называется *методом Бернулли* (см. Никифоровский В.А. Путь к интегралу. М.: Наука, 1985. – 192с.).

в котором функция $y = y(x)$ является искомой, но неизвестной функцией.

Лейбниц предложил искать эту функцию в виде произведения двух новых неизвестных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

$$y = uv.$$

Подставим эту функцию вместе с её производной $y^{'} = u^{'}v + uv^{'}$ в заданное уравнение

$$u^{'}v + uv^{'} + P(x)uv = Q(x).$$

Далее, сгруппируем второе и третье слагаемое в левой части, вынеся общий множитель u за скобки

$$u^{'}v + u(v^{'} + P(x)v) = Q(x). \tag{2.7}$$

Идея Лейбница состоит в том, чтобы, найдя одну функцию v, удовлетворяющую уравнению, с её помощью найти множество функций $u = u(x, C)$ таких, что произведение функций $uv = v(x)u(x, C)$ окажется общим решением заданного уравнения.

Лейбниц предложил найти такую функцию v, при которой бы выполнялось равенство

$$v^{'} + P(x)v = 0.$$

Поскольку данное равенство представляет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, то, решив его, мы сможем выбрать частное решение этого уравнения при $C = 0$ за искомую функцию v:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \Rightarrow dv = -P(x)vdx.$$

Так как[1] $v \neq 0$, то:

$$\frac{dv}{v} = -P(x) \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)\, dx.$$

Из последнего уравнения следует

$$\ln v = -\int P(x)\, dx \Rightarrow v = e^{-\int P(x)\, dx}.$$

Подставив найденную функцию $v = e^{-\int P(x)\, dx}$ в уравнение (2.7) и обратив с её помощью второе слагаемое в нуль, получим новое уравнение с разделяющимися переменными, но уже относительно функции u.

$$u^{'}e^{-\int P(x)\, dx} = Q(x).$$

[1] Если бы $v = 0$, то и $y = uv = 0$, а значит и $y^{'} = 0 \neq Q(x)$.

Умножим обе части уравнения на $v = e^{\int P(x)\,dx}$ и перепишем производную в виде отношения дифференциалов

$$\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Затем, умножив обе части уравнения на dx:

$$du = Q(x)e^{\int P(x)\,dx} \Rightarrow \int du = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx.$$

Следовательно,

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C \Rightarrow y = e^{\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right).$$

Таким образом, найдено общее решение заданного дифференциального уравнения первого порядка[1].

Задача 2.1. Решить уравнение $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2e^x$.

Решение. Как было отмечено выше, данное уравнение является линейным. Поэтому можно применить метод Лейбница, выполнив замену

$$y = uv,\ y' = u'v + uv'. \tag{2.8}$$

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x^2e^x.$$

Сгруппировав согласно методу второе и третье слагаемые, вынесем общий множитель u за скобки:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = x^2e^x. \tag{2.9}$$

Далее, решим уравнение

$$v' - \frac{2v}{x} = 0.$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}.$$

Повесив интегралы на левую и правую части уравнения с разделёнными переменными

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x},$$

получим

$$\ln v = 2\ln x \Rightarrow \ln v = \ln x^2 \Rightarrow v = x^2.$$

[1]Если обозначить $e^{\int P(x)\,dx}$ как некоторую функцию $p(x)$, а $\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx$ как $q(x)$, то общее решение заданного уравнения примет вид $y = p(x)(q(x) + C$, а значит не будет выглядеть так ужасно.

Так как при подстановке найденной функции $v = x^2$ в уравнение (2.9) скобка обратится в нуль, то само уравнение примет вид

$$u' x^2 = x^2 e^x.$$

Из условия следует, что $x \neq 0$. Поэтому, разделив обе части уравнения на x^2, имеем

$$u' = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow \int du = \int e^x dx.$$

Следовательно,

$$u = e^x + C.$$

Подставляя найденные функции u и v в первое уравнение замены (2.8), определяем общее решение заданного уравнения $\boxed{y = x^2(e^x + C)}$.

