УТВЕРЖДЕННО председателем Приемной комиссии ТОГУ
«28» сентября 2017 г.

ПРОГРАММА

вступительных испытаний для поступающих на обучение
по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре
по направлению 01.06.01 – Математика и механика,
направленность «Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

1. Общие положения

Программа вступительного экзамена содержит как общую часть, включающую в себя вопросы по математике, так и специальную (профильную) часть, содержащую вопросы по профильным разделам математики и механики. От поступающих требуется знание и свободное владение материалом, предусмотренным общей частью настоящей программы. Специальная часть предусматривает знание основных и специальных курсов по избранному профилю подготовки.

Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателя, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Вступительный экзамен в аспирантуру проводится по вопросам, включенным в указанную ниже программу экзамена в устной форме. Результаты оцениваются по 5-балльной шкале. Каждому поступающему задается два вопроса вступительного экзамена: 1) на первый из общего раздела программы «Математика» - отвечают все поступающие, независимо от профиля направления подготовки; 2) второй вопрос из специальной части программы вступительного экзамена, соответствующей профилю подготовки, избранной поступающим. При необходимости могут задаваться дополнительные вопросы.

При ответе на вопросы поступающий должен продемонстрировать глубокие знания по предмету. Вопросы составлены таким образом, чтобы охватить все основные направления современной математики и механики, в которых поступающий в аспирантуру должен свободно ориентироваться.

Обучение по программе аспирантуры 01.06.01 – математика и механика ориентировано на формирование компетенций для осуществления научно-исследовательской деятельности в выбранной области.

2. Вопросы для подготовки к вступительным испытаниям по программе вступительных испытаний для поступающих на обучение программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению 01.06.01 – Математика и механика

1. Непрерывность функций одной и многих переменных, свойства непрерывных функций. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
2. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции
3. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши.
4. Функции с ограниченным изменением. Мера в смысле Лебега. Теорема Д.Ф.Егорова, С-свойство. Абсолютно непрерывные функции.
5. Суммируемые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства. Гильбертовы пространства. Изоморфизм L2 и I2. Сходимость в среднем.
6. Интегральные уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма.
7. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье.
8. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
10. Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы, линейного оператора к жордановой форме.
11. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям.
12. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Проективная классификация линий 2-го порядка.
13. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группы. Теорема о гомоморфизмах.
14. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

15. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.
16. Линейные уравнения в частных производных второго порядка. Их классификация. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Задача Коши для уравнения струны. Первая краевая задача и задача Коши для уравнения теплопроводности.
17. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
18. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
19. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.
20. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.
21. Аналитическая функция в целом. Римановы поверхности.
22. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Криволинейные координаты на многообразии.
23. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности.
24. Понятие топологического пространства. Понятие топологического и гладкого многообразия. Основы римановой геометрии и тензорного анализа(аффинная связность, ковариантное дифференцирование, тензор кривизны).
25. Понятие о простейшей проблеме вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Геодезические линии.
26. Дифференциальные формы на многообразиях. Общая теорема Стокса. Следствия для векторных полей в трехмерном пространстве. Дивергенция. Вихрь.
27. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.
28. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях.
29. Теорема о выпрямлении векторного поля.

30. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных.
31. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Экспонента линейного оператора. Системы с правой частью в виде квазимного члена.
32. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.
33. Особые точки линейных систем на плоскости.
34. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы интегралов. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши.
35. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями.

Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.

36. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши.
37. Формула Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения.
38. Смешанная задача для волнового уравнения, решение ее методом Фурье (обоснование метода Фурье в случае одной пространственной переменной), единственность решения.
39. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Функция Грина для шара. Решение задачи Дирихле для шара.
40. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
41. Задачи Дирихле и Неймана. Единственность. Условие разрешимости задачи Неймана. Внешние задачи, сведение их к внутренним задачам.
42. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача. Принцип максимума для слоя. Интеграл Пуассона.

3. Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Классический университетский учебник. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 843 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 томах. Учебник для вузов, 1Том – М: Наука, 2003. – 704 с.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 томах. Учебник для вузов, 2 Том – М: Наука, 2004. – 720 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 томах. Учебник для вузов, 3Том – М: Наука, 2006. – 351 с.
6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – Екатеринбург: Гуманит, 2004. –402 с.
7. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. Учебное пособие. – Изд.2-е. – М: Наука, 2004. – 486 с.
8. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – Изд. 4-е. – М: Наука, 2004. – 304 с.
9.Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. Классический университетский учебник. – Изд. 2-е, перераб. и дополненное. – М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 260 с.: ил.
10. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебное пособие: – М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 240 с.

Дополнительная литература

11. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. Учебное пособие. –М: Наука, 1968. – 912 с.
12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения Учебник для вузов. – М: Наука, 1971 . – 302 с.
13. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.–Изд. 2-е.– СПб: Лань, 2011. – 302 с.
14. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
15. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Учебник: – М: Добросвет, 1998. – 320 с.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – Изд. 2-е. – М: Наука, 1986. – 760 с.
17. Евграфов М.А. Аналитические функции. Учебное пособие для вузов.– Изд.4-е, перераб. и долненное. – М: Наука, 1991. – 448 с.
18. Зорич В.А. Математический анализ в 2-х частях, 1ч. – М: ФАЗИС, 1977. – 568 с.
19. Зорич В.А. Математический анализ в 2-х частях, 2ч. – М: ФАЗИС, 1984. – 640 с.
20. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408с.
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1976. – 736 с.

22. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравненияэллиптического типа. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
23. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – перевод с франц. – М: Мир, 1972. – 240 с.
24. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – Изд.2-е, перераб. – М: Наука, 1965. – 520 с.: ил.
25. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник: – Изд. 9-е. – М.: Наука, 1968. –431 с.
26. Никольский С.М. Курс математического анализа. Учебное пособие: – Изд.6-е.– М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
27. Новиков С.П. Дифференциальная геометрия в 2Т. Учебное пособие, 1 Том –М: изд. МГУ, 1974. – 817 с.
28. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Учебноепособие. – Изд. 3-е. – М: ГИФМЛ, 1961. – 401 с.
29. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие – Изд. 5-е. – М: Наука, 1982. – 331 с.
30. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Учебное пособие. – Изд. 3-е, перераб. – М: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
31. Рашевский П.К. Введение в риманову геометрию и тензорный анализ. – М:Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 200 с.
32. Рудин У. Основы математического анализа. – Изд. 2-е, с англ. – М: Мир, 1976. – 320 с.
33. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – Изд. 4-е. – М: Наука, 1966. – 444 с.
34. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Учебное пособие. – М: Наука,1987. – 577 с.
35. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. Учебник. – М.-Л.: ГТТИ, 1952. – 743 с.

4. Критерии оценивания

Критерии	**Количество баллов**
Каждый вопрос оценивается до 5 баллов	
правильное, полное и логичное построение ответа; умение оперировать специальными терминами; использование в ответе дополнительного материала; иллюстрирование теоретических положений решением задач.	5
правильное, полное и логичное построение ответа; умение оперировать специальными терминами; использование в ответе дополнительного материала; иллюстрирование теоретических положений решением задач. Но в ответе имеются негрубые ошибки или неточности; возможны затруднения в использовании практического материала; делаются не вполне законченные выводы или обобщения.	4
схематичный неполный ответ, неумение оперировать специальными терминами или их незнание, с одной грубой ошибкой, неумением приводить примеры практического использования научных знаний.	3
ответы на все вопросы билета с грубыми ошибками, неумение оперировать специальной терминологией, неумение приводить примеры практического использования научных знаний.	Менее 3
Максимальная оценка за ответ 5 баллов. Оценка выставляется по каждому вопросу. По результатам ответа на оба вопросы выставляется итоговый балл.	

Форма проведения – устное собеседование по вопросам.

Длительность подготовки к ответу – 40 минут