

**Использование метода конечных элементов
и метода конечных разностей при расчете
тепловой напряженности деталей ДВС**

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
“Тихоокеанский Государственный университет”

Методические указания к практическим занятиям по курсу
«Тепловая напряженность деталей двигателей внутреннего
сгорания» для студентов специальности «Двигатели внутреннего
сгорания» дневной формы обучения

Автор: доцент кафедры ДВС, к.т.н. Ряйсянен А.Г.

Хабаровск ТОГУ
2012

Основные понятия теории упругости

Напряженно-деформированное состояние в произвольной точке изотропного тела описывается симметричным тензором напряжений

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

симметричным тензором деформаций

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

и вектором перемещений

$$[U] = [u, v, w],$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения,

$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ - касательные напряжения,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - относительные деформации,

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ - сдвиговые деформации

В случае малых деформаций между компонентами тензора деформаций $[\varepsilon]$ и вектора перемещений $[U]$ существуют следующие дифференциальные взаимосвязи :

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \varepsilon_y = \partial v / \partial y, \varepsilon_z = \partial w / \partial z,$$

$$\gamma_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x), \gamma_{yz} = (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y), \gamma_{xz} = (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z).$$

В пределах упругих деформаций связь между деформациями и напряжениями описывается обобщенным законом Гука :

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] / E, \varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] / E, \varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] / E,$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G, \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G.$$

Физические свойства материала описываются :

модулем упругости (модуль Юнга) - E

модулем сдвига - G

коэффициентом Пуассона - $\nu = E / 2 / G - 1$

В случае наличия термических деформаций, к соответствующим относительным деформациям добавляются термические, выраженные через

коэффициент линейного расширения α_T и соответствующие изменение температуры :

$$\varepsilon_{x0} = \alpha_T \Delta T_x, \varepsilon_{y0} = \alpha_T \Delta T_y, \varepsilon_{z0} = \alpha_T \Delta T_z.$$

Если за неизвестные принять перемещения u, v, w , то напряженно-деформированное состояние изотропного тела описывается системой уравнений Ляме :

$$(\lambda' + G) \partial \theta / \partial x + G \nabla^2 u + X - (2 + \lambda') \partial (\alpha_T T) / \partial x = 0$$

$$(\lambda' + G) \partial \theta / \partial y + G \nabla^2 v + Y - (2 + \lambda') \partial (\alpha_T T) / \partial y = 0$$

$$(\lambda' + G) \partial \theta / \partial z + G \nabla^2 w + Z - (2 + \lambda') \partial (\alpha_T T) / \partial z = 0$$

где

$$\lambda' = 2 \nu G / (1 - 2\nu), \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, X, Y, Z - \text{объемные силы.}$$

К этим уравнениям добавляются граничные условия :

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = X_v$$

$$\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = Y_v$$

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = Z_v$$

где X_v, Y_v, Z_v - поверхностные силы, l, m, n - направляющие косинусы внешней нормали к ограничивающей тело поверхности.

При решении задач теории упругости для тел сложной геометрической формы удобнее решать не исходную систему дифференциальных уравнений Ляме, а минимизировать функционал, полученный на базе принципа минимума потенциальной энергии :

$$W = 0.5 \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV - \\ - \int_V (X u + Y v + Z w) dV - \int_F (X_v u + Y_v v + Z_v w) dF$$

Идея замены решения системы дифференциальных уравнений на поиск минимума соответствующим образом построенного функционала лежит в основе вариационных методов решения краевых задач. Одним из таких методов является метод конечных элементов.

Метод конечных элементов

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее распространенных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении этот метод относится к группе вариационно-разностных [1]. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ стал широко применяться при проектировании самолетов и автомобилей, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Суть решения краевой задачи методом конечных элементов заключается в последовательном выполнении следующих этапов.

