



Электронное научное издание
«Ученые заметки ТОГУ»
2013, Том 4, № 4, С. 1662 – 1669

Свидетельство
Эл № ФС 77-39676 от 05.05.2010
<http://ejournal.khstu.ru/>
ejournal@khstu.ru

УДК 624.01

© 2013 г. В. С. Федорова,
А. Д. Ловцов

(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГОФРИРОВАННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ ПОСРЕДСТВОМ ТРЕНИЯ КУЛОНА

В настоящей работе рассматривается контактная задача с трением взаимодействия упругой среды с аркой по схеме трения Кулона. При этом зона возможного проскальзывания известна и совпадает с осью арки. Для решения поставленной задачи используется алгоритм Кравчука на шагах которого поочередно применяется метод перемещений решения линейной задачи дополнителности (ЛЗД) для задач идеального контакта и контакта с трением (при известных предельных силах трения).

Ключевые слова: упругая среда, арка, линейная задача дополнителности, трение Кулона, односторонняя связь, МКЭ, плоская деформация.

V. S. Fedorova, A. D. Lovtsov

INTERACTION OF CORRUGATED METAL PIPE WITH ELASTIC MEDIUM THROUGH COULOMB FRICTION

In this paper, a contact problem with friction interaction of an elastic medium with an arch scheme Coulomb friction. The zone of potential slippage is known and coincides with the axis of the arch. Solution algorithm is used Kravchuk on the steps which in turn is used the method of displacements of the solution of a linear problem of additionality for tasks perfect contact and contact with friction (if known limiting friction forces).

Keywords: elastic medium, arch, linear task of additionality, Coulomb friction, one-way communication, plane strain.

В настоящее время гофрированные металлические конструкции (ГМТ) широко применяются при строительстве транспортных и промышленных объектов, в том числе и в дорожном строительстве. Однако ГМТ диаметром более 8 м требуют индивидуального проектирования [1].

Для протяженных в осевом направлении труб, расчетную схему можно принять плоской. Сведем решение задачи взаимодействия грунтовой среды с арочной ГМТ к задаче взаимодействия упругой среды (в условиях плоской деформации) с аркой единичной ширины. Взаимодействие их опишем как контактное с трением Кулона. Для случая одностороннего контакта с трением, при простом нагружении к граничным условиям одностороннего контакта [2 – 4]:

$$\left. \begin{aligned} z_n + \eta_n &\geq 0, \\ \sigma_n &\leq 0, \\ (z_n + \eta_n) \cdot \sigma_n &= 0 \end{aligned} \right\} \in L', L'' \quad (2.1)$$

добавятся условия трения Кулона:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq f |\sigma_n| = -f \sigma_n, \quad \sigma_n \leq 0; \\ (|\sigma_\tau| + f \sigma_n) \cdot z_\tau &= 0; \\ \sigma_\tau \cdot z_\tau &\leq 0. \end{aligned} \right\} \in L', L'' \quad (2.2)$$

Здесь: L'' – ось арки; L' – линия контакта упругой среды с аркой, L' и L'' совпадают (в дальнейшем обозначаются как L); точки, имеющие одинаковые координаты, и принадлежащие L' и L'' , называются контактной парой; $z_\tau = \tau_1^T (u'' - u')$, $z_n = -n^T (u'' - u')$ – взаимные перемещения точек контактной пары по касательной и по нормали к L соответственно; σ_n ; σ_τ – нормальные и тангенциальные напряжения в контактной паре; f – коэффициент трения между грунтом и материалом арки.

В [4] предлагается эвристический алгоритм расчета контактных задач с трением Кулона, называемый в литературе алгоритмом Кравчука. Реализация этого алгоритма для описанной задачи показана ниже.

