Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
“Тихоокеанский Государственный университет”

Тепловая напряженность деталей ДВС

Методические указания по выполнению контрольной работы по курсу «Тепловая напряженность деталей двигателей внутреннего сгорания» для студентов заочной формы обучения

Хабаровск ТОГУ
2009

Метод конечных элементов

Тепловые напряжения в деталях ДВС возникают из-за наличия температурных градиентов. Поэтому одной из основных задач при расчете тепловой напряженности является расчет поля температур. В настоящее время при решении краевых задач для тел сложной формы используется метод конечных элементов (МКЭ).
В математическом отношении этот метод относится к группе вариационно-разностных [1]. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ стал широко применяться при проектировании самолетов и автомобилей, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Решение систем дифференциальных уравнений с граничными условиями (краевая задача) методом конечных элементов сводится к поиску минимума определенным образом составленного функционала.

Суть решения краевой задачи методом конечных элементов заключается в последовательном выполнении следующих этапов.

1. Рассматриваемая исходная область разбивается с помощью сетки на отдельные подобласти - конечные элементы.
2. Искомая функция аппроксимируется кусочно-непрерывными функциями, определенными на множестве конечных элементов. Для аппроксимации используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах и на границах элементов.
3. Значения искомой функции определяются путем приближенного решения соответствующей вариационной задачи, которая , в свою очередь, сводится к минимизации определенным образом построенного функционала. Оператор I[f(**x**)] называется функционалом, заданным на некотором множестве функций, если каждой функции f(**x**) из этого множества, по некоторому правилу ставится в соответствие числовое значение I[f(**x**)]. На практике функционалы обычно задаются в виде определенных интегралов, в подынтегральные выражения которых входят функции f(**x**) [2].

Рассмотрим реализацию МКЭ на примере решения одномерной стационарной задачи теплопроводности для стержня длиной L

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)-\alpha_V T+q_V=0 \qquad (1)$$

при граничных условиях третьего рода на левой границе (x=0):

$$-\lambda\frac{dT}{dx}+k_0T=q_0, \qquad (2)$$

и правой границе (x=L):

$$\lambda\frac{dT}{dx}+k_LT=q_L, \qquad (3)$$

где
T = Tc – To, Tc – искомая температура стержня, To – температура окружающей среды,
λ - коэффициент теплопроводности материала, из которого сделан стержень,
$\alpha_V = k\dfrac{U}{S}$, k - коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности стержня, U – периметр, S – площадь поперечного сечения стержня,
q_v - объемная плотность мощности источников теплоты внутри стержня, k_0 – коэффициент теплоотдачи на левой границе,
k_L – коэффициент теплоотдачи на правой границе,
q_0 – поверхностная плотность мощности источников теплоты на левой границе,
q_L – поверхностная плотность мощности источников теплоты на правой границе.
Коэффициент теплоотдачи k, объемная плотность мощности источников теплоты внутри стержня q_v и коэффициент теплопроводности λ считаются заданными функциями координаты *x*.
Температура окружающей среды To, периметр U, площадь сечения S, длина L, коэффициенты теплоотдачи α_0, α_L и поверхностные плотности мощности источников теплоты q_0 и q_L на левой и правой границах стержня считаются постоянными заданными величинами.

Введем следующие обозначения:
y (x) = T,
P(x) = λ,
Q(x) = α_V
F(x) = q_V
Уравнение (1), после умножения всех его слагаемых на -1, в этих обозначениях примет вид:

$$(-P(x)\cdot y')' + Q(x)\cdot y = F(x) \tag{4}$$

Штрихом обозначена производная по координате *x*.
Граничные условия (2-3) запишем в виде:

$$\begin{aligned} &\alpha_0\cdot y_0' + \beta_0\cdot y_0 = \gamma_0 \\ &\alpha_n\cdot y_n' + \beta_n\cdot y_n = \gamma_n \end{aligned} \tag{5}$$

