ISSN 2079-8490

Электронное научное издание
«Ученые заметки ТОГУ»
2013, Том 4, № 4, С. 1316 – 1328

Свидетельство
Эл № ФС 77-39676 от 05.05.2010
http://ejournal.khstu.ru/
ejournal@khstu.ru

УДК 519.642.8

© 2013 г. **Н. В. Эйрих,**
Р. В. Намм,
Е. С. Бабинер
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В работе обосновывается переход от краевых задач для эллиптического оператора к их вариационным постановкам, описываются алгоритмы аппроксимации задач Дирихле, Неймана, Синьорини и модельной задачи с трением методом конечных элементов, представлены результаты численных расчетов.
Ключевые слова: вариационные неравенства, метод конечных элементов, первая и вторая краевые задачи, задача Синьорини, модельная задача с трением.

N. V. Eyrikh, E. S. Babiner, R. V. Namm,

OPTIMIZATION METHODS FOR SOLVING VARIATION PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS.

In this article transition from boundary value problems for elliptic operator to variation formulation is justifying, algorithm of task Dirihle, Neiman, Signorini's approximation and model friction problem by finite element method, the numerical result are presented.
***Key words*:** variational inequalities, method of finite elements, the first and second boundary value problems, Signorini's problem, model friction problem.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$. Всюду ниже использованы следующие обозначения:

$H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$ – соответствующие пространства Соболева,

$\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ – множество всех финитных в Ω функций из $H^1(\Omega)$,

$D(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых в Ω функций с носителем, компактным в Ω.

Введем билинейную форму:

$$a(u,\upsilon) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + u\upsilon \right) d\,\Omega .$$

Тогда квадратичная форма

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u^2 \right) d\,\Omega = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) d\,\Omega .$$

Для выпуклого и дифференцируемого функционала производная Гато $J'(u)$ в точке u определяется по формуле [2, 16]:

$$\left(J'(u),\upsilon\right) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{J(u+\lambda\upsilon) - J(u)}{\lambda}, \ \ \forall \upsilon ,$$

или

$$\left(J'(u),\upsilon\right) = a(u,\upsilon) - (f,\upsilon) ,$$

где

$$(f,\upsilon) = \int_\Omega f\upsilon \, d\Omega .$$

Задача Дирихле – первая краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{в } \Omega , \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0 . \tag{2}$$

Слабым (обобщенным) решением задачи (1), (2) при $f \in L_2(\Omega)$ называется функция $u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, которая для всех $\upsilon \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству [5, 171]:

$$\int_\Omega \left(\nabla u \nabla \upsilon + u\upsilon\right) d\Omega = \int_\Omega f\upsilon \, d\Omega .$$

В том случае, если у слабого решения вторые обобщенные производные интегрируемые со своим квадратом, то оно называется сильным решением.

Слабое решение задачи (1) – (2) реализует минимум функционала $J_1(\upsilon)$ на $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ [6, 300], где

$$J_1(\upsilon) = \frac{1}{2} a(\upsilon,\upsilon) - (f,\upsilon) .$$

Задача Неймана – вторая краевая задача:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{в } \Omega ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 , \tag{3}$$

Однородные краевые условия этой задачи относятся к естественным краевым условиям [4, 10]. Слабое решение доставляет минимум функционалу $J_1(\upsilon)$ на $H^1(\Omega)$.

Задача Синьорини. Рассмотрим уравнение (1) и краевые условия Синьорини [1,9]:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{в } \Omega,$$
$$u \ge 0,\ \frac{\partial u}{\partial n} \ge 0,\ u\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega = \Gamma, \tag{4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе Γ. Это задача с неизвестной границей.

