Целью представленных лекций является введение в тему «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»

Нумерация лекций связана с ранее представленными лекциями по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка».

Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$$\boxed{\textbf{Alt}}\ \boxed{\rightarrow}$$

Бидерман В. И.
Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 3.

Для того, чтобы перейти к изучению следующего класса дифференциальных уравнений, необходимо совершить экскурсию в один из разделов алгебры – теорию комплексных чисел.

§ 3.1. Элементы теории комплексных чисел

С развитием науки, техники, экономики оказалось, что действительных (вещественных) чисел не достаточно для решения возникающих задач. Понимание этого привело к появлению нового класса чисел, которые были названы *комплексными числами*[1].

Рассмотрим одно из определений комплексного числа и его алгебраическую форму, а также некоторые алгебраические операции над комплексными числами, которые имеют приложение, в том числе и в задачах экономики.

3.1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Пусть a и b – некоторые действительные числа, а i такое число, квадрат которого равен -1 (т.е. $i^2 = -1$).

Определение 3.1. *Число вида $z = a + bi$ называется комплексным числом. При этом*[2] *a – действительная часть, а b – мнимая часть комплексного числа z.*

Определение 3.2. *Форма представлений комплексного числа z в виде $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.*

Так как каждое действительное число d можно представить в виде

$$d = d + 0 \cdot i,$$

то действительные числа образуют подмножество в множестве комплексных чисел.

Иногда комплексные числа вида $z = bi$ $(b \neq 0)$ называют *мнимыми числами.*

Определение 3.3. *Комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если у них равны соответственно действительные и мнимые части, то есть*

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

[1] К.Ф.Гаусс назвал числа комплексными, в смысле составными из разного рода единиц: 1 и i.
[2] Существует символьное представление: $a = Re\, z,\ b = Im\, z$.

Определение 3.4. *Суммой комплексных чисел* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *называется число*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Определение 3.5. *Разностью комплексных чисел* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *называется число*

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Учитывая школьное правило перемножения многочленов (*каждый одночлен первого многочлена умножается на каждый одночлен второго многочлена, а подобные члены приводятся*) и то, что $i^2 = -1$, мы можем дать[1]

Определение 3.6. *Произведением комплексных чисел* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *называется число*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i.$$

Прежде, чем научиться делить комплексные числа в алгебраической форме, нам понадобится еще одно

Определение 3.7. *Число* $\bar{z} = a - bi$ *называется сопряжённым числом для комплексного числа* $z = a + bi$.

Так как

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = (a + a) + (b + (-b))i = 2a,$$

а

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a \cdot a - b \cdot (-b)) + (a \cdot (-b) + b \cdot a)i = a^2 + b^2,$$

то сумма и произведение сопряженных чисел являются действительными числами.

Используя свойство произведения сопряженных чисел и основное свойство дроби[2], введём

Правило деления комплексных чисел: *если* $z_2 \neq 0$, *то* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Например, при $z_1 = a_1 + b_1 i,$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(z_2 \neq 0)$ алгебраическая форма частного имеет вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

[1] Сложность при введении операций над комплексными числами заключается в том, что они не должны нарушать аналогичные операции во множестве действительных чисел.

[2] *Дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же, отличное от нуля, выражение.*

Задача 3.1. Даны числа $z_1 = 8 - 5i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Вычислите их сумму, разность, произведение и частное.

Решение.

$$z_1 + z_2 = 8 - 5i + 3 + 4i = (8 + 3) + (-5 + 4)i = 11 - i\,;$$

$$z_1 - z_2 = 8 - 5i - (3 + 4i) = (8 - 3) + (-5 - 4)i = 5 - 9i\,;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (8 - 5i) \cdot (3 + 4i) = (8 \cdot 3 - (-5) \cdot 4) + (8 \cdot 4 + (-5) \cdot 3)i =$$

$$= (24 - (-20)) + (32 - 15)i = 44 + 17i\,;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{8 - 5i}{3 + 4i} = \frac{(8 - 5i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} =$$

$$= \frac{8 \cdot 3 - (-5) \cdot (-4)}{3^2 + 4^2} + \frac{8 \cdot (-4) + (-5) \cdot 3}{3^2 + 4^2} i = \frac{4}{25} - \frac{47}{25} i\,.$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = 11 - i\,;\ z_1 - z_2 = 5 - 9i\,;\ z_1 \cdot z_2 = 44 + 17i\,;\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{25} - \frac{47}{25} i\,.}$$

3.1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Из курса средней школы известно, что действительные числа изображают с помощью точек координатной прямой. Если на прямой задано направление и определено начало отсчета, то, после выбора единицы измерения длины, каждому действительному числу ставится в соответствие определённая точка на координатной прямой, расстояние от которой до начала отсчета (начала координат) равно модулю действительного числа. И наоборот: каждой точке координатной прямой соответствует определённое действительное число.

Точно также комплексные числа изображают точками на координатной плоскости. Для этого на плоскости выбирают прямоугольную декартову систему координат. При этом горизонтальную ось выбранной системы координат, на которой отмечают действительную часть комплексного числа, называют *действительной осью.* А вертикальную ось, на которой отмечают мнимую часть комплексного числа, называют *мнимой осью.*

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ на координатной плоскости ставится в соответствие точка с координатами (a, b). И наоборот: каждой точке координатной плоскости с координатами (a, b) ставится в соответствие комплексное число $z = a + bi$.

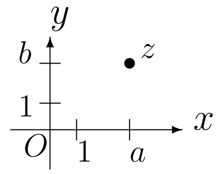

Рис. 3.1

Чисто мнимые числа $z = 0 + bi$ изображаются точками на мнимой оси. Так, например, $i = 0 + 1 \cdot i$ на координатной плоскости выглядит так:

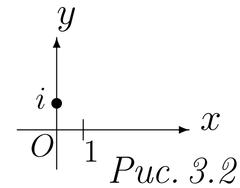

Рис. 3.2

А сопряженные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ изображают точками, симметричными относительно действительной оси

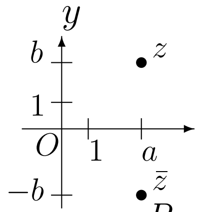

Рис. 3.3

В дальнейшем координатную плоскость, точки которой соответствуют комплексным числам, будем называть *комплексной плоскостью.*

3.1.3. Модуль и аргумент комплексного числа

Так как комплексное число $z = x + yi$ изображается в комплексной плоскости точкой z с координатами (x, y), то существует радиус-вектор данной точки $\overrightarrow{Oz}$, который также может служить изображением данного числа z.

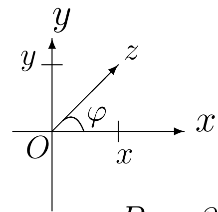

Рис. 3.4

С помощью рисунка 3.4, можно ввести

Определение 3.8. *Длина радиус-вектора точки $\overrightarrow{Oz}$ называется модулем комплексного числа z* и обозначается $|z|$.

Так как длина радиус-вектора определяется расстоянием между точками $O(0, 0)$ и $z(x, y)$, то

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.1}$$

Известно, что для определения радис-вектора точки кроме его длины необходимо знать угол φ наклона радиус-вектора к положительному направлению действительной оси.

Определение 3.9. *Угол φ между радиус-вектором $\overrightarrow{Oz}$ и положительным направлением действительной оси называется главным значением аргумента комплексного числа z* и обозначается $\arg z$.

В дальнейшем будем считать, что $-\pi < \arg z \leq \pi$ и будем измерять его в радианах[1].

Так, например, главное значение аргумента положительного действительного числа равно 0, а отрицательного действительного числа $- \pi$. Если $z = bi$ и $b > 0$, то $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Если же $b < 0$, то $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$.

[1] Существует и другой подход, при котором $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Существуют задачи, в которых кроме главного значения аргумента комплексного числа необходимо знать и сам *аргумент комплексного числа*

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{49}$$

Замечание 3.1. Для числа 0 аргумент не определен, а модуль $|0| = 0$.

