ISSN 2079-8490

Электронное научное издание
«Ученые заметки ТОГУ»
2014, Том 5, № 2, С. 1 – 4

Свидетельство
Эл № ФС 77-39676 от 05.05.2010
http://pnu.edu.ru/ru/ejournal/about/
ejournal@khstu.ru

УДК 530.145.1

© 2014 г. **А. В. Кирюшин,** канд. физ.-мат. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

О КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ БЕЗ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Предпринята попытка сформулировать основные положения квантовой механики без комплексных функций. Показано, что использование вещественных функций приводит к ненужному усложнению математического аппарата квантовой механики.
Ключевые слова: уравнение Шредингера, волновая функция, принцип суперпозиции.

A. V. Kiryushin

ABOUT QUANTUM MECHANICS WITHOUT COMPLEX FUNCTIONS

An attempt to formulate basic provisions of quantum mechanics without complex functions is made. It is shown that use of material functions leads to unnecessary complication of mathematical apparatus of quantum mechanics.
Keywords: schrödinger's equation, wave function, principle of superposition.

Введение

По мнению Д. И. Блохинцева, наиболее важной особенностью нестационарного уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi \qquad (1)$$

является наличие мнимой единицы [2]. Вследствие этого волновая функция $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$ – решение уравнения (1) – есть комплексная функция вещественных переменных x,y,z,t. С другой стороны, все величины, измеряемые в экспериментах, описываются вещественными числами. Перед студентами, приступающими к изучению квантовой механики, возникает психологический барьер, поскольку сама мысль о комплексной природе волновых процессов противоречит здравому смыслу. В связи с этим в данной работе предпринята попытка сформулировать основные положения квантовой механики (волновая функция, принцип суперпозиции, уравнение Шредингера) с использованием вещественных функций. Работа носит методический характер и предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей физики в технических вузах.

Волновая функция

В квантовой механике волновая функция $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$ полностью определяет состояние частицы в точке x,y,z в момент времени t. В широко распространенных учебных пособиях [6-8] проблема комплексной природы Ψ решается утверждением о том, что физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля a

$$\rho = a^2 = |\Psi|^2, \qquad (2)$$

представляющий плотность вероятности обнаружения частицы. Однако, такое утверждение носит половинчатый характер, поскольку волновая функция определяется не только амплитудой a, но и фазой φ:

$$\Psi = ae^{i\varphi} \qquad (3)$$

(здесь a и φ – чисто вещественные функции).

Студенты, начинающие изучать квантовую механику, знакомы с дифференциальным волновым уравнением

$$\Delta f - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (4)$$

и комплексным представлением его решения в виде

$$f = Ae^{i(kr-\omega t)} (A = const). \qquad (5)$$

Подчеркнем, что выражения (3) и (5) принципиально отличаются друг от друга. В записи (5) предполагается, что вещественная часть выражения $Ae^{i(kr-\omega t)}$ является решением уравнения (4). В то же время ни вещественная, ни комплексная часть выражения $ae^{i\varphi}$ не являются решением уравнения Шредингера (1).

Как известно, любое комплексное число может быть представлено в виде совокупности двух вещественных чисел. Комплексная функция (3) может быть сведена к заданию двух вещественных функций

$$a = a(x,y,z,t); \qquad \varphi = \varphi(x,y,z,t). \qquad (6)$$

Пара этих функций вместо Ψ – функции (3) полностью определяет состояние частицы. Физический смысл первой из них определяет формула (2). Физический смысл второй функции раскрывает принцип суперпозиции состояний.

Принцип суперпозиции

Принцип суперпозиции, составляющий одну из основ квантовой механики, может быть сформулирован следующим образом.Если Ψ_1 и Ψ_2 – волновые функции, описывающие какие-либо два состояния частицы, то их линейная комбинация

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 \,, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные числа, также описывает некоторое состояние этой частицы.

Поучительным примером, иллюстрирующим проявление этого принципа, является дифракция микрочастиц на двух щелях. Анализ такого опыта [4] приводит к удивительномувыводу о том, что явления в квантовой механике не складываются, а интерферируют. При этом результат интерференции, как это следует из формул (2), (3), (7), зависит от фаз (точнее, разности фаз) волновых функций.