Определим множество
$$K = \left\{\upsilon \middle|\, \upsilon \in H^1(\Omega),\ \upsilon\big|_\Gamma \ge 0\right\}. \tag{5}$$

Множество K является замкнутым выпуклым подмножеством $H^1(\Omega)$ [2, 15]. Задачу (1), (4) можно сформулировать как вариационную:
$$J_1(\upsilon) \to \min_{\forall \upsilon \in K}, \tag{6}$$
которая в свою очередь эквивалентна неравенству:
$$u \in K:\ a(u, \upsilon - u) \ge (f, \upsilon - u),\ \ \forall \upsilon \in K. \tag{7}$$

Покажем эквивалентность задач (6) и (7) [7, 21]. Пусть u – решение задачи (6). Из выпуклости K вытекает, что для $\forall \upsilon \in K$:
$$u + \lambda(\upsilon - u) \in K\ ,\ 0 < \lambda < 1.$$

Надо доказать, что имеет место неравенство (7), то есть:
$$a(u, \upsilon - u) - (f, \upsilon - u) =$$
$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial y} + u(\upsilon - u)\right] d\Omega - \int_\Omega f(\upsilon - u) d\Omega \ge 0. \tag{8}$$

Подставим в неравенство (6) в качестве элемента υ элемент $u + \lambda(\upsilon - u)$:
$$0 \le J_1(u + \lambda(\upsilon - u)) - J_1(u) =$$
$$= \lambda \int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial y} + u(\upsilon - u)\right] d\Omega +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial y}\right)^2 + (\upsilon - u)^2\right] d\Omega - \lambda \int_\Omega f(\upsilon - u) d\Omega.$$

Поделим на λ и осуществим предельный переход при $\lambda \to 0$. В результате получим неравенство (8). Таким образом, элемент u является решением задачи (7).

Обратно. Используя представление (8), умноженное на λ, учитывая, что $\frac{\lambda^2}{2} \ge 0$ и $\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\upsilon - u)}{\partial y}\right)^2 + (\upsilon - u)^2\right] d\Omega = a(\upsilon - u, \upsilon - u) \ge 0$ получаем неравенство (6).

Покажем связь краевой задачи (1), (4) и задачи (6). Для этого сначала установим связь краевой задачи (1), (4) и задачи (7) при наложенном на $u(x, y)$ условии $u \in H^2$. Затем из эквивалентности (6) и (7) следует соответствие задач (1), (4) и (6).

Пусть выполняется (7), возьмем $\upsilon = u \pm \varphi$, где функция $\varphi \in D(\Omega)$. Тогда:
$$a(u, \upsilon - u) \ge (f, \upsilon - u)\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a(u, \varphi) \ge (f, \varphi) \\ a(u, \varphi) \le (f, \varphi) \end{bmatrix} \Leftrightarrow a(u, \varphi) = (f, \varphi). \tag{9}$$

Так как $a(u, \varphi) - (f, \varphi) = (J_1'(u), \varphi)$, а равенство $(J_1'(u), \varphi) = 0$ в теории обобщенных функций и есть уравнение (1), значит u – решение краевой задачи (1), (4). Проверим выполнение краевых условий (4) при $u \in H^2$. Для этого умножим уравнение (1) на $(\upsilon - u)$ и проинтегрируем его по Ω [2, 16]:

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(\upsilon-u)d\Omega+\int_{\Omega}u(\upsilon-u)d\Omega=\int_{\Omega}f(\upsilon-u)d\Omega\,. \tag{10}$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получаем:

$$a(u,\upsilon-u)-(f,\upsilon-u)=\int_{\Gamma}(\upsilon-u)\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\,. \tag{11}$$

Откуда, учитывая (7), следует $\int_{\Gamma}(\upsilon-u)\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\geq 0$. Возьмем в качестве $\upsilon=u+\psi$, где $\psi\geq 0-$ произвольная функция, заданная на границе. Тогда $\int_{\Gamma}\psi\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\geq 0,\ \forall\psi\geq 0$ на Γ, значит и $\frac{\partial u}{\partial n}\geq 0$ на Γ. Полагая на границе $\upsilon\equiv 0$, затем $\upsilon=2u$, получим краевые условия (4) [2, 17]:

$$\begin{cases}-\int_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\geq 0\\ \int_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\geq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad u\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma\,.$$

Обратно. Пусть $u-$ решение задачи (1), (4). Так как $\frac{\partial u}{\partial n}\geq 0$ на Γ, то для $\forall\upsilon\in K$ выполняется

$$\int_{\Gamma}\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\geq 0\,. \tag{12}$$

Из того, что $u\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на границе, следует:

$$\int_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=0\,. \tag{13}$$

Вычитаем из (12) равенство (13), тем самым определяем знак правой части в (11), получаем неравенство (7).