Принято считать, что *комплексные числа z_1 и z_2 равны между собой*, если у них совпадают модули и главные значения аргументов, то есть

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ и } \arg z_1 = \arg z_2{}^1.$$

В (3.1) модуль комплексного числа $|z|$ был определён через его действительную x и мнимую y части. Можно с помощью того же рисунка 3.4 выразить действительную и мнимую части числа $z = x + yi$ через его модуль и главное значение аргумента. Пусть $|z| = r$, а $\arg z = \varphi$, тогда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

§ 3.2. Уравнения второй степени с отрицательным дискриминантом

Из школьного курса алгебры мы знаем, что уравнение второй степени

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

называется *квадратным уравнением*, и для его решения необходимо вычислить *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$, который в школьной программе рассматривался только как неотрицательное число. С его помощью по формулам

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \tag{3.3}$$

можно было найти корни x_1 и x_2 данного уравнения[2].

Предположим, что квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0 \ (a \neq 0)$$

имеет отрицательный дискриминант.

[1] Другое эквивалентное определение $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow |z_1| = |z_2|$ и $Argz_1 = Argz_2 + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{N})$.

[2]Для уравнения $x^2+px+q=0$ корни можно найти также с помощью обратной теоремы Виета: *Если числа x_1 x_2 удовлетворяют равенствам $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.*

Рассмотрим, как в этом случае решается квадратное уравнение. Представим дискриминант $D < 0$ с помощью мнимого числа i.

$$D = -|D| = |D|i^2.$$

С помощью данного представления дискриминанта формулы (3.2) примут вид:

$$z_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|D|}}{2a}i; \;\; z_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|D|}}{2a}i. \tag{3.4}$$

Замечание 3.2. Из определения 3.1 следует, что оба корня имеют одинаковую действительную часть

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Мнимая часть $\beta = \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ входит в корни с противоположными знаками. Поэтому у квадратного уравнения с действительными коэффициентами корни всегда будут взаимно сопряжёнными.

Задача 3.2. Решить уравнение $4z^2 - 12z + 13 = 0$ и найти действительную и мнимую части его корней.

Решение. Вычислим дискриминант $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = -64$. Следовательно, $|D| = 64$. Поэтому Из формул (3.4) следует, что

$$z_1 = -\frac{-12}{2 \cdot 4} - \frac{\sqrt{64}}{2 \cdot 4}i \Rightarrow z_1 = \frac{3}{2} - \frac{8}{8}i \Rightarrow z_1 = 1,5 - i.$$

Из замечания (3.2) следует, что $z_2 = 1,5 + i$.
Действительная часть $\alpha = 1,5$. Мнимая часть $\beta = 1$.

$$\boxed{z_1 = 1,5 - i; \;\; z_2 = 1,5 + i; \;\alpha = 1,5; \;\beta = 1}.$$

Задача 3.3. Решить уравнение $3z^2-5z+4 = 0$ и найти действительную и мнимую части его корней.

Решение. Вычислим дискриминант $D = 5^2 - 4 \cdot \; 3 \cdot 4 = -23$. Таким образом, $|D| = 23$. Из формул (3.2) следует, что

$$z_1 = \frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{\sqrt{23}}{2 \cdot 3}i; \;\; z_1 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{23}}{6}i.$$

Из замечания (3.2) следует, что $z_2 = \dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{23}}{6}i$.

Действительная часть $\alpha = \dfrac{5}{6}$. Мнимая часть $\beta = \dfrac{\sqrt{23}}{6}$.

$$\boxed{z_1 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{23}}{6}i;\;\; z_2 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{23}}{6}i;\; \alpha = \frac{5}{6};\; \beta = \frac{\sqrt{23}}{6}}.$$

Замечание 3.3. Если второй коэффициент b квадратного уравнения является чётным числом, то формулы (3.4) можно переписать

$$z_1 = -\frac{\frac{b}{2}}{a} - \frac{\sqrt{\frac{|D|}{4}}}{a};\;\; z_2 = -\frac{\frac{b}{2}}{a} + \frac{\sqrt{\frac{|D|}{4}}}{a}. \qquad (3.5)$$

Задача 3.4. Решить уравнение $z^2+6z+90 = 0$ и найти действительную и мнимую части его корней.

Решение. Так как второй коэффициент уравнения равен 6, то, используя замечание 3.4, вычислим $\frac{D}{4} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 1\cdot\; 90 = 9 - 90 = -81.$

Следовательно, $\frac{|D|}{4} = 81$. Поскольку старший коэффициент уравнения $a \; = 1$, то деление на него в формулах (3.5) теряет смысл. Поэтому из данных формул следует, что

$$z_1 = -3 - \sqrt{81}i, \Rightarrow z_1 = -3 - 9i.$$

Так как z_2 является сопряжённым к z_1, то $z_2 = -3 + 9i$. Поэтому $\alpha = -3$, а $\beta = 9$.

Таким образом, $\boxed{z_1 = -3 - 9i;\; z_2 = -3 + 9i\,;\; \alpha = -3;\; \beta = 9}$.

Замечание 3.4. Заметим, что уравнение $4z^2 - 12z + 13 = 0$ из задачи 3.2 можно решить, используя чётность второго коэффициента:

$$z_1 = \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{-(6^2 - 4\cdot 13)}}{4}i \Rightarrow z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-(6^2 - 4\cdot 13)}}{4}i \Rightarrow z_1 = 1,5 - i.$$

Соответственно, $z_2 = 1,5 + i$.

Иногда, в приложениях, появляется неполное квадратное уравнение, имеющее вид

$$z^2 + a^2 = 0.$$

Для его решения достаточно воспользоваться формулой разности квадратов из школьного курса алгебры:

$$z^2 + a^2 = z^2 - (-a^2) = z^2 - a^2i^2 = (z + ai)(z - ai).$$

Далее уравнение распадется на два линейных уравнения $z + ai = 0$ и $z - ai = 0$, из которых следует, что $z_1 = -ai$, а $z_2 = ai$.

Задача 3.5. Решить уравнение $4z^2 + 25 = 0$ и найти действительную и мнимую части его корней.

Решение. Перепишем левую часть уравнения

$$4z^2 + 25 = 2^2z^2 + 5^2 = 2^2z^2 - (-5^2) = 2^2z^2 - 5^2i^2 =$$

$$= (2z + 5i)(2z - 5i).$$

В результате первоначальное уравнение распадается на два линейных уравнения: $2z + 5i = 0$ и $2z - 5i = 0$, из которых получаем, что $z_1 = -\frac{5}{2}i$, а $z_2 = \frac{5}{2}i$. Поэтому $\alpha = 0$, а $\beta = 2,5$.

Следовательно,

$$\boxed{z_1 = -2,5i;\ z_1 = 2,5i;\ \alpha = 0;\ \beta = 2,5i}.$$

§ 3.3. О приложениях комплексных чисел в экономике

В современной экономической теории[1] многие экономические показатели изучаются отдельно друг от друга, что не позволяет определить их настоящую роль при принятии экономических решений.

Например, при рассмотрении такого экономического показателя, как *валовая прибыль* G следует понимать, что он позволяет оценить только одну сторону сложного экономического явления – результаты производственного процесса. Поэтому, когда возникает ситуация принятия решений, невозможно ограничиться только *критерием максимума валовой прибыли.* В практической экономике не менее важным экономическим показателем являются показатели затрат на производство продукции – *издержки производства* C. Только зная их, можно, определив отношение валовой прибыли G к ним, найти *рентабельность* r. Так как именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть, является показателем экономической эффективности производства. Поэтому именно его используют как основной показатель для принятия экономического решения.

Необходимость одновременного моделирования двух экономических переменных – валовой прибыли и издержек производства можно реализовать, если рассматривать производственный результат как некоторое комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая она может быть представлена в таком виде:

$$Z = G + iC.$$

[1]Материал данного параграфа взят из статьи Светуньков С.Г. Комплекснозначная экономика (см. sergey.svetunkov.ru/economics/complex/files/11.pdf).

Рассматривая в моделировании число Z, можно одновременно учитывать и валовую прибыль G, и издержки производства C, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, выполняя действия с какой-либо одной комплексной переменной, одновременно выполняются действия с двумя действительными переменными[1].

Таким образом, использование комплексной переменной типа Z как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны.

Если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Ведь достаточно только просуммировать вещественную и мнимую части переменной Z, как можно получить известный показатель – *валовую выручку*:

$$Q = G + C.$$

А если определить отношение действительной части к мнимой, то можно найти не только арктангенс полярного угла комплексного числа Z, но и *рентабельность по себестоимости*:

$$r = \frac{G}{C}.$$

Следовательно, вычисляя значения одной комплексной переменной в ходе моделирования экономики, можно м найти значения не только двух исходных переменных, но и дополнительные показатели, являющиеся производными от них.