1. Рассматриваемая исходная область разбивается с помощью сетки на отдельные подобласти - конечные элементы.
2. Искомая функция аппроксимируется кусочно-непрерывными функциями, определенными на множестве конечных элементов. Для аппроксимации используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах и на границах элементов.
3. Значения искомой функции определяются путем приближенного решения соответствующей вариационной задачи, которая, в свою очередь, сводится к минимизации определенным образом построенного функционала. Оператор $I[f(\mathbf{x})]$ называется функционалом, заданным на некотором множестве функций, если каждой функции $f(\mathbf{x})$ из этого множества, по некоторому правилу ставится в соответствие числовое значение $I[f(\mathbf{x})]$. На практике функционалы обычно задаются в виде определенных интегралов, в подынтегральные выражения которых входят функции $f(\mathbf{x})$ [2].

В настоящее время при реализации МКЭ применяется большое количество типов конечных элементов, позволяющих получить точную дискретизацию практически любой плоской, осесимметричной или трехмерной области. Вид этих элементов определяет степень аппроксимирующих полиномов и, следовательно, точность получаемого решения.

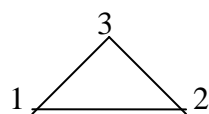
Рассмотрим наиболее часто применяемые типы конечных элементов и соответствующие им виды аппроксимирующих полиномов.

Для дискретизации одномерной области применяются стержневые элементы, обеспечивающие линейную или квадратичную аппроксимацию искомой функции

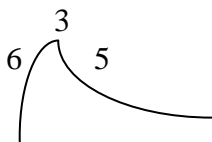
$$\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 2 \\ \hline \end{array} \quad y(x)=a_1 + a_2 x \quad - \text{линейная}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \hline \end{array} \quad y(x)=a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad - \text{квадратичная}$$

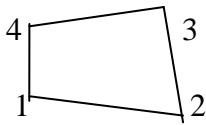
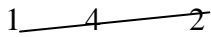
В плоской области используются треугольные и четырехугольные элементы



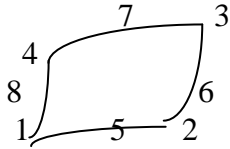
$$u(x,y)=a_1 + a_2 x + a_3 y$$



$$u(x,y)=a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x y$$



$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y$$



$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x y + a_7 x^2 y + a_8 x y^2$$

Треугольные элементы с 6 узлами и четырехугольные с 8 узлами обеспечивают непрерывность в узловых точках не только самой функции, но и ее первой производной.

Для осесимметричной области используются элементы типа торов с поперечными сечениями аналогичными плоским элементам.

При решении трехмерных задач элементы выбирают в виде тетраэдров, косоугольных параллелепипедов, призм с треугольным основанием [2].

Рассмотрим реализацию МКЭ на примере решения двумерной стационарной задачи теплопроводности в произвольной области D

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_v = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях третьего рода

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right]_L = q_s \quad (2)$$

где λ - коэффициент теплопроводности, α - коэффициент теплоотдачи на границе области,

q_v , q_s - объемная и поверхностная плотности мощности источников теплоты. В общем случае λ , α , q_v , q_s - являются произвольными функциями координат. Распределение температуры $T(x,y)$ в области D отыскивается путем минимизации специально подобранного функционала. Для рассматриваемой задачи функционал $I[T(x,y)]$ имеет вид

$$I[T(x,y)] = \iint_D [\lambda (\partial T / \partial x)^2 + \lambda (\partial T / \partial y)^2 - 2q_v T] dx dy + \int_L (\alpha T^2 - 2q_s T) dl \quad (3)$$