1. Применение методов решения ЛЗД для реализации алгоритма Кравчука

Для решения задачи идеального одностороннего контакта применим алгоритм с искусственно введенным предварительным обжатием [5]. Выпишем ЛЗД в виде:

$$1) [\mathbf{E} \quad -\mathbf{R}_n \quad -\mathbf{e}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \tilde{\mathbf{z}}_n \\ p_n \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{nF};$$

$$2) \mathbf{x}_n \geq 0; 3) \tilde{\mathbf{z}}_n \geq 0; 4) \mathbf{x}_n^T \tilde{\mathbf{z}}_n = 0; 5) p_n \geq 0, \quad (2.3)$$

где \mathbf{R}_n , \mathbf{R}_{nF} – нормальная контактная матрица жесткости (КМЖ) и грузовой вектор; \mathbf{E} – единичная матрица; $\mathbf{e} = \{11 \dots 1\}^T$; p_n – параметр предварительного обжатия.

Для решения задачи с трением при известных предельных силах трения также применим алгоритм с искусственно введенным обжатием [6]. ЛЗД в этом случае запишется в виде:

$$1) \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\tau & \mathbf{R}_\tau \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{R}_\tau & -\mathbf{R}_\tau \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \\ \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \\ p_\tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{\tau F} \\ -\mathbf{R}_{\tau F} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_f \end{Bmatrix};$$

$$2) \mathbf{x}_\tau^+ \geq 0, \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; 3) \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0, \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; 4) \mathbf{z}_\tau^{+T} \mathbf{x}_\tau^+ = 0, \mathbf{z}_\tau^{-T} \mathbf{x}_\tau^- = 0;$$

$$5) p_\tau \geq 0,$$

(2.4)

где: $\mathbf{z}_\tau^+, \mathbf{z}_\tau^-$ связаны с взаимными перемещениями \mathbf{z}_τ точек контактных пар по касательной к L зависимостью $\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$; $\mathbf{x}_\tau^+, \mathbf{x}_\tau^-$ связаны с усилиями взаимодействия \mathbf{x}_τ по направлению \mathbf{z}_τ зависимостью

$$\mathbf{x}_\tau = \frac{\mathbf{x}_\tau^+ - \mathbf{x}_\tau^-}{2};$$

\mathbf{R}_τ – тангенциальная контактная МЖ. Грузовой вектор $\mathbf{R}_{\tau F}$ имеет своими компонентами реакции во введенных связях (соответствующих реакциям трения) от заданной нагрузки. p_τ – параметр предварительного обжатия, \mathbf{r}_f – грузовой вектор от предельных сил трения.

Для задачи с трением основная система метода перемещений получается из заданной превращением односторонних нормальных связей и связей трения в двусторонние. Поясним способ формирования \mathbf{R}_τ . Матрица \mathbf{R}_τ формируется по столбцам, компоненты которых равны реакциям во введенных связях (соответствующих реакциям трения) от поочередных единичных дислокаций по направлению этих связей (рис. 2.1).

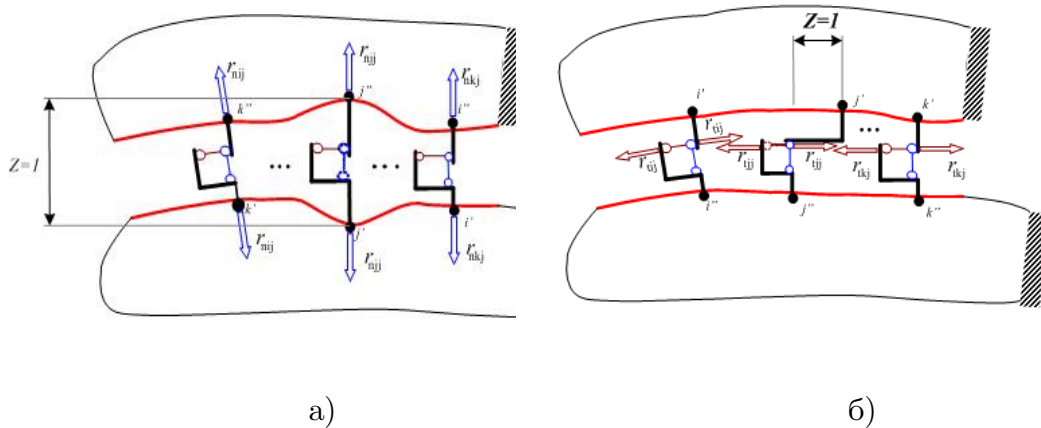


Рис.1. Расчетная схема для формирования столбца а) нормальной, б) тангенциальной контактных матриц жесткости

Матрица \mathbf{R}_n формируется аналогично.