Имея некоторое представление о решении дифференциальных уравнений первого порядка, попробуем разобраться с геометрическим смыслом этих решений, а также с геометрическим смыслом дифференциального уравнения первого порядка

§ 2.3. Геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения

С точки зрения геометрии общее решение дифференциального уравнения первого порядка представляет множество линий на координатной плоскости, зависящих от одного параметра. По отношению к данному дифференциальному уравнению эти линии называются *интегральными кривыми.* То есть, понятия *геометрическое решение дифференциального уравнения* и *интегральные кривые* являются синонимами.

Частное решение данного дифференциального уравнения представляет одну из интегральных линий этого множества линий, проходящую через заданную точку $M_o(x_o;\, y_o)$.

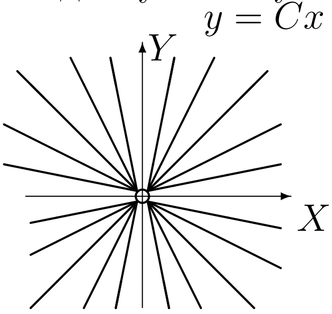

Рис. 2.1

Так общее решение уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$ представляет множество функций вида $y = Cx$, которые на плоскости определяют пучок прямых, проходящих через начало координат[1]. Если же задать некоторое начальное условие $y(2) = 6$, то подставив в общее решение $x_o = 2$ и $y_o = 6$, можно найти значение $C_o = 3$. И тогда из общего решения можно получить частное решение $y = 3x$, которое удовлетворяет начальному условию и

[1]При этом само начало координат является изолированной точкой, не принадлежащей ни одной из прямых данного семейства.

соответствует единственной прямой из семейства интегральных кривых данного уравнения.

§ 2.4. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка

С точки зрения геометрии дифференциальное уравнение $y' = f(x;\, y)$ определяется следующим образом.

Предположим, что функции $y = \varphi(x;\, C)$ образуют общее решение этого уравнения, то есть они представляют семейство интегральных линий в некоторой области D координатной плоскости XOY, в которой определена функция двух переменных $z = f(x;\, y)$. Данное дифференциальное уравнение устанавливает связь между координатами любой точки $M(x;\, y) \in D$ и значением производной в этой точке. По известным координатам x и y точки M можно из данного уравнения найти значение производной функции $y(x)$. А так как с точки зрения геометрии производная функции в данной точке определяет угловой коэффициент касательной к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку, то в каждой точке области D производная задаёт направление, совпадающее с направлением касательной. Таким образом, дифференциальное уравнение определяет совокупность направлений, или *поле направлений* в области D. Если это направление в каждой точке изобразить маленькой стрелкой, выходящей из этой точки, то можно построить поле направлений данного дифференциального уравнения.

Так поле направлений рассмотренного выше уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$ определяется в каждой точке условием $y' = k$, где $k = \dfrac{y}{x}$ и задаёт, как угловой коэффициент касательной, тангенс угла наклона этой касательной к положительному направлению оси OXY в точке $(x;\, y)$. То есть, вычисляя в каждой точке тангенс угла наклона прямой, можно определить соответствующий угол наклона в данной точке. На схематическом чертеже поле направлений выглядит следующим образом:

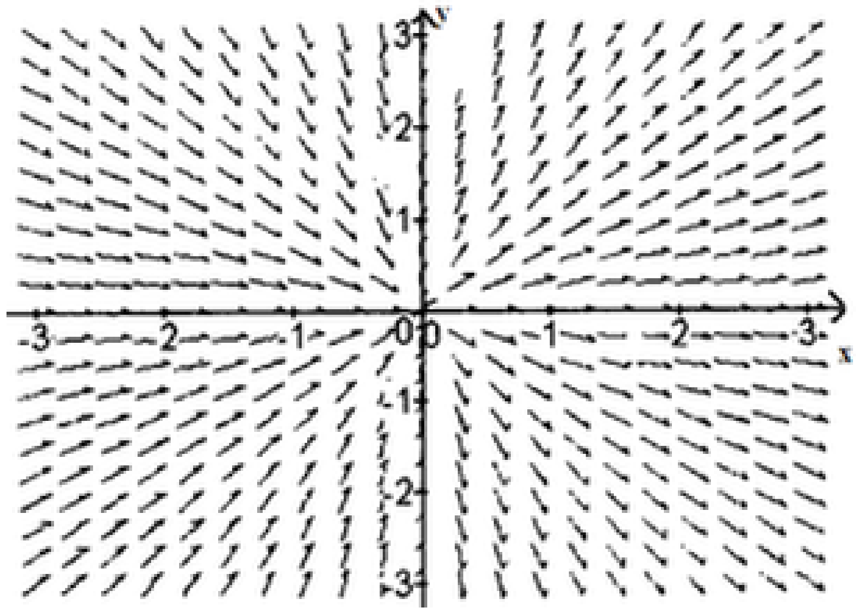

Рис. 2.2

Следовательно, с точки зрения геометрии *задача интегрирования дифференциального уравнения $y^{'} = f(x;\, y)$ заключается в нахождении кривых на координатной плоскости, которые в каждой своей точке касаются направления, задаваемого полем уравнения.*

Так как общее решение определяется с помощью начальных условий (см. определение 1.5), то возникает вопрос о существовании решения, удовлетворяющего этим начальным условиям, причём единственным образом. Ответом на этот вопрос является

Теорема 2.1. (Коши) *Если функция $f(x;\, y)$ и её частная производная $f_y^{'}(x;\, y)$ определены и непрерывны в некоторой области D координатной плоскости XOY, то любая внутренняя точка $(x_o;\, y_o) \in D$ имеет окрестность, в которой существует единственное решение уравнения $y^{'} = f(x;\, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_o) = y_o$.*

Таким образом, по виду уравнения можно определить, имеет ли задача Коши единственное решение. Особенно это важно знать тогда, когда само решение уравнения неизвестно.

§ 2.5. Приложения дифференциальных уравнений первого порядка в задачах экономики

Рассмотрим две задачи, связанные с приложениями дифференциальных уравнений первого порядка к задачам экономики.

2.5.1. Задача о рекламе

Предположим, что торговые учреждения реализуют продукцию B, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знают лишь x покупателей. Допустим также, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления в средствах массовой информации. Далее информация о продукции распространяется среди покупателей в ходе общения друг с другом.

Естественно предполагать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нём ещё не знающих.

Так как скорость изменения определяется производной $\dfrac{dx}{dt}$, то, выбрав положительный коэффициент пропорциональности равным k, можно составить дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Предположим, что начальный момент времени $t_o = 0$ наступает после того, как вследствие рекламных сообщений о товаре узнали $\dfrac{N}{\alpha}$ человек.

С точки зрения математики имеем задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx(N - x), \\ x(0) = \dfrac{N}{\alpha}. \end{cases}$$

Перепишем уравнение, «разделив переменые»:

$$kdt = \frac{dx}{x(N - x)} \tag{2.10}$$

и проинтегрируем его

$$k\int dt = \int \frac{dx}{x(N - x)}.$$

Если интеграл слева можно взять, зная только свойства неопределённого интеграла, то интеграл справа требует преобразования подынтегральной функции.

$$\frac{1}{x(N - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{N - x}.$$

«Вычеркнув» x из левой части и подставив $x = 0$, найдём

$$A = \frac{1}{N - 0} \Rightarrow A = \frac{1}{N}.$$

Аналогично, «вычеркнув» $N-x$ из левой части и подставив $x=N$, найдём

$$B=\frac{1}{N}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x(N-x)}=\frac{1}{N}\left(\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{N-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\left(\ln x-\ln(N-x)+C_1\right)=\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x}+C_1.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (2.10) имеет вид:

$$kt+\frac{\ln C}{N}=\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x}.$$

Умножив обе части уравнения на N и используя свойства логарифмов, получим

$$Nkt=\ln\frac{x}{N-x}-\ln C\Rightarrow Nkt=\ln\frac{x}{C(N-x)}.$$

Далее, потенцируя слева и справа по основанию e, имеем

$$e^{Nkt}=\frac{x}{C(N-x)}.$$

Разрешим полученное уравнение относительно x:

$$x=\frac{NCe^{Nkt}}{1+Ce^{Nkt}}.$$

Если разделить числитель и знаменатель дроби на Ce^{Nkt}, обозначив при этом через $P=\dfrac{1}{C}$, то получим общее решение уравнения (2.10) в виде

$$x=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}},$$

известном в экономической литературе как *уравнение логистической кривой.*

Подставим начальное условие $x(0)=\dfrac{N}{\alpha}$ в общее решение:

$$\frac{N}{\alpha}=\frac{N}{1+Pe^{-Nk\cdot 0}}\Rightarrow\alpha=1+P\Rightarrow P=1-\alpha.$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$x=\frac{N}{1+(1-\alpha)e^{-Nkt}},$$

который и определяет зависимость числа покупателей x от времени t при данных начальных условиях.

2.5.2. Задача о соотношении спроса и предложения

Одними из самых эксплуатируемых экономических категорий товарного производства в сфере товарного обмена являются *спрос* и *предложение.*

Под спросом понимается *запрос фактического или потенциального покупателя, потребителя на приобретение товара по имеющимся у него средствам, которые предназначены для этой покупки.* Спрос отражает, с одной стороны, потребность покупателя в некоторых товарах или услугах, желание приобрести эти товары или услуги в определенном количестве и, с другой стороны, возможность оплатить покупку по цене, находящейся в пределах кдоступногоњ диапазона.

Предложение характеризует *возможность и желание продавца (производителя) предлагать свои товары для реализации на рынке по определённым ценам.*

В 1890 году Альфредом Маршаллом был сформулирован экономический закон, устанавливающий зависимость объёмов спроса и предложения товаров на рынке от их цен. *При прочих равных условиях, чем цена на товар ниже, тем больше на него платёжеспособный спрос (готовность покупать) и тем меньше предложение (готовность продавать).* Обычно цена устанавливается в точке равновесия между предложением и спросом.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени Некто продаёт на рынке фрукты (например, яблоки), причем продаёт их после уборки урожая, с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у него запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели.

Согласно закону соответствия между спросом и предложением: если в наступающей неделе предполагается, что цена упадёт, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем дастся её падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Обозначим через $p = p(t)$ цену на фрукты в наступающей неделе. Тогда $p^{'}$ – её производная по времени. Согласно действию закона спрос и предложение являются функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и её производной.

В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соот- соотношением

$$f(t) = ap^{'}(t) + bp(t) + c,$$

где a, $b\,c$ – некоторые действительные постоянные.

Допустим, что в рассматриваемой задаче цена на фрукты вначале была 1 доллар за 1 кг, а через t недель она уже составляла $p(t)$ долларов за 1 кг. А спрос D и предложение S определялись соотношениями:

$$D = 6p^{'} - 8p + 20 \text{ и } S = 36p^{'} - 2p + 8.$$

Тогда, для того, чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$6p^{'} - 8p + 20 = 36p^{'} - 2p + 8.$$

Учитывая начальное условие $p(0) = 1$, после элементарных преобразований равенства получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{p-2} = -0,2dt, \\ p(0) = 1. \end{cases}$$

Проинтегрировав составленное уравнение, получим общий интеграл

$$\ln(p-2) = -0,2t + \ln C.$$

Далее, используя свойства логарифмов, имеем общее решение

$$p(t) = 2 + Ce^{-0,2t}.$$

Подставив начальное условия $t_o = 0$ и $p_o = 1$

$$1 = 2 + C,$$

вычислим значение $C = -1$. Возвращая полученное значение вместо C в общее решение, получаем решение задачи Коши

$$p(t) = 2 - e^{-0,2t}.$$

Следовательно, если требовать, чтобы между спросом и предложением всегда сохранялось бы равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с полученным решением данной задачи.