Представим комплексные числа C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = b_1 e^{i\beta_1} \,, \qquad C_2 = b_2 e^{i\beta_2}, \tag{8}$$

а волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 запишем в виде

$$\Psi_1 = a_1 e^{i\varphi_1} \,, \qquad \Psi_2 = a_2 e^{i\varphi_2}. \tag{9}$$

Далее, используя соотношение (7), можно легко получить выражения

$$a = [(a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + 2a_1b_1a_2b_2Cos(\beta_2 + \varphi_2 - \beta_1 - \varphi_1)]^{1/2} \,, \tag{10}$$

$$tg\varphi = \frac{a_1b_1Sin(\beta_1 + \varphi_1) + a_2b_2Sin(\beta_2 + \varphi_2)}{a_1b_1Cos(\beta_1 + \varphi_1) + a_2b_2Cos(\beta_2 + \varphi_2)} \,. \tag{11}$$

Теперь можно сформулировать принцип суперпозиции в терминах вещественных функций следующим образом. Если две пары вещественных функций

$$b_1 = b_1(x,y,z,t), \qquad \beta_1 = \beta_1(x,y,z,t) \tag{12}$$

и

$$b_2 = b_2(x,y,z,t), \qquad \beta_2 = \beta_2(x,y,z,t) \tag{13}$$

описывают какие-либо два состояния частицы, то пара вещественных функций (6), определяемая формулами (10), (11), также описывает какое-либо состояние этой частицы.

К формулам вида (10), (11) студенты подготовлены изучением раздела «Колебания и волны», в котором рассматривается сложение одинаково направленных колебаний методом векторных диаграмм. Однако, формулировка принципа суперпозиции с использованием вещественных функций (6),(12),(13) выглядит явно тяжеловесной и громоздкой в сравнении с компактной записью (7). Легко представить, какие усложнения могли возникнуть, если бы соотношение (7) содержало не два, а большее число слагаемых.

Уравнение Шредингера

Избавимся от комплексных функций в уравнении Шредингера (1). Для этого, следуя [1], подставим выражение (3) в уравнение (1) и приравняем чисто вещественные и чисто мнимые части слева и справа. В результате получим

$$-\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m}(\nabla\varphi)^2 + U - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\Delta a}{a} \,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + div\left(a^2\cdot\frac{\hbar}{m}\cdot\nabla\varphi\right) = 0 \,. \tag{15}$$

Эта система уравнений полностью эквивалентна исходному уравнению (1). Казалось бы все хорошо, поскольку, во-первых, эта система содержит только вещественные функции координат и времени; во-вторых, физический смысл полученных уравнений связан с знакомыми мотивами – уравнением Гамильтона – Якоби и уравнением непрерывности.

Однако, возникает новая проблема: полученная система уравнений нелинейна, вследствие чего ее решение связано с преодолением серьезных математических трудностей. Усмотреть в системе уравнений (14),(15) "вещественный" принцип суперпозиции (10) – (13) способен лишь сверхпроницательный математический ум. В то же время традиционная запись (7) этого принципа является очевидным следствием линейности фундаментального уравнения (1).

Отметим, что, если ввести в рассмотрение оператор Гамильтона

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\,, \tag{16}$$

то уравнение Шредингера (1) примет особенно простой вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi\,, \tag{17}$$

который справедлив не только для отдельной частицы, но и для системы частиц (атом, молекула, кристалл).

Выводы

Таким образом, использование вещественных функций приводит к ненужному, лишнему усложнению математического аппарата квантовой механики. Широкое применение комплексных функций обусловлено не укоренившейся привычкой физиков, а способностью этих функций свести сложные природные явления к простым и изящным формулам. Интересно, что открытая еще в 1843 г. комплексная алгебра четверки чисел (кватернионов) оказалась тесно связанной с природой спина электрона [5].

Поразительная эффективность комплексных функций в квантовой механике вселяет веру в то, что неподвластные человеческому воображению явления можно описать простыми и компактными уравнениями. Вспоминаются слова Дирака: «Физические уравнения должны обладать математической красотой» [3].

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. - М.: Физматлит,2004. - 800 с.
[2] Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. - СПб.: Лань, 2004. – 672 с.
[3] Дирак П. А. М. Воспоминания о необычной эпохе. – М.: Наука, 1990. – 208 с.
[4] Фейнман Р. Характер физических законов. – М.: Наука, 1987. – 164 с.
[5] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. – 40 с.
[6] Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: учебное пособие для втузов. – М.: Academia, 2003. – 720 с.
[7] Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для втузов. – М.: Academia, 2003. – 560 с.
[8] Савельев И. В. Курс общей физики: в 4 т. Т.3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: КНОРУС, 2009. – 368 с.

E-mail:
Кирюшин Анатолий Васильевич – avkirjushin47@mail.ru