Искомая функция $T(x,y)$ разыскивается в виде

$$T(x,y) \approx \sum_{m=1}^M a_m F_m(x,y) \quad (4)$$

где a_m - неизвестные коэффициенты, M - количество узловых точек, в которых ищутся значения температуры, $F_m(x,y)$ - известные функции пространственных координат, способ задания которых будет рассмотрен ниже. Если подставить (4) в (3) и провести интегрирование по заданной области D и ограничивающему ее контуру L , то можно получить функцию $I(a_1, a_2, \dots, a_M)$, зависящую только от коэффициентов a_i . Таким образом отыскание минимума функционала (3) сводится к нахождению минимума функции $I(a_1, a_2, \dots, a_M)$. Минимум этой функции находится из решения системы уравнений

$$\partial I / \partial a_1 = 0, \quad \partial I / \partial a_2 = 0, \quad \dots, \quad \partial I / \partial a_M = 0, \quad (5)$$

Решив систему (5), можно найти коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_M , а следовательно и приближенное решение вариационной задачи (4).

Одним из ключевых моментов МКЭ является выбор функций F_1, F_2, \dots, F_M . Каждая из этих функций обладает следующими свойствами. Значение $F_m(x,y)$ в m -ой узловой точке с координатами $x=x_m$ и $y=y_m$ равно единице, а в остальных узловых точках - нулю. Кроме того, функция $F_m(x,y)$ может отличаться от нуля только в элементах, содержащих m -й узел. В остальной части области D она считается равной нулю. При таком выборе функций $F_m(x,y)$ коэффициенты a_m равны температуре в m -й узловой точке

$$T_m \approx \sum a_i F_i(x_m, y_m) = a_m F_m(x_m, y_m) = a_m,$$

т.к. во всех узловых точках кроме m -й $F_i(x_m, y_m) = 0$, а $F_m(x_m, y_m) = 1$. Кроме того пространственное распределение температуры внутри любого элемента

аппроксимируется суммой $T(x,y) \approx \sum_{i=1}^k T_i F_i(x,y)$, где k - количество узловых

точек принадлежащих выбранному элементу, T_i - значение температуры в i -й узловой точке элемента. Функции $F_m(x,y)$ строятся на основе функций формы элементов, на которые разбивается область D . Для каждого элемента вводится столько функций формы, сколько в нем содержится узлов. Вид функций формы зависит только от вида используемых элементов.

Рассмотрим построение функций формы на примере треугольных элементов, наиболее распространенных при решении двумерных задач. Построение функций формы для других элементов рассмотрено в [3,4]. Для треугольных элементов с тремя узловыми точками функция формы имеет вид

$$F(x,y) = a + b*x + c*y, \quad (6)$$

где коэффициенты a , b и c определяются из трех условий :

в двух вершинах $F(x,y)$ равны нулю, а в одной - единице. Обозначим узлы треугольного элемента через i, j, k . Системы для определения коэффициентов a, b, c имеют вид

$$\begin{cases} F_i(x_i, y_i) = 1 \\ F_i(x_j, y_j) = 0 \\ F_i(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_j(x_i, y_i) = 0 \\ F_j(x_j, y_j) = 1 \\ F_j(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_k(x_i, y_i) = 0 \\ F_k(x_j, y_j) = 0 \\ F_k(x_k, y_k) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

После подстановки (6) в (7) и решения соответствующих линейных систем получаем

$$\begin{cases} a_i = (x_j y_k - x_k y_j) / (2S) \\ b_i = (y_j - y_k) / (2S) \\ c_i = (x_k - x_j) / (2S) \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = (x_k y_i - x_i y_k) / (2S) \\ b_j = (y_k - y_i) / (2S) \\ c_j = (x_i - x_k) / (2S) \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = (x_i y_j - x_j y_i) / (2S) \\ b_k = (y_i - y_j) / (2S) \\ c_k = (x_j - x_i) / (2S) \end{cases}$$

где $S = [x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)] / 2$.

Распределение температуры в треугольном элементе задается в виде

$$T(x,y) = T_i F_i(x,y) + T_j F_j(x,y) + T_k F_k(x,y), \quad (8)$$

где

$$F_i(x,y) = a_i + b_i * x + c_i * y,$$

$$F_j(x,y) = a_j + b_j * x + c_j * y,$$

$$F_k(x,y) = a_k + b_k * x + c_k * y$$

функции формы для i, j, k узлов соответственно.