где α_0 = -P(0), y_0 = y(0), β_0=k_0, γ_0=q_0, α_n = P(L), y_n = y(L), β_n=k_L, γ_n=q_L
Индексом 0 обозначается левая граница (x=0), индексом n обозначется правая граница (x=L).
Решением этого уравнения является минимум функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b (P\cdot y'^2 + Q\cdot y^2 - 2\cdot F\cdot y)dx + \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha_0 = 0 \\ \dfrac{P_0}{\alpha_0}(2\cdot\gamma_0\cdot y_0 - \beta_0\cdot y_0^2) \end{cases} + \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha_n = 0 \\ \dfrac{P_n}{\alpha_n}(\beta_n\cdot y_n^2 - 2\cdot\gamma_n\cdot y_n) \end{cases}$$

Разобъем стержень L на n элементов длиной h=L/n каждый.

Для каждого узла элемента $[x_i, x_{i+1}]$ введем функцию формы.

Для узла x_i $N_i = \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$, для узла x_{i+1} $N_{i+1} = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$.Количество функций формы равно количеству узлов в элементе. Функции формы должны обладать следующими свойствами: $N_i(x_{i+1})=0$, $N_i(x_i)=1$, $N_{i+1}(x_{i+1})=1$, $N_{i+1}(x_i)=0$.

В функционале $\Phi(y)$ заменим интеграл на отрезке $[a, b]$ суммой n интегралов на элементах $[x_i, x_{i+1}]$, в которых заменим функцию $y(x)$ ее аппроксимацией $y=N_i \cdot y_i+ N_{i+1} \cdot y_{i+1}$. Обозначим: $P_i=P(x_i)$, $Q_i=Q(x_i)$, $F_i=F(x_i)$, $x_i=a+i \cdot h$.

$$\int_a^b (P \cdot y'^2 + Q \cdot y^2 - 2 \cdot F \cdot y)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot y'^2 + Q \cdot y^2 - 2 \cdot F \cdot y)dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [P \cdot (N'_i \cdot y_i + N'_{i+1} \cdot y_{i+1})^2 + Q \cdot (N_i \cdot y_i + N_{i+1} \cdot y_{i+1})^2 - 2 \cdot F \cdot (N_i \cdot y_i + N_{i+1} \cdot y_{i+1})]dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (A_i \cdot y_i^2 + B_i \cdot y_i \cdot y_{i+1} + C_i \cdot y_{i+1}^2 + D_i \cdot y_i + E_i \cdot y_i), \text{ где}$$

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot N_i'^2 + Q \cdot N_i^2)dx \approx \frac{0.5}{h}(P_i + P_{i+1} + h^2 \cdot Q_i)$$

$$B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot (P \cdot N'_i \cdot N'_{i+1} + Q \cdot N_i \cdot N_{i+1})dx \approx -\frac{1}{h}(P_i + P_{i+1})$$

$$C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot N'^{\,2}_{i+1} + Q \cdot N_{i+1}^2)dx \approx \frac{0.5}{h}(P_i + P_{i+1} + h^2 \cdot Q_{i+1})$$

$$D_i = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot F \cdot N_i dx \approx -F_i \cdot h$$

$$E_i = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot F \cdot N_{i+1} dx \approx -F_{i+1} \cdot h$$

Интегралы вычислены методом трапеций. Таким образом поиск минимума функционала $\Phi(y)$ свелся к минимизации функции

$$\Psi(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} (A_i \cdot y_i^2 + B_i \cdot y_i \cdot y_{i+1} + C_i \cdot y_{i+1}^2 + D_i \cdot y_i + E_i \cdot y_{i+1}) + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_0 = 0 \\ \dfrac{P_0}{\alpha_0}(2 \cdot \gamma_0 \cdot y_0 - \beta_0 \cdot y_0^2) \end{cases} + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = 0 \\ \dfrac{P_n}{\alpha_n}(\beta_n \cdot y_n^2 - 2 \cdot \gamma_n \cdot y_n) \end{cases}$$

от $n+1$ переменной $Y=\{y_0, y_1, \dots y_n\}$. Для этого надо решить систему $n+1$ уравнения:

$\dfrac{\partial \Psi}{\partial y_i} = 0$, где $i = 0 \div n$. Для внутренних точек $(i = 1 \div n-1)$ после взятия частной производной по y_i получаем уравнения:

$$y_{i-1} \cdot B_{i-1} + y_i \cdot 2 \cdot (A_i + C_{i-1}) + y_{i+1} \cdot B_i = -(D_i + E_{i-1}) \qquad (6)$$

Для граничных точек в зависимости от вида граничных условий будем иметь.
При $x = a \ (i = 0)$:

для $\alpha_0 \neq 0$ получим: $y_0 \cdot 2 \cdot (A_0 - \beta_0 \frac{P_0}{\alpha_0}) + y_1 \cdot B_0 = -(D_o + 2 \cdot \gamma_0 \frac{P_0}{\alpha_0})$,

для $\alpha_0 = 0$ получим: $y_0 \cdot \beta_0 = \gamma_0$ (из граничного условия).

При $x = b \ (i = n)$:

для $\alpha_n \neq 0$ получим: $y_n \cdot 2 \cdot (C_{n-1} + \beta_n \frac{P_n}{\alpha_n}) + y_{n-1} \cdot B_{n-1} = -(E_{n-1} - 2 \cdot \gamma_n \frac{P_n}{\alpha_n})$,

для $\alpha_n = 0$ получим: $y_n \cdot \beta_n = \gamma_n$ (из граничного условия).

Решение трехдиагональной системы линейных уравнений методом прогонки. Все уравнения решаемой системы имеют вид:

$$a_i \cdot y_{i-1} + b_i \cdot y_i + c_i \cdot y_{i+1} = d_i \qquad (7)$$

Решение можно представить в виде $y_i = \xi_{i+1} \cdot y_{i+1} + \eta_{i+1}$ или $y_{i-1} = \xi_i \cdot y_i + \eta_i$
После подстановки y_{i-1} в уравнения (2) получим

$$y_i = -\frac{c_i}{a_i \xi_i + b_i} y_{i+1} + \frac{d_i - a_i \cdot \eta_i}{a_i \xi_i + b_i},$$

$$\xi_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i \xi_i + b_i}, \quad \eta_{i+1} = \frac{d_i - a_i \cdot \eta_i}{a_i \xi_i + b_i}$$

Т.к. $a_0=0$, то можно положить $\xi_0=0$ и $\eta_0=0$ и рассчитать ξ_i и η_i, меняя i от 0 до n.
Затем рассчитывают $y_n = \frac{d_n - a_n \cdot \eta_n}{a_n \xi_n + b_n}$, т.к. $c_n=0$ и далее y_i, меняя i от n-1 до 0.
Коэффициенты в системе уравнений (2) имеют вид:
Для граничных точек:
если $\alpha_0=0$, то $a_0=0$, $b_0=\beta_0$, $c_0=0$, $d_0=\gamma_0$,
если $\alpha_0 \neq 0$, то $a_0=0$,

$$b_0 = P_0 + P_1 + h^2 \cdot Q_0 - 2 \cdot \beta_0 \frac{P_0}{\alpha_0} h,$$

$$c_0 = -(P_0 + P_1),$$

$$d_0 = F_0 \cdot h^2 - 2 \cdot \gamma_0 \frac{P_0}{\alpha_0} h.$$

если $\alpha_n=0$, то $a_n=0$, $b_n=\beta_n$, $c_n=0$, $d_n=\gamma_n$,
если $\alpha_n \neq 0$, то

$$a_n = -(P_{n-1} + P_n),$$

$b_n = P_{n-1} + P_n + h^2 \cdot Q_n + 2 \cdot \beta_n \dfrac{P_n}{\alpha_n} h$,

$c_n = 0$,

$d_n = F_n \cdot h^2 + 2 \cdot \gamma_n \dfrac{P_n}{\alpha_n} h$.

Для внутренних точек:

$a_i = -(P_i + P_{i-1})$,

$b_i = P_{i-1} + 2 \cdot P_i + P_{i+1} + 2 \cdot h^2 \cdot Q_i$,

$c_i = -(P_{i+1} + P_i)$,

$d_i = 2 \cdot F_i \cdot h^2$.