Модельная задача с кулоновским трением. Краевая постановка задачи:

$$-\Delta u+u=f \quad \text{в } \Omega\,,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leq g,\ \frac{\partial u}{\partial n}u+g|u|=0 \text{ на } \Gamma\,, \tag{14}$$

где $g>0-$ заданная на Γ функция (сила трения). Как и задача Синьорини это задача со свободной границей. Краевые условия имеют следующую интерпретацию: если $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|<g$, то $u=0$; если $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|=g$, то $u\neq 0$ [7, 24].

Введем в рассмотрение функционал:

$$J_2(\upsilon)=\frac{1}{2}a(\upsilon,\upsilon)-(f,\upsilon)+j(\upsilon)\,,$$

где $j(\upsilon)=\int_{\Gamma}g|\upsilon|d\Gamma-$ выпуклый и недифференцируемый функционал. Обозначим $J_2(\upsilon)=J_1(\upsilon)+j(\upsilon)$. Задача (1), (14) имеет вариационную формулировку:

$$J_2(\upsilon)\to\min_{\forall\upsilon\in H^1(\Omega)}, \tag{15}$$

которая эквивалентна задаче:

$$u \in H^1(\Omega): \quad a(u,\upsilon-u)-(f,\upsilon-u)+j(\upsilon)-j(u) \ge 0 \quad \upsilon \in H^1(\Omega). \tag{16}$$

Покажем эквивалентность задач (15) и (16) [7, 25]. Пусть $u-$ решение задачи (15). Возьмем в качестве произвольного элемента $\upsilon = u + \lambda(\upsilon - u)$. Тогда справедливо неравенство

$$J_2(u) \le J_2((1-\lambda)u+\lambda\upsilon) \iff J_1(u)+j(u) \le J_1((1-\lambda)u+\lambda\upsilon)+j((1-\lambda)u+\lambda\upsilon).$$

Учитывая выпуклость $j(\upsilon)$, то есть $j((1-\lambda)u+\lambda\upsilon) \le (1-\lambda)j(u)+\lambda\, j(\upsilon)$, получаем неравенство

$$J_1((1-\lambda)u+\lambda\upsilon)-J_1(u)-j(u)+(1-\lambda)j(u)+\lambda j(\upsilon) \ge 0$$

или

$$\frac{\lambda^2}{2}\big(a(u,u)+a(\upsilon,\upsilon)\big)+\lambda a(u,\upsilon-u)-\lambda^2 a(u,\upsilon)-\lambda(f,\upsilon-u)+\lambda(j(\upsilon)-j(u)) \ge 0.$$

Поделим неравенство на λ и осуществим предельный переход при $\lambda \to 0$. В результате приходим к неравенству (16).

Обратно. Обратными рассуждениями получим (15) из (16).

Покажем соответствие задачи (1), (14) задаче (16) [7, 25]. Пусть $u-$ решение краевой задачи (1), (14). Учитывая краевое условие $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \le g$, получаем неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial n}\upsilon + g|\upsilon| \ge 0, \quad \forall\, \upsilon \in H^1(\Omega). \tag{17}$$

Вычитаем из (17) второе краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u| = 0$, и получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\upsilon-u)+g\big(|\upsilon|-|u|\big) \ge 0. \tag{18}$$