Для сведения функционала (3) к функции $I(T_1, T_2, \dots, T_M)$ необходимо вычислить интегралы от функций формы по площади и по отдельным сторонам элемента. Интеграл по площади элемента равен

$$\iint_S F_m(x,y) dx dy = S / 3 \quad (9)$$

Интегралы по стороне L_{ij} равны

$$\int_{L_{ij}} F_i(x,y) dl = L_{ij} / 2 \quad (10)$$

$$\int_{L_{ij}} F_i^2(x,y) dl = L_{ij} / 3 \quad (11)$$

$$\int_{L_{ij}} F_i(x,y) F_j(x,y) dl = L_{ij} / 6 \quad (12)$$

где $L_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}$

Соотношение (9) справедливо при $m = i, j, k$.

Соотношения аналогичные (10)-(12) можно получить для F_j и F_k

Используя (6) и (8), получим выражения для частных производных

$$\partial T / \partial x = b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k \quad (13)$$

$$\partial T / \partial y = c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k \quad (14)$$

$$\partial (\partial T / \partial x)^2 / \partial T_m = 2 (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) b_m \quad (15)$$

$$\partial (\partial T / \partial y)^2 / \partial T_m = 2 (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) c_m \quad (16)$$

$$\partial (2 q_v T) / \partial T_m = 2 q_v F_m(x,y) \quad (17)$$

$$\partial (2 q_s T) / \partial T_m = 2 q_s F_m(x,y) \quad (18)$$

$$\partial (\alpha T^2) / \partial T_m = 2 \alpha (T_i F_i(x,y) + T_j F_j(x,y) + T_k F_k(x,y)) F_m(x,y) \quad (19)$$

где $m = i, j, k$.

После разбиения области D на N подобластей, интеграл (3) заменяется суммой интегралов по всем подобластям.

$$I[T(x,y)] = \sum_{n=1}^N I^{(n)}[T(x,y)], \quad (20)$$

где

$$I^{(n)}[T(x,y)] = \iint_S [\lambda(\partial T / \partial x)^2 + \lambda(\partial T / \partial y)^2 - 2q_v T] dx dy + \int_L (\alpha T^2 - 2q_s T) dl$$

где N - количество элементов, S - площадь n -го элемента, L - граница n -го элемента, лежащая на внешней границе области D . Подставим (20) в (5), заменим a_m на T_m , вычислим интегралы по площади S и границе L с учетом выражений (13)-(19), (интегралы по контуру L вычисляются только в случае, когда этот контур принадлежит внешней границе области D .) получим систему линейных уравнений для температур T_m в узловых точках :

$$\partial I[T(x,y)] / \partial T_m = \sum_{n=1}^N \partial I^{(n)}[T(x,y)] / \partial T_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

где

$$\begin{aligned} \partial I^{(n)}[T(x,y)] / \partial T_i = & 2 S^{(n)} \lambda (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) b_i + 2 S^{(n)} \lambda (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) c_i - \\ & - 2 q_v S^{(n)} / 3 + 2 \alpha L^{(n)}_{ij} (T_i / 3 + T_j / 6) + 2 \alpha L^{(n)}_{ik} (T_i / 3 + T_k / 6) - \\ & - q_s (L^{(n)}_{ij} + L^{(n)}_{ik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial I^{(n)}[T(x,y)] / \partial T_j = & 2 S^{(n)} \lambda (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) b_j + 2 S^{(n)} \lambda (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) c_j - \\ & - 2 q_v S^{(n)} / 3 + 2 \alpha L^{(n)}_{ij} (T_i / 6 + T_j / 3) + 2 \alpha L^{(n)}_{jk} (T_j / 3 + T_k / 6) - \end{aligned}$$