Коэффициенты получены из уравнения (6) умноженного на h.

Значения производных во внутренних точках равны $y'_i = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h}$,

для x=0 $y'_0 = \dfrac{-y_2 + 4 \cdot y_1 - 3 \cdot y_0}{2 \cdot h}$, для x=L $y'_n = \dfrac{y_{n-2} - 4 \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_n}{2 \cdot h}$

Для отладки программы можно задать вид решения R(x), в качестве правой части взять F(x)=(-P(x)·R′)′+Q(x)·R , а в граничных условиях положить

$\gamma_0 = \alpha_0 \cdot R'(0) + \beta_0 \cdot R(0)$

$\gamma_n = \alpha_n \cdot R'(L) + \beta_n \cdot R(L)$

Отличие найденного решения в узловых точках от заданного R(x) должно быть порядка h^2 или меньше.

Пример. Найти распределение температуры в круглом стержне длиной L = 2 м и радиусом r = 0.1 м, изготовленного из материала с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся по зависимости $\lambda = (40 + 10\dfrac{x}{L})\dfrac{вт}{м \cdot K}$,

постоянным коэффициентом теплоотдачи с боковой поверхности $k = 5\dfrac{вт}{м^2 \cdot K}$,

тепловыделением внутри стержня изменяющимся по зависимости

$q_V = (100 + 50\dfrac{x}{L})\dfrac{вт}{м^3}$.

Температура окружающей среды To = 10ºC, периметр U = 2 π r =0.628 м, площадь сечения S = π r^2 = 0.0314 $м^2$, коэффициент теплоотдачи на левой границе $k_0 = 2\dfrac{вт}{м^2 \cdot K}$, коэффициент теплоотдачи на правой границе $k_L = 10\dfrac{вт}{м^2 \cdot K}$,

поверхностная плотность мощности источников теплоты на левой границе $q_0 = 15\dfrac{вт}{м^2}$, поверхностная плотность мощности источников теплоты на правой границе $q_L = 30\dfrac{вт}{м^2}$.

Введем обозначения:
y (x) = T,

$P(x) = (40 + 10\frac{x}{2})$,

Q(x) = 100,

$F(x) = (100 + 50\frac{x}{2})$.

При этих исходных данных уравнение (4) примет вид:

$$(-(40 + 5 \cdot x) \cdot y')' + 100 \cdot y = (100 + 25 \cdot x), \qquad (8)$$

граничные условия (5) примут вид:

$$\begin{cases} -40 \cdot y' + 2 \cdot y = 15 \\ 50 \cdot y' + 10 \cdot y = 30 \end{cases} \qquad (9)$$

Решением этого уравнения является минимум функционала:

$$\Phi(y) = \int_0^2 ((40 + 5 \cdot x) \cdot y'^2 + 100 \cdot y^2 - 2 \cdot (100 + 25 \cdot x) \cdot y)dx - (30 \cdot y_0 - 2 \cdot y_0^2) + (10 \cdot y_n^2 - 60 \cdot y_n)$$

Разобьем область интегрирования на 10 конечных элементов длиной h=0.2 каждый. В функционале Ф(y) заменим интеграл на отрезке [0, 2] суммой n=10 интегралов на элементах [x_i, x_{i+1}], в которых заменим функцию y(x) ее аппроксимацией y(x)=$N_i(x) \cdot y_i + N_{i+1}(x) \cdot y_{i+1}$.