Умножим уравнение (1) на $(\upsilon-u)$ и проинтегрируем его по частям. Получим равенство (11), к обеим частям которого прибавим $\int_\Gamma g\big(|\upsilon|-|u|\big)d\Gamma$:

$$a(u,\upsilon-u)-\big(f,\upsilon-u\big)+\int_\Gamma g\big(|\upsilon|-|u|\big)d\Gamma = \int_\Gamma \big(\upsilon-u\big)\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma + \int_\Gamma g\big(|\upsilon|-|u|\big)d\Gamma.$$

Учитывая (18), делаем вывод

$$a(u,\upsilon-u)-\big(f,\upsilon-u\big)+\int_\Gamma g\big(|\upsilon|-|u|\big)d\Gamma = a(u,\upsilon-u)-(f,\upsilon-u)+j(\upsilon)-j(u) \ge 0.$$

Таким образом, $u-$ решение вариационного неравенства (16).

Обратно. Пусть $u-$ решение вариационного неравенства (16) и $\varphi \in D(\Omega)$. Полагая $\upsilon = u \pm \varphi$, проводим рассуждения, аналогичные (9), которые приводят к тому, что $u-$ решение уравнения (1). Проверяем выполнение краевых условий. Для этого умножаем уравнение (1) на $(\upsilon-u)$, затем интегрируем по Ω (предполагаем $u \in H^2(\Omega)$) и получаем равенство (11). Вычтем его из неравенства (16):

$$\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\upsilon + g|\upsilon|\right)d\Gamma - \int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u|\right)d\Gamma \ge 0, \quad \forall\, \upsilon \in H^1(\Omega).$$

Полагая $\upsilon = \pm\lambda\psi$, где $\psi \in H^1(\Omega)$ и $\lambda \ge 0$, находим

$$\lambda\int_\Gamma\left(\pm\frac{\partial u}{\partial n}\psi + g|\psi|\right)d\Gamma - \int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u|\right)d\Gamma \ge 0.$$

Откуда

$$\int_{\Gamma}\left(\pm\frac{\partial u}{\partial n}\psi + g|\psi|\right)d\Gamma \geq 0 \tag{19}$$

и

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u|\right)d\Gamma \leq 0\,. \tag{20}$$

Из (19) следует $\pm\frac{\partial u}{\partial n}\psi + g|\psi| \geq 0$, значит

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\psi\, d\Gamma\right| \leq \int_{\Gamma} g|\psi|\, d\Gamma \;\text{ для }\; \forall\psi \in H^1(\Omega)\,, \tag{21}$$

из чего делаем вывод, что $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leq g$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u| \geq 0$ почти всюду на Γ и

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u|\right)d\Gamma \geq 0\,. \tag{22}$$

Учитывая (22) и (20) получаем равенство $\frac{\partial u}{\partial n}u + g|u| = 0$. Таким образом, $u-$ решение краевой задачи (1), (14).

Аппроксимация задач методом конечных элементов для заданной области. Рассмотрим аппроксимацию поставленных задач методом конечных элементов, где $\Omega-$ трапеция $ABCD$, где $\angle A = \alpha$. Проведем триангуляцию области с шагами $h_x = \frac{BC}{N_x}$, $h_y = \frac{CD}{N_y}$, $h' = \frac{h_x}{tg\alpha}$ (рис. 1).