$$-q_s (L_{ij}^{(n)} + L_{jk}^{(n)})$$

$$\begin{aligned} \partial I^{(n)}[T(x,y)]/\partial T_k = & 2S^{(n)} \lambda(b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) b_k + 2S^{(n)} \lambda(c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) c_k - \\ & - 2q_v S^{(n)} / 3 + 2 \alpha L_{ik}^{(n)} (T_i / 6 + T_k / 3) + 2 \alpha L_{jk}^{(n)} (T_k / 3 + T_j / 6) - \\ & - q_s (L_{jk}^{(n)} + L_{ik}^{(n)}) \end{aligned}$$

i, j, k - узловые точки вершин n -го треугольного элемента, которому принадлежит

узел m . Из трех сторон элемента выбираются только те, которым принадлежат узлы с отличными от нуля функциями формы и которые принадлежат внешней границе области D . На остальных сторонах соответствующие интегралы равны нулю.

Решение уравнения $(-P(x) \cdot y')' + Q(x) \cdot y = F(x)$ методом конечных элементов на отрезке $[a, b]$

с граничными условиями:
$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y'_0 + \beta_0 \cdot y_0 = \gamma_0 \\ \alpha_n \cdot y'_n + \beta_n \cdot y_n = \gamma_n \end{cases}$$

(обязательное требование $P(x) > 0$ и $Q(x) > 0$).

Решением этого уравнения является минимум функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b (P \cdot y'^2 + Q \cdot y^2 - 2 \cdot F \cdot y) dx + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_0 = 0 \\ \frac{P_0}{\alpha_0} (2 \cdot \gamma_0 \cdot y_0 - \beta_0 \cdot y_0^2) \end{cases} + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = 0 \\ \frac{P_n}{\alpha_n} (\beta_n \cdot y_n^2 - 2 \cdot \gamma_n \cdot y_n) \end{cases}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементов длиной $h=(b-a)/n$ каждый.

Для каждого узла элемента $[x_i, x_{i+1}]$ введем функцию формы.

$$\text{Для узла } x_i \quad N_i = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad \text{для узла } x_{i+1} \quad N_{i+1} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Количество функций формы равно количеству узлов в элементе.

Функции формы должны обладать следующими свойствами:

$$N_i(x_{i+1}) = 0, \quad N_i(x_i) = 1, \quad N_{i+1}(x_{i+1}) = 1, \quad N_{i+1}(x_i) = 0.$$

В функционале $\Phi(y)$ заменим интеграл на отрезке $[a, b]$ суммой n интегралов на элементах $[x_i, x_{i+1}]$, в которых заменим функцию $y(x)$ ее аппроксимацией

$$y(x) = N_i \cdot y_i + N_{i+1} \cdot y_{i+1}.$$

Обозначим: $P_i = P(x_i)$, $Q_i = Q(x_i)$, $F_i = F(x_i)$, $x_i = a + i \cdot h$.

На каждом конечном элементе $[x_i, x_{i+1}]$ интегралы вычислим методом трапеций.

Далее считаем, что длины всех конечных элементов одинаковые и равны h , и при вычислении интегралов полагаем $x_{i+1} - x_i = h$

$$\int_a^b (P \cdot y'^2 + Q \cdot y^2 - 2 \cdot F \cdot y) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot y'^2 + Q \cdot y^2 - 2 \cdot F \cdot y) dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [P \cdot (N'_i \cdot y_i + N'_{i+1} \cdot y_{i+1})^2 + Q \cdot (N_i \cdot y_i + N_{i+1} \cdot y_{i+1})^2 - 2 \cdot F \cdot (N_i \cdot y_i + N_{i+1} \cdot y_{i+1})] dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (A_i \cdot y_i^2 + B_i \cdot y_i \cdot y_{i+1} + C_i \cdot y_{i+1}^2 + D_i \cdot y_i + E_i \cdot y_{i+1}), \quad \text{где}$$