Так модуль Z

$$R = \sqrt{G^2 + C^2}$$

является экономическим показателем, отражающим *масштаб производства*. Его использование на практике может расширить диагностический аппарат в таком разделе экономики, как *анализ хозяйственной деятельности*. Отношение валовой выручки Q к масштабу R позволяет дать дополнительную характеристику производства, свойства которой могут быть полезны при осуществлении экономического анализа.

[1]Аналогично можно заметить, что любой товар также является носителем двух составляющих: потребительских свойств, объективно присущих товару, и цены – денежной оценки потребительских свойств товара конкретным потребителем. С учетом того, что потребительские свойства P товара и его цена C являются необходимыми показателями свойств товара, товар можно представить формулой $T = P + Ci$.

Не вдаваясь в дальнейшие подробности, можно сделать вывод о том, что применение комплексных чисел в экономических исследованиях определяет новые возможности для исследования экономики с помощью математического моделироваания.

ЛЕКЦИЯ 4.

§ 4.1. Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия

Исследования в физике, а в двадцатом столетии и в экономике, привели к тому, что область дифференциальных уравнений первого порядка оказалась тесной для исследований. Это привело к появлению дифференциальных уравнений высших порядков, то есть дифференциальных уравнений, связывающих неизвестную функцию с её производными высших порядков.

Первым из таких классов обыкновенных дифференциальных уравнений оказался класс дифференциальных уравнений второго порядка.

Определение 4.1. *Уравнение, связывающее неизвестную функцию одной переменной, её вторую и первую производные, а также аргумент, называется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.*

То есть, согласно определению, его можно представить в одном из следующих двух видов:

$$(1)\ \ F(y'', y', y, x) = 0;\ \ (2)\ \ y'' = f(y', y, x).$$

Представление (1) определяет дифференциальное уравнение, неразрешённое относительно второй производной, а представление (2) задаёт дифференциальное уравнение, разрешённое относительно второй производной.

Примерами таких уравнений являются, в частности, уравнения:

$$y'' = 2;\ yy'' = \left(y'\right)^2;\ y'' = x;\ y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Как и в случае дифференциальных уравнений первого порядка, можно определить *общее* и *частное* решения уравнений второго порядка[1].

Определение 4.2. *Общим решением дифференциального уравнения*

$$y'' = f(y', y, x) \tag{4.6}$$

называется множество явно заданных функций вида $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *таких, что:*
1) при подстановке в уравнение этих функций, а также их производных, уравнения обращаются в истинные равенства, то есть: $\varphi'' \equiv f(\varphi', \varphi, x)$;
2) для любого набора чисел (x_o, y_o, y_o') *существуют единственные константы* C_1 *и* C_2 *такие, что* $\varphi(x_o, C_1, C_2) \equiv y_o$.
(Здесь C_1 и C_2 – произвольные действительные константы.)

[1]Можно также определить общий и частный интегралы уравнений этого типа, но это выходит за рамки данного курса лекций.

В качестве иллюстрации данного определения рассмотрим задачу

Задача 4.1. Найти общее решение уравнения $y'' = 2$.

Решение. Так как $y'' = (y')'$, то представим $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2.$$

Умножив обе его части на dx: $d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 2dx$, проинтегрируем полученное равенство по x, (учитывая, что $\displaystyle\int d(f(x)) = f(x) + C$):

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\int dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + C_1.$$

Умножая далее последнее равенство на dx: $dy = (2x + C_1)dx$, проинтегрируем его как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int dy = \int (2x + C_1)dx \Rightarrow y = x^2 + C_1x + C_2.$$

Докажем, что полученное множество функций является общим решением заданного уравнения.

Так как $(x^2 + C_1x + C_2)' = 2x + C_1$, а $(2x + C_1)' = 2x$, то функции $y = x^2 + C_1x + C_2$ удовлетворяют данному дифференциальному уравнению.

Предположим, что $(x_o,\, y_o,\, y_o')$ – произвольный набор чисел. Покажем, что существует единственная пара чисел $(C_1,\, C_2)$, соответствующая этому набору. Подставим числа из набора в функции $y = x^2 + C_1x + C_2$ и их производные $y' = 2x + C_1$:

$$\begin{cases} x_o^2 + C_1x_o + C_2 = y_o, \\ 2x_o + C_1 = y_o'. \end{cases}$$

Нужно доказать, что данная система имеет единственное решение относительно констант C_1 и C_2. Так как из второго уравнения C_1 определяется единственным образом: $C_1 = y_o' - 2x_o$, поэтому из первого уравнения следует единственное представление для C_2:

$$C_2 = y_o - x_o^2 - (y_o' - 2x_o)x_o.$$

Таким образом, семейство функций $y = x^2 + C_1x + C_2$ является общим решением уравнения $y'' = 2$ по определению.

Следует заметить, что с точки зрения геометрии данное решение определяет семейство парабол в координатной плоскости XOY, ветви которых направлены вверх, зависящеее от двух констант-параметров C_1 и C_2.

Как и в случае решения дифференциальных уравнений первого порядка, для решения конкретных задач технического и экономического характера интерес представляет не общее, а частное решение дифференциального уравнения. Но, как следует из решения задачи 4.1, для определения частного решения дифференциального уравнения второго порядка нужно определить начальные условия, в которых недостаточно задать только состояние процесса в виде двух чисел x_o, y_o, определяющих значение неизвестной функции $y(x_o) = y_o$. Нужно задать еще одно условие, уточнющее поведение неизвестной функции.

Для определения второго условия существует два пути. Первый из них задаёт

Определение 4.3. *Под задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка понимается постановка задачи, в которой заданы само дифференциальное уравнение и два начальных условия, то есть*

$$\begin{cases} y'' = f(x,\, y,\, y'), \\ y(x_o) = y_o, \\ y'(x_o) = y'_o. \end{cases}$$

С точки зрения геометрии задача Коши определяет интегральную кривую в координатной плоскости XOY, проходящую через точку с координатами $(x_o;\, y_o)$ и имеющую в данной точке касательную, образующую с положительным направлением оси OX угол α: $\operatorname{tg}\alpha = y'_o$.

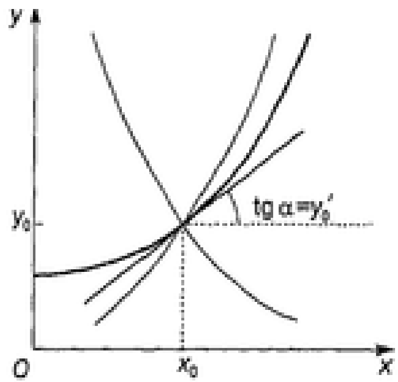

Рис. 4.1

Существование и единственность решения задачи Коши определяет

Теорема 4.1. (Коши) *Если функция $f(x,\, y,\, y')$ и её частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D трёхмерного пространства $(x;\, y;\, y')$, то в любой внутренней точке $(x_o;\, y_o;\, y'_o)$ данной области существует единственное решение.*

Второй путь связан с другим определением:

Определение 4.4. *Первой краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка называется постановка задачи, в которой заданы само дифференциальное уравнение и два условия, определяющих значения неизвестной функции в двух различных точках, то есть*

$$\begin{cases} y'' = f(x,\, y,\, y'), \\ y(x_o) = y_o, \\ y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

Из множества классов дифференциальных уравнений второго порядка выделим один класс

§ 4.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнения этого класса имеют множество приложений как в технике, так и в экономике. Немаловажную роль в этом играет тот факт, что решение этих уравнений связано не с интегрированием функций, а с линейной алгеброй. А так как большинство задач линейной алгебры решается числеными методами в таких пакетах, как Excel, Maple, Mathcad, Mathlab, то и решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами реализовано в этих пакетах.

Определение 4.5. *Дифференциальное уравнение вида*

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.7}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция на некотором интервале $(a; b)$, а p и q – действительные числа, называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Неоднородным это уравнение называется потому, что в правой части находится функция $f(x) \neq 0$. А линейным оно называется потому, что неизвестная функция y и её вторая y'' и первая y' производные имеют первую степень.