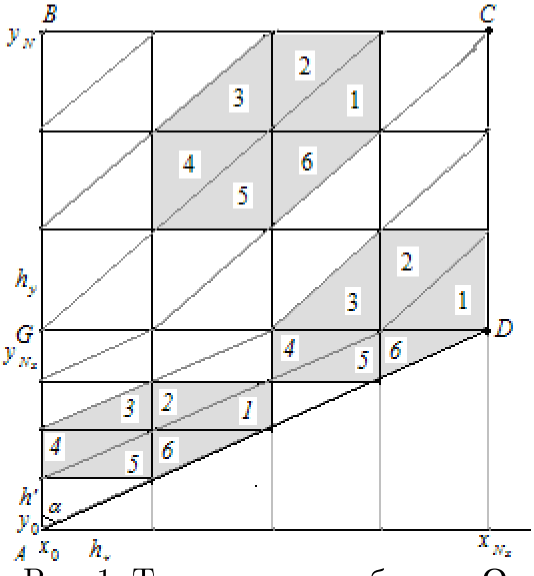


Рис. 1. Триангуляция области Ω

Приближенное решение u ищем в виде линейной комбинации

$$u_N = \sum_i a_i\varphi_i\,, \tag{23}$$

где $\varphi_i(x,y)$ – кусочно-линейные финитные (базисные) функции, заданные в N узлах сетки [4, 184].

После подстановки линейной комбинации (23) в функционалы $J_1(\upsilon)$, $J_2(\upsilon)$ и введя обозначения:

$$A_{ij} = \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega_j} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dxdy, \;\; \hat{A}_{ij} = \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega_j} \varphi_i \varphi_j dxdy, \;\; f_i = \int\limits_{\Omega_i} f \varphi_i \, d\Omega_i ,$$

получаем:

$$J_1(u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) - \sum_i a_i f_i , \tag{24}$$

$$J_2(u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) - \sum_i a_i f_i + \int\limits_{\Gamma} g \left| \left(\sum_k a_k \varphi_k \right) \right| d\Gamma , \tag{25}$$

где суммирование по k означает сумму только по граничным узлам.

Учитывая необходимое и достаточное условие существования минимума выпуклого функционала, из (24) получаем систему линейных уравнений для задачи Неймана

$$\sum_{j=0}^{N_x + N_y} a_j \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) = f_i , \; i = \overline{0, N_x} . \tag{26}$$

Для задачи Дирихле система (26) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{N_x + N_y - 1} a_j \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) = f_i , \; i = \overline{1, N_x - 1} . \tag{27}$$

Системы (26) и (27) решаются методом Зейделя или поточечной верхней релаксации.

Для отыскания минимума квадратичного функционала J_1 в задаче Синьорини применяется обобщение метода верхней релаксации с оператором проектирования P, где

$$Py = \begin{cases} y, \;\; y \ge 0, \\ 0, \; y < 0. \end{cases}.$$

Зная $a_i^{(k)}$, уточнение приближения $a_i^{(k+1)}$ проводится по следующей схеме:

- для внутренних узлов

$$a_i^{(k)} = -\frac{1}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}} \left(\sum_{j<i} \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) a_j^{(k+1)} + \sum_{j>i} \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) a_j^{(k)} - f_i \right), \tag{28}$$

- для граничных узлов

$$\begin{gathered} a_i^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}} \left(\sum_{j<i} \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) a_j^{(k+1)} + \sum_{j>i} \left(A_{ij} + \hat{A}_{ij} \right) a_j^{(k)} - f_i \right), \\ a_i^{(k+1)} = P\left((1-\omega) a_i^{(k)} + \omega \, a_i^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right), \end{gathered} \tag{29}$$

где $1 < \omega < 2$ – параметр релаксации, подходящий выбор которого ускоряет сходимость последовательности $a^{(\kappa)}$ к точке минимума функционала.

При численном решении модельной задачи с кулоновским трением необходимо учитывать недифференцируемость функционала J_2, поэтому аппроксимируем интеграл

$\int\limits_{\Gamma} g \left| \left(\sum_k a_k \varphi_k \right) \right| d\Gamma$ по формуле трапеций:

$$\int_{\Gamma} g\left|\left(\sum_k a_k\varphi_k\right)\right| d\Gamma \approx g\sum_k \int_{\Gamma_k}\left|a_{k-1}\varphi_{k-1} + a_k\varphi_k\right| d\Gamma_k = g\sum_k h_k\left|a_k\right| ,$$

где $\Gamma_k = M_{k-1}M_k$ – отрезок границы. Таким образом, функционал (25) принимает вид:

$$J_2(u_N) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i a_j\left(A_{ij} + \hat{A}_{ij}\right) - \sum_i a_i f_i + g\sum_k h_k\left|a_k\right|. \tag{30}$$