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot N_i'^2 + Q \cdot N_i^2) dx \approx \frac{0.5}{h} (P_i + P_{i+1} + h^2 \cdot Q_i)$$

$$B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot (P \cdot N'_i \cdot N'_{i+1} + Q \cdot N_i \cdot N_{i+1}) dx \approx -\frac{1}{h} (P_i + P_{i+1})$$

$$C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P \cdot N_{i+1}'^2 + Q \cdot N_{i+1}^2) dx \approx \frac{0.5}{h} (P_i + P_{i+1} + h^2 \cdot Q_{i+1})$$

$$D_i = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot F \cdot N_i dx \approx -F_i \cdot h$$

$$E_i = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \cdot F \cdot N_{i+1} dx \approx -F_{i+1} \cdot h$$

Таким образом поиск минимума функционала $\Phi(y)$ свелся к минимизации функции

$$\Psi(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} (A_i \cdot y_i^2 + B_i \cdot y_i \cdot y_{i+1} + C_i \cdot y_{i+1}^2 + D_i \cdot y_i + E_i \cdot y_{i+1}) + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_0 = 0 \\ \frac{P_0}{\alpha_0} (2 \cdot \gamma_0 \cdot y_0 - \beta_0 \cdot y_0^2) \end{cases} + \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = 0 \\ \frac{P_n}{\alpha_n} (\beta_n \cdot y_n^2 - 2 \cdot \gamma_n \cdot y_n) \end{cases}$$

от $n+1$ переменной $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$. Для этого надо решить систему $n+1$ уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = 0, \quad \text{где } i = 0 \div n. \quad \text{Для внутренних точек } (i = 1 \div n - 1) \text{ после взятия частной}$$

производной по y_i получаем систему уравнения:

$$y_{i-1} \cdot B_{i-1} + y_i \cdot 2 \cdot (A_i + C_{i-1}) + y_{i+1} \cdot B_i = -(D_i + E_{i-1}) \quad (1)$$

Для граничных точек в зависимости от вида граничных условий будем иметь.

При $x = a$ ($i = 0$):

$$\text{для } \alpha_0 \neq 0 \text{ получим: } y_0 \cdot 2 \cdot (A_0 - \beta_0 \frac{P_0}{\alpha_0}) + y_1 \cdot B_0 = -(D_0 + 2 \cdot \gamma_0 \frac{P_0}{\alpha_0}),$$

для $\alpha_0 = 0$ получим: $y_0 \cdot \beta_0 = \gamma_0$ (и граничного условия).

При $x = b$ ($i = n$):

$$\text{для } \alpha_n \neq 0 \text{ получим: } y_n \cdot 2 \cdot (C_{n-1} + \beta_n \frac{P_n}{\alpha_n}) + y_{n-1} \cdot B_{n-1} = 2 \cdot \gamma_n \frac{P_n}{\alpha_n} - E_{n-1},$$

для $\alpha_n = 0$ получим: $y_n \cdot \beta_n = \gamma_n$ (и граничного условия).

Рассмотрим решение трехдиагональной системы линейных уравнений методом прогонки.

Все уравнения решаемой системы имеют вид:

$$a_i \cdot y_{i-1} + b_i \cdot y_i + c_i \cdot y_{i+1} = d_i \quad (2)$$

Коэффициенты в системе уравнений (2) имеют вид:

Для граничных точек:

если $\alpha_0=0$, то $a_0=0$, $b_0=\beta_0$, $c_0=0$, $d_0=\gamma_0$,

если $\alpha_0 \neq 0$, то $a_0=0$,

$$b_0 = P_0 + P_1 + h^2 \cdot Q_0 - 2 \cdot \beta_0 \frac{P_0}{\alpha_0} h ,$$

$$c_0 = -(P_0 + P_1),$$

$$d_0 = F_0 \cdot h^2 - 2 \cdot \gamma_0 \frac{P_0}{\alpha_0} h .$$

если $\alpha_n=0$, то $a_n=0$, $b_n=\beta_n$, $c_n=0$, $d_n=\gamma_n$,

если $\alpha_n \neq 0$, то

$$a_n = -(P_{n-1} + P_n),$$

$$b_n = P_{n-1} + P_n + h^2 \cdot Q_n + 2 \cdot \beta_n \frac{P_n}{\alpha_n} h ,$$

$$c_n = 0,$$

$$d_n = 2 \cdot \gamma_n \frac{P_n}{\alpha_n} h + F_n \cdot h^2 .$$

Для внутренних точек:

$$a_i = -(P_i + P_{i-1}),$$

$$b_i = P_{i-1} + 2 \cdot P_i + P_{i+1} + 2 \cdot h^2 \cdot Q_i ,$$

$$c_i = -(P_{i+1} + P_i),$$

$$d_i = 2 \cdot F_i \cdot h^2$$

Коэффициенты получены из уравнения (1) умноженного на h .

Система уравнений (2) решается методом прогонки.

Решение можно представить в виде $y_i = \xi_{i+1} \cdot y_{i+1} + \eta_{i+1}$ или $y_{i-1} = \xi_i \cdot y_i + \eta_i$

После подстановки y_{i-1} в уравнения (2) получим

$$y_i = -\frac{c_i}{a_i \xi_i + b_i} y_{i+1} + \frac{d_i - a_i \cdot \eta_i}{a_i \xi_i + b_i},$$

$$\xi_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i \xi_i + b_i}, \quad \eta_{i+1} = \frac{d_i - a_i \cdot \eta_i}{a_i \xi_i + b_i}$$

Т.к. $a_0=0$, то можно положить $\xi_0=0$ и $\eta_0=0$ и рассчитать ξ_i и η_i , меняя i от 0 до n .

Т.к. $c_n=0$, то можно положить $y_{n+1}=0$ и рассчитать $y_n = \frac{d_n - a_n \cdot \eta_n}{a_n \xi_n + b_n}$.

Далее определяем y_i , меняя i от $n-1$ до 0.

Для отладки программы можно задать вид решения $R(x)$, в качестве правой части взять $F(x) = (-P(x) \cdot R')' + Q(x) \cdot R$, а в граничных условиях положить

$$\gamma_0 = \alpha_0 \cdot R'(a) + \beta_0 \cdot R(a)$$

$$\gamma_n = \alpha_n \cdot R'(b) + \beta_n \cdot R(b)$$

Отличие найденного решения в узловых точках от заданного $R(x)$ должно быть порядка h^2 или меньше.

Решение уравнения $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$ методом конечных разностей на отрезке $[a, b]$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y'_0 + \beta_0 \cdot y_0 = \gamma_0 \\ \alpha_n \cdot y'_n + \beta_n \cdot y_n = \gamma_n \end{cases}$$

Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n частей длиной $h = (b-a)/n$ каждая.

Значения производных во внутренних точках $x_i = a + i \cdot h$ ($i \in [0, n]$) аппроксимируются

выражениями $y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h}$, $y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2}$, где $y_i \equiv y(x_i)$. После замены

производных в исходном дифференциальном уравнении на их приближенные значения, получаем для внутренних точек трехдиагональную систему линейных уравнений вида:

$$a_i \cdot y_{i-1} + b_i \cdot y_i + c_i \cdot y_{i+1} = d_i \quad (3)$$

где $a_i = 1 - 0.5 \cdot h \cdot p_i$, $b_i = h^2 \cdot q_i - 2$, $c_i = 1 + 0.5 \cdot h \cdot p_i$, $d_i = f_i \cdot h^2$,

$p_i \equiv p(x_i)$, $q_i \equiv q(x_i)$, $f_i \equiv f(x_i)$.