Значения функций P(x), Q(x) и F(x) в узловых точках:

x_i	P_i	Q_i	F_i
0,0	40,00	100,00	100,00
0,2	41,00	100,00	105,00
0,4	42,00	100,00	110,00
0,6	43,00	100,00	115,00
0,8	44,00	100,00	120,00
1,0	45,00	100,00	125,00
1,2	46,00	100,00	130,00
1,4	47,00	100,00	135,00
1,6	48,00	100,00	140,00
1,8	49,00	100,00	145,00
2 ,0	50,00	100,00	150,00

После преобразований получим трех диагональную систему:
$a_i \cdot y_{i-1} + b_i \cdot y_i + c_i \cdot y_{i+1} = d_i$, где

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0,00	85,80	-81,00	10,00
1	-81,00	172,00	-83,00	8,40
2	-83,00	176,00	-85,00	8,80
3	-85,00	180,00	-87,00	9,20
4	-87,00	184,00	-89,00	9,60
5	-89,00	188,00	-91,00	10,00
6	-91,00	192,00	-93,00	10,40
7	-93,00	196,00	-95,00	10,80
8	-95,00	200,00	-97,00	11,20
9	-97,00	204,00	-99,00	11,60
10	-99,00	107,00	0,00	18,00

Решив систему методом прогонки получим

x_i	y_i	y'_i
0,0	1,36	-0,31
0,2	1,32	-0,15
0,4	1,30	-0,03
0,6	1,30	0,05
0,8	1,32	0,11
1,0	1,35	0,15
1,2	1,38	0,19
1,4	1,42	0,22
1,6	1,47	0,24
1,8	1,52	0,26
2,0	1,57	0,29

Т.к. y(x) = Тс –То, а по условию задачи То = 10 ºС, то окончательно получаем распределение температуры внутри стержня Тс(x) = y(x) + То:

x	Тс	$\frac{dTc}{dx}$
0,0	11,36	-0,31
0,2	11,32	-0,15
0,4	11,30	-0,03
0,6	11,30	0,05
0,8	11,32	0,11
1,0	11,35	0,15
1,2	11,38	0,19
1,4	11,42	0,22
1,6	11,47	0,24
1,8	11,52	0,26
2,0	11,57	0,29