Предполагая уже известным некоторое приближение вектора $a^{(k)}$, для каждой его i-ой компоненты обозначим через

$$\psi_i = \sum_{j<i}\left(A_{ij} + \hat{A}_{ij}\right)a_j^{(k+1)} + \sum_{j>i}\left(A_{ij} + \hat{A}_{ij}\right)a_j^{(k)} - f_i, \tag{31}$$

Получаем квадратичную функцию относительно $a_i^{(k+1)}$:

$$\frac{1}{2}\left(A_{ii} + \hat{A}_{ii}\right)\left(a_i^{(k+1)}\right)^2 + \psi a_i^{(k+1)} + gh\left|a_i^{(k+1)}\right|. \tag{32}$$

Наличие модуля исключает дифференцирование. Рассмотрим три случая:

1) Пусть $a_i^{(k+1)} > 0$. Схематично график этой функции показан на рисунке 2а.

Раскрывая модуль, дифференцируем по $a_i^{(k+1)}$, и, приравнивая к нулю, получаем

$$a_i^{(k+1)} = -\frac{\psi + gh}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}}.$$

Для выполнения $a_i^{(k+1)} > 0$ необходимо, чтобы $\psi < -gh$.

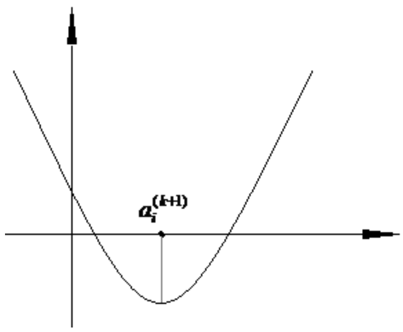
2) Пусть $a_i^{(k+1)} < 0$ (рис. 2б). Аналогично, раскрыв модуль и продифференцировав, имеем

$$a_i^{(k+1)} = -\frac{\psi - gh}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}}.$$

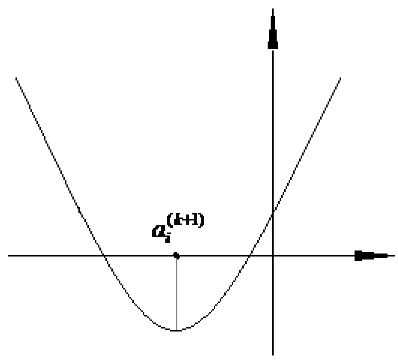
Для того чтобы выполнялось $a_i^{(k+1)} < 0$, необходимо выполнение неравенства $\psi > gh$.

3) Если $a_i^{(k+1)} = 0$, то $-gh \le \psi \le gh$ (рис.2в).

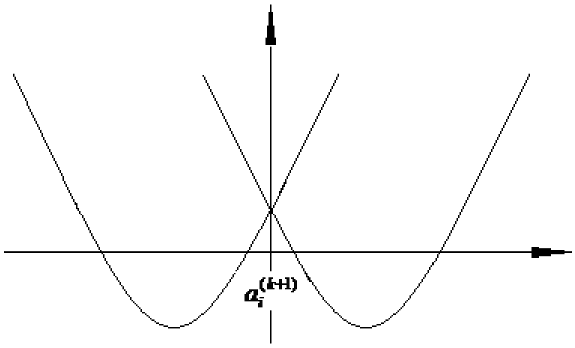
Рис. 2.



а)



б)



в)

Таким образом, в алгоритме решения для расчета внутренних точек используется формула $a_i^{(k+1)} = -\frac{1}{\left(A_{ii} + \hat{A}_{ii}\right)} \cdot \psi$, а для граничных точек получаем следующую формулу для вычисления $(k+1)-$го приближения:

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} -\dfrac{\psi + gh}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}}, & \psi < -gh, \\ -\dfrac{\psi - gh}{A_{ii} + \hat{A}_{ii}}, & \psi > gh, \\ 0, & -gh \le \psi \le gh. \end{cases}$$

При решении используется метод покоординатного спуска.