В том случае, когда функция $f(x) = 0$, имеет место

Определение 4.6. *Дифференциальное уравнение вида*

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{4.8}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Прежде, чем определить алгоритм нахождения общего решения уравнения (4.8), рассмотрим свойства частных решений этого уравнения.

4.2.1. Свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Свойство 4.1. *Если y_1 и y_2 – частные решения уравнения (4.8), то и их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2$ с произвольными коэффициентами C_1 и C_2 также является решением данного уравнения.*

Из линейных свойств первой и второй производной следует, что

$$(C_1y_1 + C_2y_2)' = C_1y_1' + C_2y_2',$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' = C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Поэтому, подставляя вместо y линейную комбинацию частных решений, а также её производные, с помощью алгебраических преобразований имеем

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) =$$

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2).$$

Так как y_1 и y_2 − частные решения уравнения (4.8), то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0;\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Следовательно,

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = 0.$$

Таким образом, линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2$ действительно является решением уравнения (4.8).

В курсе линейной алгебры было определено понятие линейной независимости векторов. Аналогично можно ввести

Определение 4.7. *Функции $y_1(x) \neq 0$ и $y_2(x) \neq 0$ называются линейно независимыми на интервале $(a;\, b)$, если $\forall\, x \in (a;\, b)$*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Из этого определения следует, что если C_1 и C_2 не равны нулю одновременно, то $\forall\, x \in (a;\, b)$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq -\frac{C_2}{C_1}.$$

Поэтому определение 4.7 эквивалентно следующему определению:

Определение 4.8. *Функции $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$ называются линейно независимыми на интервале $(a;\, b)$, если их отношение отлично от константы, то есть $\forall\, x \in (a;\, b)$*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq K,$$

где K − отличная от нуля константа.

Задача 4.2. Доказать, что функции e^{mx} и e^{nx} линейно независимы в области определения, если $m \neq n$.

Решение. Согласно определению 4.8 найдём отношение данных функций:

$$\frac{e^{mx}}{e^{nx}} = e^{(m-n)x}.$$

Так как $m \neq n$, то $\forall\, x \in (-\infty;\, \infty)$ данное отношение не может быть постоянным. Следовательно, функции e^{mx} и e^{nx} линейно независимы в области определения.

Задача 4.3. Доказать, что для любого $m \in \mathbb{R}$ функции e^{mx} и xe^{mx} линейно независимы в области определения.

Решение. Согласно определению 4.8 найдём отношение данных функций:

$$\frac{xe^{mx}}{xe^{mx}} = x.$$

Так как данное отношение не является константой, то функции e^{mx} и xe^{mx} линейно независимы в области определения.

Задача 4.4. Доказать, что для любого $\beta \neq 0$ функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ линейно независимы в области определения.

Решение. Согласно определению 4.8 составим отношение данных функций:

$$\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \operatorname{tg} x.$$

Так как данное отношение не является константой, то функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ линейно независимы в области определения.

Из теории дифференциальных уравнений известно

Свойство 4.2. *Если частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (4.8) линейно независимы на некотором интервале $(a;\, b)$, то определитель, составленный из них, отличен от нуля. То есть*

$$\forall\, x \in (a;\, b)\ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.2.2. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Теорема 4.2. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые на интервале $(a;\, b)$ частные решения уравнения (4.8), то функция*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{4.9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы, является общим решением уравнения (4.8).

Так как из свойства 4.1 следует, что функция (4.9) удовлетворяет уравнению (4.8), то остаётся только убедиться в том, что для любого набора чисел $(x_o;\, y_o;\, y_o')$ существует соответствующая ему единственная пара чисел $(C_{10};\, C_{20})$.

Найдём производную $y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$. Далее, подставив числа из выбранного произвольного набора $(x_o;\, y_o;\, y_o')$ в функцию (4.9) и её производную, составим систему уравнений

$$\begin{cases} y_o = C_1 y_1(x_o) + C_2 y_2(x_o), \\ y_o' = C_1 y_1'(x_o) + C_2 y_2'(x_o). \end{cases}$$

В данной системе неизвестными числами являются C_1 и C_2. Составим главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Так как по условию $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − линейно независимые на интервале $(a;\, b)$ частные решения уравнения (4.8), то, согласно свойству 4.2, данный определитель не равен нулю. Следовательно, из правила Крамера следует, что составленная система имеет единственное решение $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$.

Таким образом, **чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

$$\boldsymbol{y'' + py' + qy = 0},$$

нужно найти два линейно независимых частных решения этого уравнения и составить их линейную комбинацию

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}.$$

4.2.3. Алгоритм определения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В 1743 году Эйлер[1], используя идею, реализованную Н. Бернулли[2] при решении некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка,

[1]Эйлер Леонард (Euler Leonhard, 1707-1783) − великий математик XVIII столетия, автор более 800 работ в области математики, физики, астрономии, картографии, кораблестроения, теории музыки и др. Бо́льшую часть жизни прожил в России.

[2]Бернулли Николай II (Bernoulli Nikolaus, 1695-1726) − швейцарский математик начала XVIII столетия, сын Иоганна Бернулли.

опубликовал алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений.

В основе алгоритма лежит тот факт, что производная экспоненты e^{kx} отличается от неё только коэффициентом:

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx};\ \left(e^{kx}\right)'' = k^2e^{kx}.$$

Предположим, что неизвестная функция $y = e^{kx}$, где k – неизвестный коэффициент, является частным решением уравнения (4.8). Подставим эту функцию и её производные в уравнение (4.8):

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Вынесем e^{kx}, как общий множитель за скобки:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

так как $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{kx} \neq 0$, то полученное произведение может быть равно нулю только в случае, когда

$$\boldsymbol{k^2 + pk + q = 0}. \tag{4.10}$$

Определение 4.9. *Уравнение (4.10) называется характеристическим уравнением линейного однородного уравнения (4.8).*

В силу того, что квадратное уравнение (4.10) имеет два корня, линейное уравнение может иметь не более двух частных линейно независимых решений.

Теорема 4.3. Об общем решении однородного уравнения

1) *Если уравнение (4.10) имеет два действительных различных корня, то есть $k_1 \neq k_2$, то уравнение (4.8) имеет два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = e^{k_2x}$, а его общее решение имеет вид:*

$$\boldsymbol{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}.$$

2) *Если уравнение (4.10) имеет два одинаковых действительных корня, то есть $k_1 = k_2 = k$, то уравнение (4.8) имеет два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$, а его общее решение имеет вид:*

$$\boldsymbol{y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}}.$$

3) *Если уравнение (4.10) имеет два различных комплексных корня, то есть $k_1 = \alpha - \beta i$ и $k_2 = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, то уравнение (4.8) имеет два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$,*

а его общее решение имеет вид:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)}.$$

Тот факт, что каждое из частных решений y_1 и y_2 удовлетворяет уравнению 4.8 в каждом из трёх случаев, проверяется непосредственной подстановкой этих решений и их производных в само уравнение.

Кроме этого, благодаря теореме 4.2, достаточно доказать, что в каждом из трёх случаев частные решения y_1 и y_2 являются линейно независимыми функциями. Соответствующими доказательствами являются решения задач 4.2-4.4.

Для иллюстрации теоремы 4.3 приведём решение нескольких однородных уравнений.