Реализация алгоритма Кравчука выглядит следующим образом:

- сначала формируются нормальная \mathbf{R}_n , тангенциальная \mathbf{R}_τ контактные МЖ и грузовой вектор $\mathbf{R}_{\tau F}$;

– на шаге 1 формируется грузовой вектор $\mathbf{R}_{nF}^{(1)}$ от заданной нагрузки и решается ЛЗД (2.3). В результате получаем $\mathbf{x}_n^{(1)}$ – силы контактного взаимодействия по нормали к L ;

– на шаге 2 формируется грузовой вектор \mathbf{r}_f от предельных сил трения $f \mathbf{x}_n^{(1)}$. Далее решается ЛЗД (2.4); в результате имеем $\mathbf{x}_\tau^{(2)}$ – силы контактного взаимодействия по касательной к L ;

– на шаге 3 формируем грузовой вектор $\mathbf{R}_{nF}^{(2)}$ от заданной нагрузки и реакций трения $\mathbf{x}_\tau^{(2)}$; решаем ЛЗД (2.3) и получаем $\mathbf{x}_n^{(2)}$;

– на шаге 4 формируем грузовой вектор \mathbf{r}_f от предельных сил трения $f \mathbf{x}_n^{(2)}$; решаем ЛЗД (2.4) и получаем $\mathbf{x}_\tau^{(3)}$ и т. д.

Итерации повторяются до тех пор, пока $\left\| \mathbf{x}_n^{(j)} \right\| - \left\| \mathbf{x}_n^{(j-2)} \right\|$ и $\left\| \mathbf{x}_\tau^{(j)} \right\| - \left\| \mathbf{x}_\tau^{(j-1)} \right\|$ не окажутся меньше некоторой заданной величины q , задаваемой пользователем.

Таким образом, на нечетных шагах, где решается задача идеального одностороннего контакта, определяются размеры и положение зон контакта и отрыва; на четных шагах, где решается задача с известными предельными силами трения, для зоны контакта определяются размеры и положение зон сцепления и скольжения.

Применим описанный выше алгоритм для расчета арки в упругой среде (рис.2). В поперечном сечении тело трубы представляет собой двухрадиусную арку, выполненную из двойного мостолиста. Для определения напряженно-деформированного состояния упругой среды и арки полагаем, что возможно оползание грунта по всей линии их контакта.

Размеры расчетной области по ширине (55 м) принимаем из условия отсутствия влияния закрепления по контуру указанной области, на НДС арки и прилегающей упругой среды.

Аппроксимируем арку равными конечными элементами. Аппроксимация упругой среды по линии контакта с аркой должна обеспечить контакт «узел в узел», что достигается совпадением координат узлов упругой среды и арки (рис. 2). Для каждой контактной пары назначим локальные оси (нормальную и тангенциальную к линии контакта).

Для реализации вышеприведенного алгоритма необходимо сформировать нормальную \mathbf{R}_n и тангенциальную \mathbf{R}_τ контактные матрицы жесткости. Сформируем столбец j нормальной КМЖ (рис.2.1, а).