Результаты численных расчетов. Описанные алгоритмы были реализованы на трапециевидной области с углом $\alpha = \frac{\pi}{3}$. В таблицах приведены результаты работы программ, где k – количество итераций, ε – заданная точность. Для нахождения решений систем уравнений в задачах Дирихле и Неймана был использован метод Зейделя.

Таблица 1

Результаты расчетов задачи Дирихле

$h_{\max}$	N_x	N_y	$f(x,y)$	ε	k
0,1	10	15	$2x-4y$	10^{-3}	25
				10^{-4}	46
0,0625	16	24		10^{-3}	42
				10^{-4}	98
0,05	20	30		10^{-3}	49
				10^{-4}	137

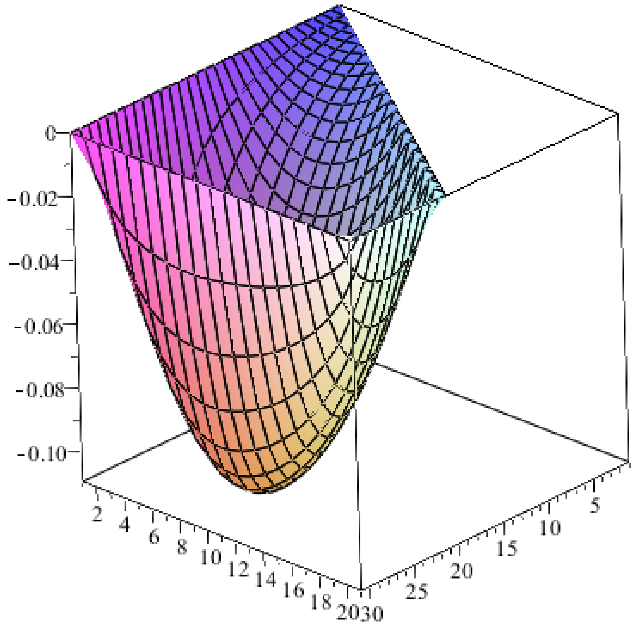


Рис. 3. График решения задачи Дирихле

Таблица 2.

Результаты расчетов задачи Неймана

$h_{\max}$	N_x	N_y	$f(x,y)$	ε	k
0,1	10	15	$2x-4y$	10^{-3}	379
				10^{-4}	899
0,0625	16	24		10^{-3}	482
				10^{-4}	2032
0,05	20	30		10^{-3}	195
				10^{-4}	2868

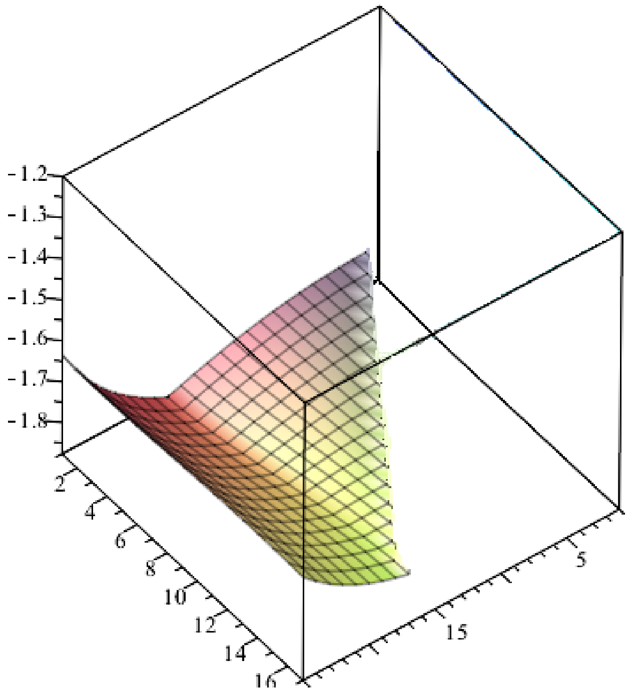


Рис. 4. График решения задачи Неймана

Таблица 3.

