ISSN 2079-8490

Электронное научное издание
«Ученые заметки ТОГУ»
2019, Том 10, № 2, С. 300 – 302

Свидетельство
Эл № ФС 77-39676 от 05.05.2010
http://pnu.edu.ru/ru/ejournal/about/
ejournal@pnu.edu.ru

УДК 519.6

© 2019 г. **В. Я. Прудников,** канд. физ.-мат. наук

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫПУКЛОГО ФУНКЦИОНАЛА

В работе рассмотрен вопрос о непрерывности выпуклого функционала на его эффективном множестве

Ключевые слова: выпуклый функционал, непрерывность.

V.Y. Prudnikov

SOME REMARKS ABOUT CONTINUITY CONVEX FUNCTIONAL

The paper deals with the problem of continuity of convex functional on its effective set.

Keywords: convex functions, continuity.

Известны условия непрерывности выпуклого функционала F в топологии данного нормированного пространства (см., например, [1]). В данной работе вопрос о непрерывности такого функционала рассмотрен на эффективном множестве $dom\, F$.

Обозначим через

$$[u_0, u] := \{ v \in X: v = u_0 + t(u - u_0), \qquad t \in [0,1] \}$$

отрезок с концами в точках u_0, u. Заметим, что

$$[2u_0 - u, u] = \{v \in X: v = u_0 + t(u - u_0), \qquad t \in [-1,1]\}$$

Пусть для $\varepsilon > 0$

$$b(u_0, \varepsilon) := \cup\{[u_0, u]: \|u - u_0\| = \varepsilon, u \in dom\, F\}$$

$c(u_0, \varepsilon) := \cup\{[2u_0 - u, u]: \|u - u_0\| = \varepsilon;\ u, 2u_0 - u \in dom\, F\}$, со $c(u_0, \varepsilon)$ – выпуклая оболочка множества $c(u_0, \varepsilon)$.

Теорема 1. *Пусть F – собственный выпуклый функционал, $u_0 \in dom\, F, \varepsilon > 0$.*

Если $\alpha_\varepsilon := sup\{F(u): u \in b(u_0, \varepsilon)\} < \infty$, то существует константа $d_\varepsilon \geq 0$ такая, что для всех элементов $u \in b(u_0, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$F(u) - F(u_0) \leq d_\varepsilon \|u - u_0\|$$

Доказательство. Для любого элемента $u \in b(u_0, \varepsilon)$ существуют $v \in dom\, F$, $\|v - u_0\| = \varepsilon$ и число $t_0 \in (0,1)$ такие, что

$$u = u_0 + t_0(v - u_0),$$

а так как функция $t \to F(u_0 + t(v - u_0))$ выпуклая, то

$$\frac{F(u_0 + t_0(v - u_0)) - F(u_0)}{t_0} \leq F(v) - F(u_0).$$

Учитывая, что

$$t_0 = \frac{\|u - u_0\|}{\varepsilon}$$

и, введя обозначение

$$d_\varepsilon = \frac{\alpha_\varepsilon - F(u_0)}{\varepsilon},$$

получим

$$F(u) - F(u_0) \leq d_\varepsilon \|u - u_0\|.$$

Заметим, что из этого результата следует *полунепрерывность сверху функционала F на элементе u_0 по множеству $b(u_0, \varepsilon)$.*

В следующей теореме приведено условие локальной липшицевости выпуклого функционала, а значит и непрерывности.

Теорема 2. *Пусть F –собственный выпуклый функционал, $u_0 \in dom\, F$. $\varepsilon > 0$.*

Если $\alpha_\varepsilon := sup\{F(u): u \in c(u_0, \varepsilon)\} < \infty$, то существует константа $d_\varepsilon \geq 0$ такая, что для всех элементов $u \in c(u_0, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$|F(u) - F(u_0)| \leq d_\varepsilon \|u - u_0\|,$$

а если $u \in co\, c(u_0, \varepsilon)$, то

$$F(u) - F(u_0) \leq d_\varepsilon \|u - u_0\|$$

Доказательство. Для любого элемента $u \in c(u_0, \varepsilon)$ существует $v \in dom\, F$, $\|v - u_0\| = \varepsilon$ и число $t_0 \in [0,1]$ такие , что $u = u_0 + t_0(v - u_0)$. Учитывая, что функция $t \to F(u_0 + t(u - u_0))$

выпуклая на отрезке [-1,1], получим неравенства

$$\frac{F(2u_0 - v) - F(u_0)}{-1-0} \le \frac{F\big(u_0 + t_0(v - u_0)\big) - F(u_0)}{t_0 - 0} \le \frac{F(v) - F(u_0)}{1-0}.$$

Поэтому $-\big(\alpha_\varepsilon - F(u_0)\big)t_0 \le F\big(u_0 + t_0(v - u_0)\big) - F(u_0) \le \big(\alpha_\varepsilon - F(u_0)\big)t_0$,
откуда, заметив, что

$$t_0 = \frac{||u - u_0||}{\varepsilon}$$

и, введя обозначение

$$d_\varepsilon \coloneqq \frac{\alpha_\varepsilon - F(u_0)}{\varepsilon},$$

приходим к неравенству
$|F(u) - F(u_0)| \le d_\varepsilon \big||u - u_0|\big|$
для всех $u \in c(u_0, \varepsilon)$.

Пусть теперь элемент $u \in co\, c(u_0, \varepsilon)$. Тогда найдутся элементы u_1, u_2, принадлежащие $c(u_0, \varepsilon)$ и число $t \in [0,1]$ такие, что $u = tu_1 + (1 - t)\, u_2$. Поэтому

$$F(u) - F(u_0) = F(tu_1 + (1 - t)\, u_2) - F(u_0) \le t\,(F(u_1) - F(u_0)) + \\ +(1 - t)\,(F(u_2) - F(u_0)) \le d_\varepsilon \big||u - u_0|\big| .$$

Список литературы

[1] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М. : Наука, 1982.

E-mail:
Прудников В. Я. – prudnickov.vit@yandax.ru