Производные в граничных условиях аппроксимируются выражениями

$$y'_0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2 \cdot h}, \quad y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2 \cdot h},$$

где значения для y_{-1} и y_{n+1} находятся из уравнений (3),

записанных для $i=0$ и $i=n$:

$$y_{-1} = \frac{d_0 - c_0 \cdot y_1 - b_0 \cdot y_0}{a_0}, \quad y_{n+1} = \frac{d_n - a_n \cdot y_{n-1} - b_n \cdot y_n}{a_n},$$

где

$$a_0 = 1 - 0.5 \cdot h \cdot p_0, \quad b_0 = h^2 \cdot q_0 - 2, \quad c_0 = 1 + 0.5 \cdot h \cdot p_0, \quad d_0 = f_0 \cdot h^2,$$

$$a_n = 1 - 0.5 \cdot h \cdot p_n, \quad b_n = h^2 \cdot q_n - 2, \quad c_n = 1 + 0.5 \cdot h \cdot p_n, \quad d_n = f_n \cdot h^2$$

После подстановки y_{-1} и y_{n+1} в граничные условия, получаем уравнения аналогичные (3)

$$A_0 \cdot y_{-1} + B_0 \cdot y_0 + C_0 \cdot y_1 = D_0$$

$$A_n \cdot y_{n-1} + B_n \cdot y_n + C_n \cdot y_{n+1} = D_n$$

где:

$$A_0 = 0,$$

$$B_0 = \alpha_0 \cdot (h^2 \cdot q_0 - 2) + 2 \cdot h \cdot (1 - 0.5 \cdot h \cdot p_0) \cdot \beta_0,$$

$$C_0 = 2 \cdot \alpha_0,$$

$$D_0 = \gamma_0 \cdot 2 \cdot h \cdot (1 - 0.5 \cdot h \cdot p_0) + \alpha_0 \cdot f_0 \cdot h^2$$

$$A_n = -2 \cdot \alpha_n,$$

$$B_n = -\alpha_n \cdot (h^2 \cdot q_n - 2) + 2 \cdot h \cdot (1 + 0.5 \cdot h \cdot p_n) \cdot \beta_n,$$

$$C_n = 0,$$

$$D_n = \gamma_n \cdot 2 \cdot h \cdot (1 + 0.5 \cdot h \cdot p_n) - \alpha_n \cdot f_n \cdot h^2$$

Полученная система уравнений (3) для $(i \in [0, n])$ решается методом прогонки.

Для отладки программы можно задать вид решения $R(x)$. В качестве правой части взять $f(x) = R'' + p(x) \cdot R' + q(x) \cdot R$, а в граничных условиях положить:

$$\gamma_0 = \alpha_0 \cdot R'(a) + \beta_0 \cdot R(a)$$

$$\gamma_n = \alpha_n \cdot R'(b) + \beta_n \cdot R(b)$$

Отличие найденного решения в узловых точках от заданного $R(x)$ должно быть порядка h^2 или меньше.

Уравнение $(-P(x) \cdot y')' + Q(x) \cdot y = F(x)$ после взятия производных и деления обеих частей на $P(x)$, сводится к виду $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$, где $p(x) = P'(x) / P(x)$, $q(x) = -Q(x) / P(x)$, $f(x) = -F(x) / P(x)$

Уравнение вида $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$ можно свести к виду $(-P(x) \cdot y')' + Q(x) \cdot y = F(x)$ с помощью следующих замен:

$$P(x) = e^{\int p(x) dx}$$

$$Q(x) = -q(x) \cdot P(x)$$

$$F(x) = -f(x) \cdot P(x)$$

Литература

1. Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. - Математические модели технических объектов. М., Высшая школа, 1986.
2. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. - Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. М., Высшая школа, 1990.
3. Зенкевич О. - Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
4. Сегерлинд Л. - Применение метода конечных элементов. М., 1979.
5. Петриченко Р.М. - Элементы САПР ДВС. Л., Машиностроение, 1990.