Результаты расчетов задачи Синьорини

$h_{\max}$	N_x	N_y	$f(x,y)$	ε	k
0,1	10	15	$2x-4y$	10^{-3}	14
				10^{-4}	22
0,0625	16	24		10^{-3}	13
				10^{-4}	22
0,05	20	30		10^{-3}	12
				10^{-4}	21

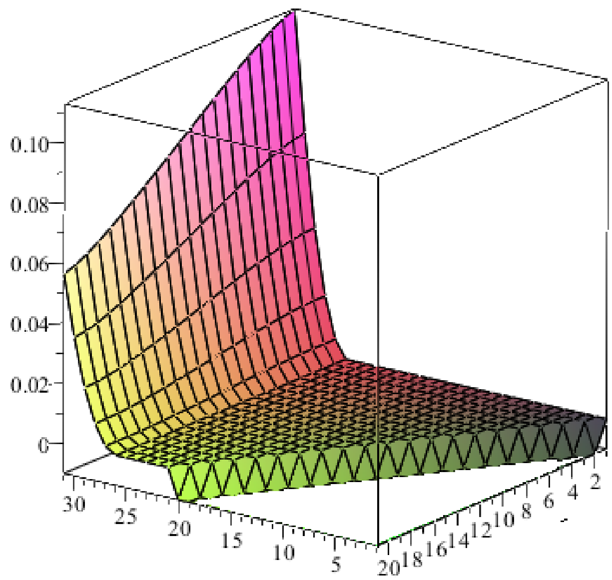


Рис. 5. Решение задачи Синьорини

Таблица 4.

Результаты расчетов задачи с трением

$h_{\max}$	N_x	N_y	$f(x,y)$	ε	k
0,1	10	15	$2x-4y$	10^{-3}	25
				10^{-4}	47
0,0625	16	24		10^{-3}	42
				10^{-4}	99
0,05	20	30		10^{-3}	49
				10^{-4}	138

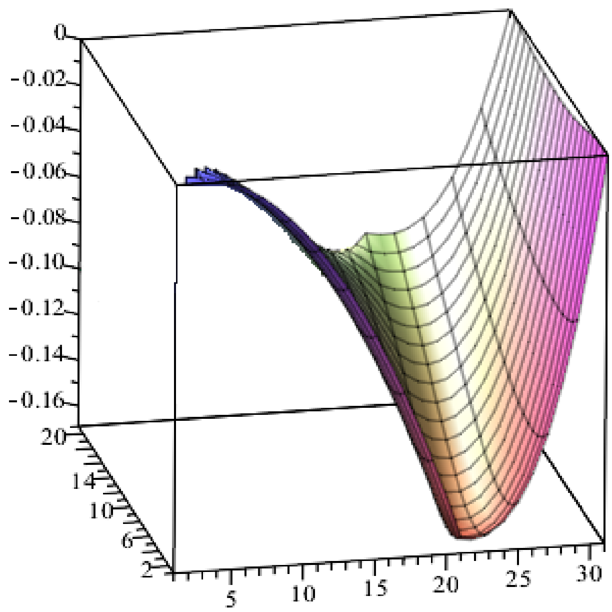


Рис. 6. Решение задачи с трением

Список литературы

[1] *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.* Решение вариационных неравенств в механике. – М.: Мир, 1986. – 270 с.
[2] *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с
[3] *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
[4] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.
[5] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 392 с.
[6] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. Учеб.пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1977. – 431 с.
[7] *Намм Р.В.* Введение в теорию и методы решения вариационных неравенств: Учебное пособие – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос.тех.ун-та, 1999. – 71 с.

E-mail: mineeva_elena18@mail.ru, rnamm@yandex.ru, nadya_eyrikh@mail.ru