Для этого:

– отбросим нормальную связь контактной пары j ,

– приложим единичные силы $\overline{F}_{nj} = 1$ к узлам контактной пары j в направлении нормали к поверхности контакта и найдем взаимное перемещение δ_{nj} контактной пары точек j по нормали;

– найдем реакции по нормали к линии контакта r_{nij} во всех ($i=1, \dots, nk$) кон-

тактных пар;

- найдем силу $F_i^n = \frac{1}{\delta_i^n}$, которая обеспечит единичное взаимное перемещение узлов контактной пары;
- сформируем столбец j нормальной контактной МЖ по формуле:

$$r_{nij} = F_{ij} \cdot \overline{r_{nij}} \quad (i=1 \dots nk).$$

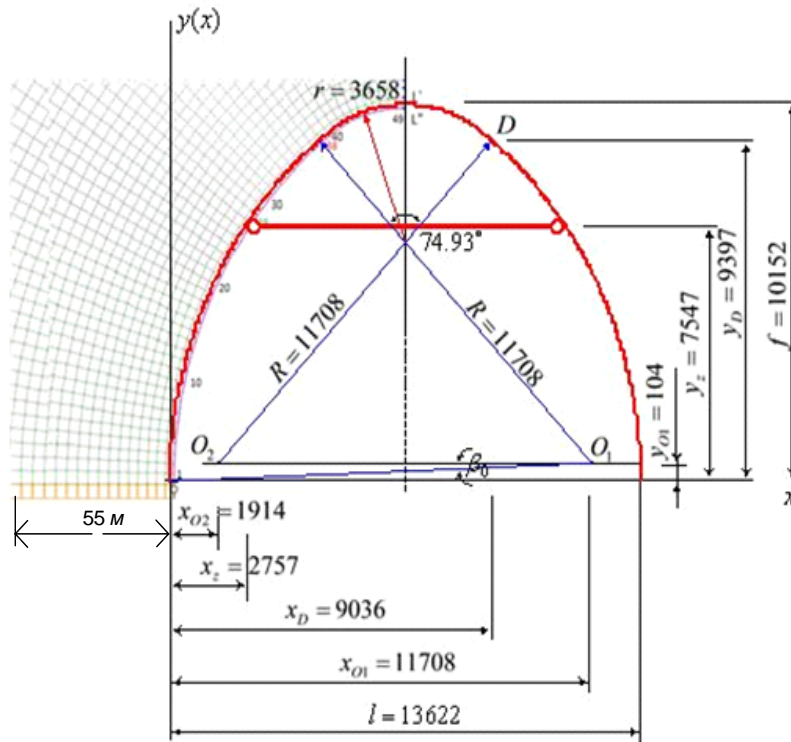


Рис. 2. Расчетная схема, характерные контактные пары точек

Тангенциальная КМЖ формируется аналогично (рис 1, б).

Компонентами грузовых векторов $R_{TF} \neq R_{TF}$ являются тангенциальные и нормальные реакции в контактных парах от заданной нагрузки (например собственного веса упругой среды).

На первом шаге решается ЛЗД (2.3), в результате получаем $x_n^{(1)}$ – силы контактного взаимодействия по нормали к L , в нашем случае по результатам расчета получаем тривиальное решение т.к. все компоненты грузового вектора неотрицательные, а это значит, что отрыва не произошло.

На втором шаге формируем грузовой вектор F_f от предельных сил трения $f x_n^{(1)}$, добавляя их в расчетную схему (в каждой контактной паре т.к. все точки прижаты по линии контакта) к существующей нагрузке – собственному весу. Далее решается ЛЗД (2.4); в результате имеем $x_T^{(2)}$ – силы контактного взаимодействия по касательной к L . Для рассмотренного нами случая получается нетривиальное решение в результате того, что некоторые компоненты грузового вектора отрицательные, что свидетельствует о проскальзывании точек контактной пары, В представленной задаче на втором шаге итераций произошло проскальзывание с 9 по 40 контактные пары точек (рис. 2).

Для достижения необходимой точности результата в нашем случае потребовалось

30 шагов. На нечетных шагах получили тривиальное решение в ходе всех итераций, а значит, отрыва не произошло. На чётных шагах происходит проскальзывание в некоторой области, размеры которой определяются номерами контактных пар точек (см. табл. 1 и рис.2).