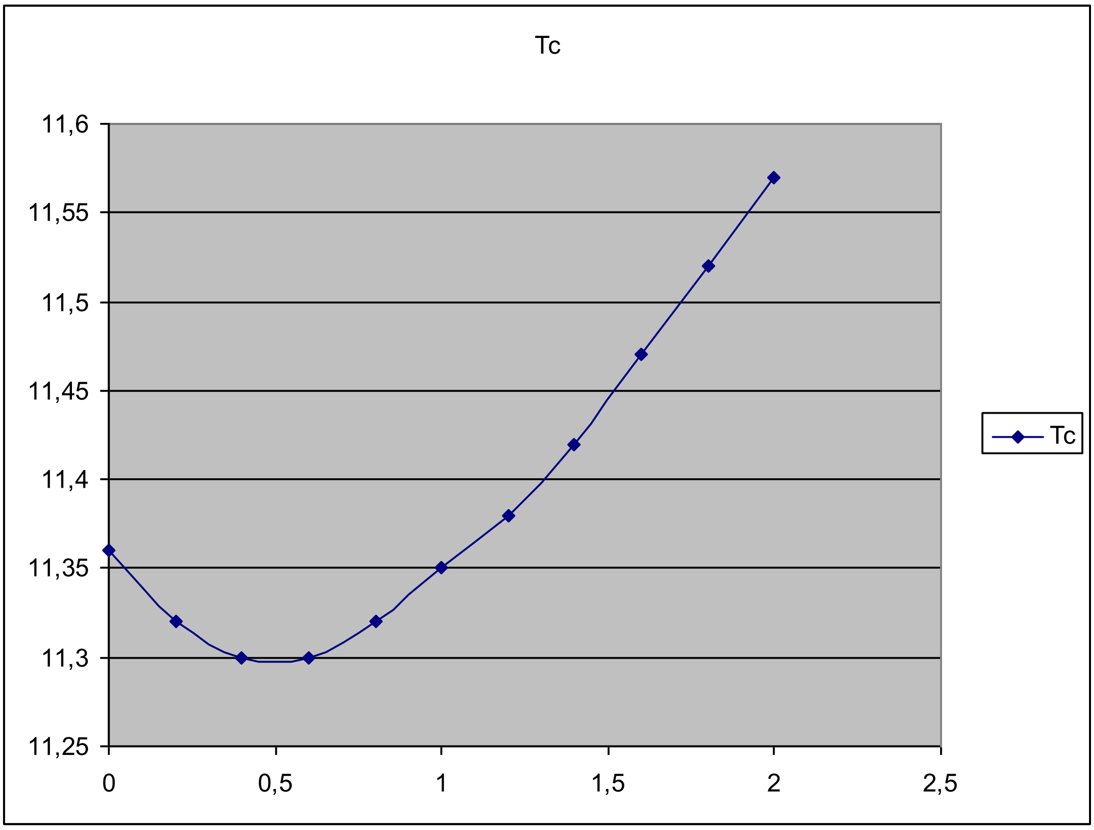

График распределения температуры внутри стержня

Вариант задания (№) определяется суммой трех последних цифр в номере зачетки. Коэффициент теплопроводности задается формулой $\lambda = (10 + 5\frac{x}{L}) \cdot (№ + 2)$.

Коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности принимается постоянным и равным k=5.

Тепловыделение внутри стержня задается формулой $q_V = (20 + 5\frac{x}{L}) \cdot (№ + 3)$

Температура окружающей среды принимается равной T_0=20

Длина и радиус стержня, коэффициенты теплоотдачи на границах, мощность источников теплоты на границах выбираются из таблицы 1 в соответствии с номером варианта.

Количество элементов для всех вариантов принимается равным n = 10.

При оформлении контрольной работы помимо выкладок нужно предоставить в табличной форме значения функций P(x), Q(x) и F(x) в узловых точках, таблицу с коэффициентами решаемой системы (a_i, b_i , c_i, d_i), таблицу и график с полученными значениями распределения температуры Tc внутри стержня.

Если расчеты выполнялись с помощью ЭВМ, то необходимо предоставить исходный текст программы.

Варианты заданий Таблица 1.

№ варианта	Длина стержня (L)	Радиус стержня (r)	Коэффициент теплоотдачи на левой границе (k_0)	Мощность источников теплоты на левой границе (q_o)	Коэффициент теплоотдачи на правой границе (k_L)	Мощность источников теплоты на правой границе (q_L)
0	0,50	0,050	1,0	8	3,0	12
1	0,55	0,055	1,5	12	3,5	14
2	0,60	0,060	2,0	16	4,0	16
3	0,65	0,065	2,5	20	4,5	18
4	0,70	0,070	3,0	24	5,0	20
5	0,75	0,075	3,5	28	5,5	22
6	0,80	0,080	4,0	32	6,0	24
7	0,85	0,085	4,5	36	6,5	26
8	0,90	0,090	5,0	40	7,0	28
9	0,95	0,095	5,5	44	7,5	30
10	1,00	0,100	6,0	48	8,0	32
11	1,05	0,105	6,5	52	8,5	34
12	1,10	0,110	7,0	56	9,0	36
13	1,15	0,115	7,5	60	9,5	38
14	1,20	0,120	8,0	64	10,0	40
15	1,25	0,125	8,5	68	10,5	42
16	1,30	0,130	9,0	72	11,0	44
17	1,35	0,135	9,5	76	11,5	46
18	1,40	0,140	10,0	80	12,0	48
19	1,45	0,145	10,5	84	12,5	50
20	1,50	0,150	11,0	88	13,0	52
21	1,55	0,155	11,5	92	13,5	54
22	1,60	0,160	12,0	96	14,0	56
23	1,65	0,165	12,5	100	14,5	58
24	1,70	0,170	13,0	104	15,0	60
25	1,75	0,175	13,5	108	15,5	62
26	1,80	0,180	14,0	112	16,0	64
27	1,85	0,185	14,5	116	16,5	66

Литература

1. Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. - Математические модели технических объектов. М., Высшая школа, 1986.
2. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. - Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. М., Высшая школа, 1990.
3. Зенкевич О. - Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
4. Сегерлинд Л. - Применение метода конечных элементов. М., 1979.
5. Петриченко Р.М. - Элементы САПР ДВС. Л., Машиностроение, 1990.