Задача 4.5. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' - 5 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного линейного однородного дифференциального уравнения

$$k^2 - 4k - 5 = 0.$$

Его корнями являются действительные и различные числа $k_1 = -1$ и $k_2 = 5$. Поэтому в силу первого утверждения теоремы 4.3 находим частные решения заданного уравнения:

$$y_1 = e^{-x};\ y_2 = e^{5x}.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}}.$$

Задача 4.6. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного линейного однородного дифференциального уравнения

$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$

Его корнями являются действительные одинаковые $k_1 = -3$ и $k_2 = -3$. Поэтому из теоремы 4.3 следует, что частные решения заданного уравнения имеют вид:

$$y_1 = e^{-3x};\ y_2 = xe^{-3x}.$$

Согласно выводу теоремы 4.2, получаем общее решение данного уравнения:

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}}.$$

Задача 4.7. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного линейного однородного дифференциального уравнения

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Так как дискриминант полученного уравнения $D = -16 < 0$, то уравнение имеет комплексные сопряжённые корни $k_1 = -1 - 2i$ и $k_2 = -1 + 2i$. Действительная часть корней $\alpha = -1$, а мнимая часть[1] корней $\beta = 2$. Следовательно, согласно третьему утверждению теоремы 4.3, частные решения заданного уравнения имеют вид:

$$y_1 = e^{-x} \cos 2x; \; y_2 = e^{-x} \sin 2x.$$

А его общее решение выглядит так:

$$\boxed{y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)}.$$

Задача 4.8. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного линейного однородного дифференциального уравнения

$$k^2 - 3k = 0.$$

Вынесем общий множитель k за скобки: $k(k - 3) = 0$. Корнями данного уравнения являются действительные и различные числа $k_1 = 0$ и $k_2 = 3$. Тогда, в силу первого утверждения теоремы 4.3, частные решения заданного уравнения выглядят следующим образом:

$$y_1 = e^{0x} \Rightarrow y_1 = 1; \; y_2 = e^{3x}.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{3x}}.$$

Задача 4.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного линейного однородного дифференциального уравнения

$$k^2 + 2 = 0.$$

Представив $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, преобразуем левую часть уравнения, разложив её на линейные множители:

$$k^2+2 = k^2+\left(\sqrt{2}\right)^2 = k^2-\left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right) = k^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 i^2 = (k+\sqrt{2}i)(k-\sqrt{2}i).$$

[1]Напоминаем, что если действительная часть комплексных корней α может быть как неотрицательной, так и отрицательной, то мнимая часть β может быть только положительной.

Следовательно, $k_1 = -\sqrt{2}i$, а $k_2 = \sqrt{2}i$. Так как корни являются мнимыми числами, поэтому действительная часть корней $\alpha = 0$, а мнимая часть корней $\beta = \sqrt{2}$. Поэтому частные решения заданного уравнения имеют вид:

$$y_1 = \cos\sqrt{2}x;\ y_2 = \sin\sqrt{2}x.$$

А общее решение уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x}.$$

Умея находить частные решения уравнения (4.8), вернёмся к уравнению (4.2).

ЛЕКЦИЯ 5.

§ 5.1. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Предположим, что y – общее решение уравнения (4.7). Обозначим через y_o общее решение соответствующего ему однородного уравнения (4.8). Допустим также, что $\bar{y}$ – некоторое частное решение уравнения (4.7).

Теорема 5.1. Об общем решении неоднородного уравнения

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (4.7) является суммой общего решения соответствующего линейного однородного уравнения (4.8) и любого частного решения данного неоднородного уравнения (4.7).

То есть,

$$y = y_o + \bar{y}.$$

Доказательство данной теоремы полностью повторяет соответствующие доказательства свойства 4.1 и теоремы 4.2.

Таким образом, задача нахождения общего решения уравнения (4.7) зависит от определения его частного решения.

§ 5.2. Определение частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов

В технических и экономических приложениях существует большое количество задач, решение которых определяется неоднородными линейными дифференциальными уравнениями со специальной правой частью.

Рассмотрим несколько таких случаев.

5.2.1. Уравнения с правой частью вида $f(x) = P_n(x)$

Предположим, что

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o.$$

Для каждого из уравнений с подобной правой частью частное решение ищется в виде многочлена

$$\bar{y} = x^r A_n(x), \tag{5.11}$$

где $A_n(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, а показатель степени r совпадает с числом тех корней соответствующего характеристического уравнения, которые равны нулю.

Рассмотрим в виде таблицы, как определяется соответствие между многочленами $P_n(x)$ и $A_n(x)$

n	$P_n(x)$	$A_n(x)$
0	$3;\ \sqrt{2};\ \pi$	A
1	$4x;\ 2x-3$	$Ax+B$
2	$x^2;\ 5x^2-2x;\ 4x^2-3x+1$	Ax^2+Bx+C

(5.12)

Задача 5.1. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = 4x^2 - 3x + 6$.
Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

и найдём его общее решение.

Определим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 3 = 0$ и найдём его корни $k_1 = -3$ и $k_2 = 1$. Так как соответствующие частные решения однородного уравнения $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = e^x$, то согласно теореме 4.3 общее решение однородного уравнения

$$y_o = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x. \tag{5.13}$$

Далее найдём частное решение $\bar{y}$. Поскольку правая часть уравнения $f(x) = 4x^2 - 3x + 6$, то $P_2(x) = 4x^2 - 3x + 6$ – многочлен второй степени. Поэтому $n = 2$, и, согласно таблице (5.12), $A_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Так как ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю, то коэффициент $r = 0$. Следовательно, согласно (5.11), частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C. \tag{5.14}$$

В силу того, что $\bar{y}$ — решение уравнения, то при подстановке в уравнение его и его производных уравнение должно обратиться в истинное равенство. Поэтому нужно найти соответствующие производные:

$$\bar{y}^{'} = 2Ax + B;\ \bar{y}^{''} = 2A.$$

Подставив в левую часть заданного уравнения вместо y, $y^{'}$, $y^{''}$ соответствующие $\bar{y}$, $\bar{y}^{'}$, $\bar{y}^{''}$, получим

$$2A + 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 - 3x + 6.$$

Раскрывая скобки в левой части и приводя в ней подобные члены, имеем

$$-3Ax^2 + (4A - 3B)x + 2B - 3C = 4x^2 - 3x + 6.$$

Так как *два многочлена называются равными, если у них совпадают коэффициенты при соответствующих степенях переменной величины*, то, приравняв коэффициенты перед степенями x^2, x и свободные члены, составим систему линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -3A & = \ \ 4, \\ \ \ 4A - 3B & = -3, \\ \ \ 2A + 2B - 3C & = \ \ 6. \end{cases}$$

Решив её получим, что $A = -\dfrac{4}{3}$; $B = -\dfrac{7}{9}$; $C = -\dfrac{68}{27}$. Подставив найденные коэффициенты в представление частного решения (5.14), получим

$$\bar{y} = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{92}{27}. \tag{5.15}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.13 и 5.15, поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{36x^2 + 21x + 92}{27}}.$$

Замечание 5.1. Следует заметить, что формальная подстановка частного решения и его производных в уравнение часто связана с большим количеством тождественных алгебраических преобразований, элементарная неточность в которых ведёт к неправильно составленной системе.

Этот процесс можно упростить, если сразу приступить к созданию соответствующей системы, ориентируясь на число неизвестных в частном решении. Для этого нужно не частное решение и его производные подставлять в неоднородное уравнение, а сразу составлять уравнения системы следующим образом:

Как было сказано выше, частное решение $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$ и его производные $\bar{y}' = 2Ax+B$, $\bar{y}'' = 2A$ содержат 3 неизвестных коэффициента. И для их нахождения нужно составить три уравнения относительно степеней квадратного трехчлена и его свободного коэффициента.

Покажем, как это можно сделать.

Выпишем частное решение и коэффициент перед ним в уравнении, а под ним, аналогично, выпишем первую и вторую его производные с соответствующими коэффицентами из уравнения:

$$\begin{array}{r|l} -3 & \bar{y} = Ax^2 + Bx + C; \\ 2 & \bar{y}' = 2Ax + B; \\ 1 & \bar{y}'' = 2A. \end{array}$$

Далее, составим уравнение на коэффициенты при x^2:

Так как x^2 входит только в частное решение, то нужно коэффициент перед ним домножить на выписанный коэффициент перед частным решением и приравнять полученное произведение коэффициенту перед x^2 в правой части неоднородного дифференциального уравнения:

$$x^2 \,:\, -3A = 4.$$

Точно также, собирая коэффициенты перед x в производной и частном решении и умножая их на соответствующие коэффициенты 2 и -3, приравняем их коэффициенту перед x в правой части неоднородного уравнения:

$$2 \cdot 2A + (-3) \cdot B = -3 \Rightarrow 4A - 3B = -3.$$

И, наконец, соберём свободные члены во второй и первой производных, а также в частном решении, не забыв домножить их на соответствующие коэффициенты из левой части уравнения, и приравняем полученную сумму свободному члену из правой части неоднородного уравнения:

$$1 \cdot 2A + 2 \cdot B + (-3) \cdot C = 6 \Rightarrow 2A + 2B - 3C = 6.$$

В итоге получим точно такую же, как и выше систему

$$\begin{cases} -3A & = 4, \\ 4A - 3B & = -3, \\ 2A + 2B - 3C & = 6, \end{cases}$$

но при этом затратив на её создание меньшие усилия.