Таблица 1

Положение зоны проскальзывания на разных шагах алгоритма

	ш аг2	ш аг4	ш аг6	ш аг8	ш аг10	ш аг12	ш аг14	ш аг16
№ точек	9 -40	8 -32	8 -40	8 -33	8 -40	8 -35	8 -40	8 -36
	ш аг18	ш аг20	ш аг22	ш аг24	ш аг26	ш аг28	ш аг30	
№ точек	8 -40	8 -37	8 -40	8 -38	8 -39	8 -38	8 -39	

Целью расчетов являлось с одной стороны исследование сходимости используемого алгоритма, и, с другой стороны, определение параметров НДС арки.

На рис 3.1 проиллюстрирована сходимость итерационного процесса на примерах нормальных сил контакта взаимодействия (рис3 а), касательных сил контактного взаимодействия (рис. 3. б) размеров зоны проскальзывания (рис. 3.).

Рассмотрим несколько характерных точек. В точках 28-32 (рис 2.2) наблюдается быстрая сходимость сил контактного взаимодействия (рис 3, а), в точках 37-41 сходимость медленнее (рис 3 б).

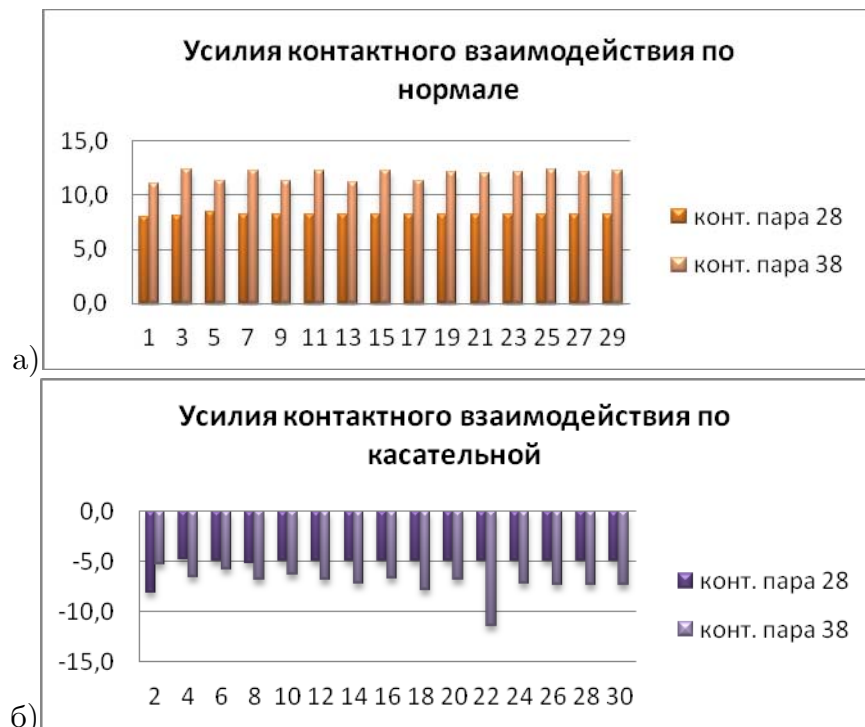


Рисунок 3. Ряды сходимости реакций для 28-ой и 38-ой контактных пар точек а) по нормали; б) по касательной

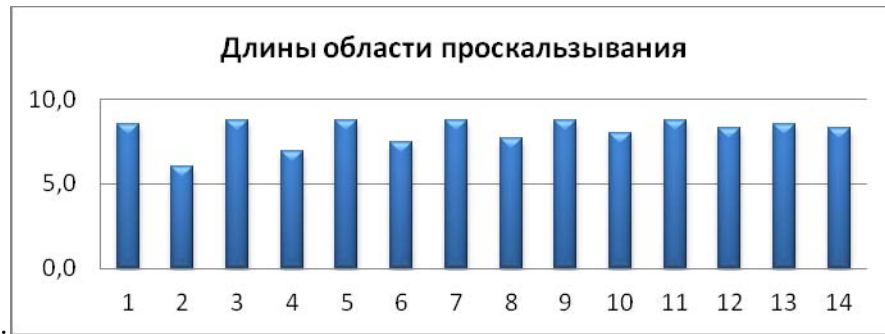


Рис. 4. Ряды сходимости длины зоны проскальзывания

На рис. 4 изображены эпюры изгибающих моментов и продольных сил. Опасное сечение находится в точке № 4 с координатами (-6.730; 1373), где $N = -5.27$ МН; $M = -0.519$ МН·м. Максимальное напряжение равно:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{0.519}{1.225 \cdot 10^{-3}} - \frac{5.27}{0.02188} = -240.9 \text{ МПа}$$

$$\text{где } W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{1.98 \cdot 10^{-4}}{0.1616} = 1.225 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3, \quad A = 0.02188 \text{ м}^2.$$

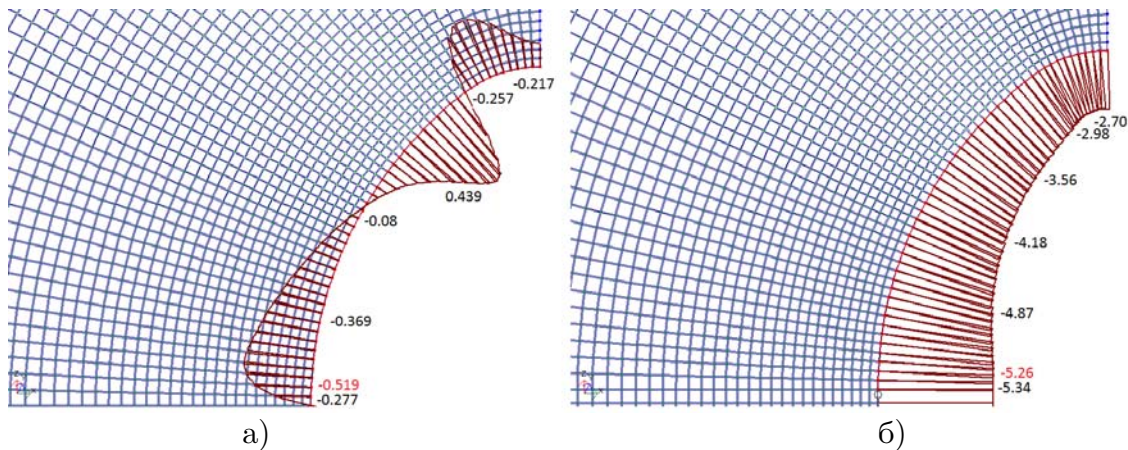


Рис. 5. Эпюра а) изгибающих моментов и б) продольных сил

Использование в алгоритме Кравчука метода перемещений решения ЛЗД для задач идеального контакта и контакта с трением (при известных предельных силах трения) показало быструю сходимость как по размерам зон сцепления/проскальзывания, так и по усилиям взаимодействия арки с упругой средой.

Результаты расчета ГМТ показывают что практически по всей оси арки происходит проскальзывание грунта. Это обстоятельство можно использовать при простейшем прикидочном расчете, когда грунт отбрасывается и действие его заменяется силами нормальными к оси арки и касательными предельными силами трения по всей оси арки.

Список литературы

- [1] Методические рекомендации по применению металлических гофрированных труб. Росавтодор. Москва 2002 г;
- [2] Волкушевский А.В., Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов – М., Энергоиздат, 1981–136 с.;
- [3] Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложение. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.–М., Мир, 1989–494 с.;
- [4] Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике.–М., МГАПИ, 1997–340 с.;
- [5] Ловцов А.Д. Алгоритмы метода перемещений для расчета систем с односторонними связями // Научно-технические ведомости СПбГТУ.– 2004. – №2. – С. 220 – 227.;
- [6] Ловцов А.Д. Применение алгоритма Лемке к задаче изгиба балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 5 – С.115 – 42.;
- [7] Фёдорова В. С., Ловцов А. Д. Взаимодействие арки с упругой средой посредством трения Кулона. Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса : материалы региональной научно-практической конференции. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2012. – Вып. 12. – С.274;

E-mail: ypi12071980@mail.ru