Задача 5.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' = 8x + 6$.

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' = 0$$

и найдём его общее решение.

Определим характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ и найдём его корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 4$. Следовательно, соответствующие частные решения однородного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = e^{4x}$. Поэтому, согласно теореме 4.3 общее решение однородного уравнения

$$y_o = C_1 + C_2 e^{4x}. \tag{5.16}$$

Далее найдём частное решение $\bar{y}$. Поскольку правая часть уравнения $f(x) = 8x + 6$ – то $P_1(x) = 8x + 6$ – многочлен первой степени. Поэтому $n = 1$ и, согласно таблице (5.12), $A_1(x) = Ax + B$. Так как только один из корней характеристического уравнения равен нулю, то коэффициент $r = 1$. Следовательно, согласно (5.11), частное решение данного уравнения следует искать в виде: $\bar{y} = x(Ax + B)$ или

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx. \tag{5.17}$$

Найдём его первую и вторую производные и, пользуясь замечанием 5.1, выпишем их вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} 0 & \bar{y} = Ax^2 + Bx; \\ -4 & \bar{y}' = 2Ax + B; \\ 1 & \bar{y}'' = 2A. \end{array}$$

Выпишем коэффициенты перед x^2: $0 \cdot A = 0$;
Выпишем коэффициенты перед x: $-4 \cdot 2A = 8$;
Выпишем свободные члены: $1 \cdot 2A + (-4) \cdot B = 6$.

Так как первое равенство является истинным при любых значениях A, то система содержит два уравнения, образованные из равенств коэффициентов перед x и свободных членов:

$$\begin{cases} -8A \qquad = 8, \\ \ \ 2A - 4B = 6. \end{cases}$$

Решив систему, находим $A = -1$; $B = -2$. Подставив значения коэффициентов в (5.17), получим частное решение заданного дифференциального неоднородного уравнения:

$$\bar{y} = -x^2 - 2x. \tag{5.18}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.16 и 5.18, поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{4x} - x - 2}.$$

Замечание 5.2. Нужно отметить, что правильное составление частного решения неоднородного дифференциального уравнения удаётся не всегда и не всем. Поэтому наличие тождества $0 \cdot A = 0$, которое потверждает, что частное решение в виде $\bar{y} = Ax^2 + Bx$ было составлено верно, является очень полезным фактом, потверждающим истинность предыдущих этапов решения.

Второй случай представляют

5.2.2. Уравнения с правой частью вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$.

Допустим, что

$$\boldsymbol{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o},$$

а α – некоторое действительное число.

Для каждого из уравнений с подобной правой частью частное решение ищется в виде

$$\boldsymbol{\bar{y} = x^r A_n(x) e^{ax}}. \tag{5.19}$$

При этом $A_n(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, а показатель степени r совпадает с числом тех корней соответствующего характеристического уравнения, которые равны коэффициенту a в показателе экспоненты .

Задача 5.3. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 13y = 4e^{-3x}$.

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

и найдём его общее решение.

Определим характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 13 = 0$ и найдём его корни. Так дискриминант данного уравнения $D = -16 < 0$, то уравнение имеет комплексные корни $k_1 = -3 - 2i$ и $k_2 = -3 + 2i$ с действительной частью $\alpha = -3$ и мнимой частью $\beta = 2$. Следовательно, согласно теореме 4.3 частные решения однородного уравнения

$$y_1 = e^{-3x}\cos 2x \text{ и } y_2 = e^{-3x}\sin 2x,$$

а его общее решение

$$y_o = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x). \tag{5.20}$$

Далее найдём частное решение $\bar{y}$. Поскольку правая часть уравнения $f(x) = 4e^{-3x}$, то $P_o(x) = 4$ – многочлен нулевой степени. Поэтому $n = 0$ и, согласно таблице (5.12), $A_o(x) = A$.

Так как $k_1 = -3-2i \neq -3$ и $k_2 = -3+2i \neq -3$, то коэффициент $r = 0$. Поэтому из (5.19) следует, что частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = Ae^{-3x}. \tag{5.21}$$

Найдём его первую и вторую производные и, пользуясь замечанием 5.1, выпишем их вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} 13 & \bar{y} = Ae^{-3x}; \\ 6 & \bar{y}' = -3Ae^{-3x}; \\ 1 & \bar{y}'' = 9Ae^{-3x}. \end{array}$$

Поскольку неизвестен только один коэффициент A перед экспонентой e^{-3x}, то его можно найти, выписав коэффициенты перед экспонентой:

$$13 \cdot A + 6 \cdot (-3)A + 1 \cdot 9A = 4 \Rightarrow 4A = 4 \Rightarrow A = 1.$$

Подставив значение A в (5.21), получим частное решение заданного дифференциального неоднородного уравнения:

$$\bar{y} = e^{-3x}. \tag{5.22}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.20 и 5.22, поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-3x}}.$$

Задача 5.4. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = (2x+7)e^{2x}$.

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

и найдём его общее решение.

Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 4 = 0$. Так дискриминант уравнения $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2 = 2$. Поэтому, согласно теореме 4.3 частные решения однородного уравнения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$, а его общее решение

$$y_o = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}. \tag{5.23}$$

Далее найдём частное решение $\bar{y}$. Поскольку правая часть уравнения $f(x) = (2x+7)e^{2x}$, то $P_1(x) = 2x+7$ – многочлен первой степени. А значит $n = 1$ и, согласно таблице (5.12), $A_1(x) = Ax + B$. Так как $k_1 = k_2 = 2 = a$, то коэффициент $r = 2$. Следовательно, согласно (5.19), частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = x^2(Ax+B)e^{2x} \text{ или } \bar{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}. \tag{5.24}$$

Найдём его первую и вторую производные:

$$\left((Ax^3+Bx^2)e^{2x}\right)' = \left(Ax^3+Bx^2\right)' e^{2x} + \left(Ax^3+Bx^2\right)\left(e^{2x}\right)' =$$
$$= \left(3Ax^2+2Bx\right)e^{2x} + 2\left(Ax^3+Bx^2\right)\left(e^{2x}\right) =$$
$$= \left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right)e^{2x};$$
$$\left((2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx)e^{2x}\right)' =$$
$$= \left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right)' e^{2x} + \left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right)\left(e^{2x}\right)' =$$
$$= \left(6Ax^2+2(3A+2B)x+2B\right)e^{2x} + 2\left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right)e^{2x} =$$
$$= (4Ax^3+(12A+4B)x^2+(6A+6B)x+2B)e^{2x}.$$

Используя замечание 5.1, выпишем частное решение и его производные вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} 4 & \bar{y} = (Ax^3+Bx^2)e^{2x}; \\ -4 & \bar{y}' = \left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right)e^{2x}; \\ 1 & \bar{y}'' = (4Ax^3+(12A+4B)x^2+(6A+6B)x+2B)e^{2x}. \end{array}$$

В данном случае неизвестными являются два коэффициента: A и B. Поэтому нужно составить систему из двух линейных уравнений. А так как сравнивать нужно коэффициенты перед выражениями x^3e^{2x}, x^2e^{2x}, xe^{2x} и e^{2x}, то равенств будет четыре, и два из них должны оказаться тождествами.

Выпишем соответствующие равенства:

$$x^3e^{2x}:\ 1\cdot 4A+(-4)\cdot 2A+4\cdot A=0 \Rightarrow 0\equiv 0;$$
$$x^2e^{2x}:\ 1\cdot(12A+4B)+(-4)\cdot(3A+2B)+4\cdot B=0 \Rightarrow 0\equiv 0;$$
$$xe^{2x}:\ 1\cdot(6A+6B)+(-4)\cdot 2B=2 \Rightarrow 3A-B=1;$$
$$e^{2x}:\ 1\cdot 2B=7 \Rightarrow B=3,5.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} 3A-B=1, \\ B=3,5. \end{cases}$$

Определив $A=1,5$ и $B=3,5$, подставим найденные значения в (5.24) и определим соответствующее частное решение неоднородного уравнения

$$\bar{y} = (1,5x^3+3,5x^2)e^{2x}. \tag{5.25}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.23 и 5.25, поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = (1,5x^3+3,5x^2+C_2x+C_1)e^{2x}}.$$

Третий случай определяют

5.2.3. Уравнения с правой частью вида $\boldsymbol{f(x) = P\cos bx + Q\sin bx}$

Допустим, что P, Q, $b \in \mathbb{R}$. Для каждого из уравнений с подобной правой частью частное решение ищется в виде

$$\boldsymbol{\bar{y} = x^r(A\cos bx + B\sin bx)}. \tag{5.26}$$

Здесь A и B – неопределённые коэффициенты, а показатель степени r совпадает с числом мнимых корней соответствующего характеристического уравнения, равных bi.

Так как для рассматриваемых уравнений характеристические уравнения являются квадратными и имеют только действительные коэффициенты, то r может равняться только нулю или единице.

Задача 5.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y = 3\cos 2x + 6\sin 2x.$$

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y = 0$$

и найдём его общее решение.

Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4 = 0$, а его корни равны $k_1 = -2$ и $k_2 = 2$. Поэтому, согласно теореме 4.3 частные решения однородного уравнения $y_1 = e^{-2x}$ и $y_2 = e^{2x}$, а его общее решение

$$y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}. \tag{5.27}$$

Найдём частное решение $\bar{y}$. Поскольку правая часть уравнения $f(x) = 3\cos 2x + 6\sin 2x$, то сравним корни характеристического уравнения с мнимым числом $bi = 2i$. Так корни характеристического уравнения – действительные числа, то коэффициент $r = 0$. Следовательно, согласно (5.26), частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x. \tag{5.28}$$

Найдём его первую и вторую производные:

$$\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;\ \bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Используя замечание 5.1, выпишем частное решение и его производные вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} -4 & \bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x; \\ 0 & \bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x; \\ 1 & \bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x. \end{array}$$

Приравнивая коэффициенты перед $\cos 2x$ и $\sin 2x$, вычислим A и B:
$\cos 2x:\ 1\cdot(-4A) + 0\cdot 2B + (-4)\cdot A = 3 \Rightarrow -8A = 3 \Rightarrow A = -0,375;$
$\sin 2x:\ 1\cdot(-4B) + 0\cdot(-2A) + (-4)\cdot B = 6 \Rightarrow B = 0,75.$

Далее, подставив их в (5.28), найдём частное решение данного неоднородного уравнения:

$$\bar{y} = 0,75\sin 2x - 0,375\cos 2x. \tag{5.29}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.27 и 5.29, поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + 0,75\sin 2x - 0,375\cos 2x}.$$

Задача 5.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 12\cos 3x.$$

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 9y = 0$$

и найдём его общее решение.

Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 9 = 0$, а его корни равны $k_1 = -3i$ и $k_2 = 3i$. Поэтому, согласно теореме 4.3 частные решения однородного уравнения $y_1 = \cos 3x$ и $y_2 = \sin 3x$, а его общее решение

$$y_o = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x. \tag{5.30}$$

Найдём частное решение $\bar{y}$. Так как правая часть уравнения $f(x) = 12\cos 3x$, то мнимое число $bi = 3i$ совпадает с корнем $k_2 = 3i$ характеристического уравнения. Поэтому коэффициент $r = 1$. Следовательно, согласно (5.26), частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = x(A\cos 3x + B\sin 3x). \tag{5.31}$$

Используя производную произведения двух функций, найдём $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$:

$$(x(A\cos 3x + B\sin 3x))' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}' = (3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x.$$

$$((3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x)' =$$

$$= 3B\cos 3x - 3(3Bx + A)\sin 3x - 3A\sin 3x + 3(-3Ax + B)\cos 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}'' = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x.$$

Используя замечание 5.1, выпишем частное решение и его производные вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} 9 & \bar{y} = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x; \\ 0 & \bar{y}' = (3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x; \\ 1 & \bar{y}'' = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x. \end{array}$$

Здесь неизвестными являются два коэффициента: A и B. Поэтому нужно составить систему из двух линейных уравнений. А так как сравнивать надо коэффициенты перед выражениями $x\cos 3x$, $x\sin 3x, \cos 3x$ и $\sin 3x$, то равенств будет четыре, и два из них должны оказаться тождествами.

Выпишем соответствующие равенства:

$$x\cos 3x: \ 1\cdot(-9A) + 0\cdot 3B + 9\cdot A = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0;$$

$$x\sin 3x: \ 1\cdot(-9B) + 0\cdot(-3A) + 9\cdot B = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0;$$

$$\cos 3x: \ 1\cdot 6B + 0\cdot A = 12 \Rightarrow B = 2;$$

$$\sin 3x: \ 1\cdot(-6A) + 0\cdot B = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Подставим найденные значения $A = 0$ и $B = 2$ в (5.31) и определим соответствующее частное решение неоднородного уравнения

$$\bar{y} = 2x\sin 3x. \tag{5.32}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений (5.30) и (5.32), поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y = C_1\cos 3x + (2x + C_2)\sin 3x}.$$

Обобщением первых трёх случаев является

5.2.4. Уравнения с правой частью вида $\boldsymbol{f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)}$

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – некоторые многочлены с действительными коэффициентами, имеющие степени n и m соответственно, а a и b – действительные числа.

Для каждого из уравнений с подобной правой частью частное решение ищется в виде

$$\boldsymbol{\bar{y} = x^r e^{ax}(A_t(x)\cos bx + B_t(x)\sin bx)}. \tag{5.33}$$

Здесь $t = \max(n,\, m)$; $A_t(x)$, $B_t(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами степени t, а число r показывает, сколько раз комплексное число $a+bi$ является корнем соответствующего характеристического уравнения.

Задача 5.7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{-3x}\sin 2x.$$

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

и найдём его общее решение.

Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2+5k+6=0$, а его корни равны $k_1 = -3$ и $k_2 = -2$. Поэтому, согласно теореме 4.3, частные решения однородного уравнения $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = e^{-2x}$, а его общее решение

$$y_o = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}. \tag{5.34}$$

Найдём частное решение $\bar{y}$. Так как правая часть уравнения $f(x) = 4e^{-3x}\sin 2x$, то комплексное число $bi = -3+2i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения. Это означает, что коэффициент $r = 0$. В правой части уравнения перед $\sin 2x$ присутствует многочлен $Q_o(x) = 4$. Так как $\cos 2x$ в правой части уравнения отсутствует, то многочлен $P_o(x) = 0$. Поэтому $t = \max(0;\, 0) = 0$. Следовательно, согласно (5.26), частное решение данного уравнения содержит два многочлена нулевой степени с неопределёнными коэффициентами: $A_o(x) = A$ и $B_o(x) = B$. Таким образом, частное решение данного неоднородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x). \tag{5.35}$$

Вычислим $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$:

$$\left(e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)\right)' =$$

$$= \left(e^{-3x}\right)' (A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-3x}\,(A\cos 2x + B\sin 2x)' =$$
$$= -3e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-3x}\,(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{y}' = e^{-3x}\left((-3A+2B)\cos 2x - (2A+3B)\sin 2x\right);$$
$$\left(e^{-3x}\left((-3A+2B)\cos 2x - (2A+3B)\sin 2x\right)\right)' =$$
$$= \left(e^{-3x}\right)' \left((-3A+2B)\cos 2x - (2A+3B)\sin 2x\right) +$$
$$+ e^{-3x}\left((-3A+2B)\cos 2x - (2A+3B)\sin 2x\right)' =$$
$$-3e^{-3x}\left((-3A+2B)\cos 2x - (2A+3B)\sin 2x\right) +$$

$$+e^{-3x}\left(-2(-3A+2B)\sin 2x-2(2A+3B)\cos 2x\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{y}''=e^{-3x}\left((5A-12B)\cos 2x+(12A+5B)\sin 2x\right).$$

Используя замечание 5.1, выпишем частное решение и его производные вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{c|l} 6 & \bar{y}=e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x); \\ 5 & \bar{y}'=e^{-3x}\left((-3A+2B)\cos 2x-(2A+3B)\sin 2x\right); \\ 1 & \bar{y}''=e^{-3x}\left((5A-12B)\cos 2x+(12A+5B)\sin 2x\right). \end{array}$$

Здесь неизвестными являются два коэффициента: A и B. Поэтому нужно составить систему из двух линейных уравнений. Для этого надо сравнить коэффициенты перед функциями $e^{-3x}\cos 2x$ и $e^{-3x}\sin 2x$ в левой и правой частях уравнения.

Выпишем соответствующие равенства:

$$e^{-3x}\cos 2x:\ 1\cdot(5A-12B)+5\cdot(-3A+2B)+6\cdot A=0\Rightarrow -4A-2B=0;$$

$$e^{-3x}\sin 2x:\ 1\cdot(12A+5B)+5\cdot(-2A-3B)+6\cdot B=4\Rightarrow 2A-4B=4.$$

В итоге, получаем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2A+B=0, \\ A+2B=2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A=-\dfrac{2}{3}$ и $B=\dfrac{4}{3}$. Подставив эти значения в (5.35), определим соответствующее частное решение неоднородного уравнения

$$\bar{y}=\frac{3C_1+4\sin 2x-2\cos 2x}{3}e^{-3x}. \tag{5.36}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений (5.34) и (5.36), поэтому в итоге получаем

$$\boxed{y=\frac{3C_1+4\sin 2x-2\cos 2x}{3}e^{-3x}+C_2e^{-2x}}.$$

Задача 5.8. Решить задачу Коши $y''-y=6e^{2x},\ y(0)=3,\ y'(0)=7.$

Решение. Найдём общее решение данного уравнения. Так как его однородное уравнение $y''-y=0$, то соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2-1=0$. А его корнями являются числа $k_1=-1$ и $k_2=1$. Поэтому, согласно теореме 4.3, частные решения однородного уравнения $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{x}$, а его общее решение

$$y_o=C_1e^{-x}+C_2e^{x}. \tag{5.37}$$

Так как правая часть уравнения $f(x)=6e^{2x}$, то $P_o(x)=6$. Поэтому, как и в задаче 5.3, $A_o(x)=A$.

Коэффициент $r = 0$ потому, что $k_1 = -1 \neq \alpha = 2$ и $k_2 = 1 \neq \alpha = 2$. Поэтому из (5.19) следует, что частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = Ae^{2x}. \tag{5.38}$$

Найдём его первую и вторую производные и, пользуясь замечанием 5.1, выпишем их вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} -1 & \bar{y} = Ae^{2x}; \\ 0 & \bar{y}' = 2Ae^{2x}; \\ 1 & \bar{y}'' = 4Ae^{2x}. \end{array}$$

Поскольку неизвестен только один коэффициент A перед экспонентой e^{-3x}, то его можно найти, выписав коэффициенты перед экспонентой:

$$1 \cdot 4A + (-1) \cdot A = 6 \Rightarrow 3A = 6 \Rightarrow A = 2.$$

Подставив значение A в (5.38), получим частное решение заданного дифференциального неоднородного уравнения:

$$\bar{y} = 2e^{2x}. \tag{5.39}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.37 и 5.39, поэтому в итоге получаем

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + 2e^{2x}. \tag{5.40}$$

Далее найдём производную от общего решения

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + 4e^{2x}. \tag{5.41}$$

Подставим начальные данные $x = 0$, $y = 3$ и $y' = 7$ в представления общего решения (5.40) и его производной (5.41):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 3, \\ -C_1 + C_2 + 4 = 7. \end{cases}$$

Складывая уравнения и приводя подобные, получим $C_2 = 2$. А значит $C_1 = -1$.

Подставив найденные значения констант в (5.40), получим решение задачи Коши:

$$\boxed{y = 2e^{x} - e^{-x} + 2e^{2x}}.$$

Задача 5.9. Решить краевую задачу

$$y'' + y = 3\sin 2x,\ y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Решение. Найдём общее решение данного уравнения. Его однородное уравнение имеет вид $y'' + y = 0$, а соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Корнями являются мнимые числа $k_1 = -i$ и $k_2 = i$, действительная часть которых $\alpha = 0$, а мнимая часть $\beta = 1$. Поэтому, согласно теореме 4.3, частные решения однородного уравнения $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$, а его общее решение

$$y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{5.42}$$

Так как правая часть заданного уравнения $f(x) = 3 \sin 2x$, то $P_o(x) = 0$, а $Q_o(x) = 3$. Поэтому соответствующие многочлены с неопределёнными коэффициентами $A_o(x) = A$ и $B_o(x) = B$.

В силу того, что мнимое число

$$bi = 2i \neq k_1 = -i \text{ и } bi = 2i \neq k_2 = i,$$

коэффициент $r = 0$. Поэтому из (5.19) следует, что частное решение данного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x. \tag{5.43}$$

Найдём его первую и вторую производные и, пользуясь замечанием 5.1, выпишем их вместе с их коэффициентами в уравнении:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x; \\ 0 & \bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x; \\ 1 & \bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x. \end{array}$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B составим уравнения из коэффициентов перед $\cos 2x$ и $\sin 2x$.

$$\cos 2x: \ 1 \cdot (-4A) + 1 \cdot A = 0 \Rightarrow -3A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

$$\sin 2x: \ 1 \cdot (-4B) + 1 \cdot B = 3 \Rightarrow -3B = 3 \Rightarrow B = -1.$$

Подставив значения A и B в (5.43), получим частное решение заданного дифференциального неоднородного уравнения:

$$\bar{y} = -\sin 2x. \tag{5.44}$$

Согласно теореме 5.1 общее решение заданного уравнения является суммой решений 5.42 и 5.44, поэтому в итоге получаем

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin 2x. \tag{5.45}$$

Подставим последовательно краевые условия $x = 0$, $y = 1$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 2$ в общее решение (5.45):

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \sin(2 \cdot 0) = 1, \\ C_1 \cos \dfrac{\pi}{2} + C_2 \sin \dfrac{\pi}{2} - \sin\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$$

Так как $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, а $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, то $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$.

Заменив константы их значениями в (5.45), находим решение данной краевой задачи:

$$\boxed{y = \cos x + 2 \sin x - \sin 2x}.$$

§ 5.3. Приложение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами к исследованию модели рынка с прогнозируемыми ценами

В простых моделях рынка спрос и предложение, как правило, полагают зависящими только от текущей цены на товар. На самом же деле спрос и предложение на практике зависят ещё и от тенденции ценообразования, а также от темпов изменения цены.

В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретную ситуацию. Предположим, что функции спроса $D(t)$ и предложения $S(t)$ следующим образом зависят от цены $P(t)$ и её производных:

$$D(t) = 4P'' - 2P' - 7P + 32,$$

$$S(t) = 5P'' + 2P' + 6P + 6.$$

Поясним смысл данных зависимостей на слагаемых с производными цены:

1. Спрос зависит от темпа изменения цены: если темп растёт ($P'' > 0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя , поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.
2. Предложение в ещё большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в представление $S(t)$ со знаком плюс.

Нужно установить зависимость цены от времени. Так как равновесное состояние рынка определяется равенством

$$D(t) = S(t),$$

то приравняем представления заданных функций

$$4P^{''} - 2P^{'} - 7P + 32 = 5P^{''} + 2P^{'} + 6P + 6.$$

Приведя подобные члены, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$P^{''} + 4P^{'} + 13P = 26.$$

Искомая зависимость и является решением данного уравнения.

Составим и решим соответствующее однородное уравнение

$$P^{''} + 4P^{'} + 13P = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2+4k+13 = 0$ имеет два комплексных корня $k_1 = -2-3i$ и $k_1 = -2+3i$ с действительной частью $\alpha = -2$ и мнимой частью $\beta = 3$. Поэтому его частные решения

$$P_1 = e^{-2t} \cos 3t \text{ и } P_2 = e^{-2t} \sin 3t$$

определяют общее решение однородного уравнения

$$P_o(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

Так как правая часть неоднородного уравнения $f(t) = 26$, то его частное решение $\bar{P}$ следует искать в виде $\bar{P}(t) = A$, где A – неизвестный коэффициент. В этом случае $\bar{P}^{''} = \bar{P}^{'} = 0$. Поэтому $13\bar{P}(t) = 26 \Rightarrow \bar{P}(t) = 2$.

Таким образом, общее решение уравнения, как сумма общего решения однородного уравнения $P_o(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $\bar{P}(t)$, имеет вид:

$$P(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + 2.$$

Можно заметить, что при $t \to \infty$ общее решение $P(t) \to 2$. То есть, все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 2$ и колеблются около её. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене $P = 2$ с колебаниями около неё. При этом амплитуда этих колебаний со временем затухает[1].

[1]Данный пример взят из книги Красс М.С., Чупрынов Б.П Основы математики и ее приложения в экономическом образовании.