1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

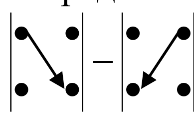
Пусть дана матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, и обозначается символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка содержит две строки и два столбца, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – элементы определителя. Правило вычисления определителя второго порядка можно представить схематически:



Количество строк и столбцов в определителе всегда совпадает. Кроме определителей второго порядка существуют определители 3-го, 4-го и т. д. порядков. Определитель 3-го порядка содержит три строки и три столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя 3-го порядка существует несколько правил.

2. ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

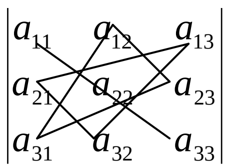
Для вычисления определителя надо повторить запись первого и второго столбцов. Проведем три левые диагонали, начиная с верхнего левого угла, и три правые диагонали. Три первые слагаемые получаются как результат произведения элементов, стоящих на каждой из левых диагоналей. Следующие три слагаемые получаются при умножении элементов, стоящих на каждой из правых диагоналей. Три последние произведения берутся с противоположным знаком.

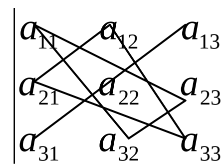
ПРИМЕР 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 7 & -4 & -2 \end{array}\right. = 2\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot(-4) + 3\cdot 5\cdot(-2) -$$

$$-3\cdot 0\cdot(-4) - 2\cdot 4\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 7 = -65.$$

3. ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА





(1) (2)

Перемножаются элементы, стоящие на левых диагоналях. Одна диагональ, главная, проходит через три элемента, и две диагонали побочные проходят через два элемента, третьим элементом для них является элемент, стоящий в вершине треугольника (схема 1). Аналогично находим произведения элементов, стоящих на правых диагоналях (схема 2). Эти произведения берутся с обратным знаком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

ПРИМЕР 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot(-4) + 5\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot(-4) -$$

$$-4\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot 5\cdot 7 = -65.$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ

Прежде чем перейти к следующему правилу вычисления определителя, введем понятие минора и алгебраического дополнения. В определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркнем одну строку и один столбец, останется определитель второго порядка, который принято называть минором. Например, при вычеркивании первой строки и первого столбца получим минор

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При вычеркивании "i"-й строки и "j"-го столбца получим минор Mij. Через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij} т.е.

$$Aij = (-1)^{i+j} \cdot Mij.$$

По свойствам определителя его можно представить в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

что соответствует разложению определителя по элементам первой строки. Аналогично можно разложить по элементам любой строки или столбца.

ПРИМЕР 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель разложением по элементам строки. Для определенности выберем первую строку. Тогда $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \bullet M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 8.$$

M_{11} – получен вычеркиванием первой строки и первого столбца.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \bullet M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -(35+16) = -51.$$

M_{12} – получен вычеркиванием первой строки и второго столбца.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \bullet M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10.$$

Тогда $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \bullet A_{11} + 1 \bullet A_{12} + 3 \bullet A_{13} = 2 \bullet 8 + 1 \bullet (-51) + 3 \bullet (-10) = -65.$

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
(общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Решением системы (3) называется совокупность чисел ($k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$), которая при подстановке в систему (3) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется совместной, причем, если решение единственное, система определенная, если решений множество – система неопределенная. Если система не имеет решений, она называется несовместной. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

6. МЕТОД КРАМЕРА

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (3). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \qquad \ldots; \qquad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

ПРИМЕР 4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 + 84 + 40 - 7 - 48 = 33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений имеет единственное решение.

7. МЕТОД ГАУССА

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

ПРИМЕР 5.

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+3y-z=7 \end{cases} \tag{4}$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \quad -7y-4z=7 \end{cases}$$

(5)

Системы уравнений (4) и (5) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2. \\ \qquad\qquad 12z=5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z=\frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $x=\frac{187}{84}$; $y=-\frac{26}{11}$; $z=\frac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

Систему можно решить и матричным способом. Чтобы освоить этот метод, познакомимся с некоторыми сведениями о матрицах.

8. МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей называется таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Число строк – m, число столбцов – n, $m\times n$ – размерность матрицы. Если $m\neq n$ – матрица прямоугольная. При $m=n$ – матрица квадратная.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C … Квадратная матрица E называется единичной, если она имеет вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. на диагонали матрицы стоят единицы, а остальные элементы есть нули.

О видах матрицах смотрите подробнее [1, стр. 123].

Матрицы можно складывать, вычитать, умножать матрицу на матрицу и матрицу на число. Эти операции называются линейными операциями над матрицами.

ПРИМЕР 6.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

При сложении каждый элемент первой матрицы складывается с соответствующим элементом второй матрицы. Из правила сложения следует, что не всякие две матрицы можно сложить.

При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

ПРИМЕР 7.

$$4\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -28 & 12 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы можно перемножать, но при этом число элементов в строке первой матрицы должно быть равно числу элементов в столбце второй матрицы, так как умножение матриц осуществляется по следующему правилу: чтобы получить элемент C_{ij} новой матрицы, нужно взять i-ю строку первой матрицы и каждый элемент умножить на соответствующий элемент j-го столбца второй матрицы, результаты умножения сложить. Полученная сумма и будет элементом C_{ij}, т. е. умножение осуществляется по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}=C_{ij}.$$

Или это можно показать на такой схеме:

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \boxed{\bullet} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Умножаем вторую строку первой матрицы на первый столбец второй матрицы. Сумма соответствующих произведений дает первый элемент во второй строке полученной матрицы. Стрелками показано, какие элементы надо перемножать. Заметим, что операция умножения матриц не всегда подчиняется коммутативному закону, т. е. $AB \neq BA$.

9. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Введем понятие обратной матрицы. Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если существует такая матрица A^{-1}, что выполняются равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

то матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A.

Чтобы найти обратную матрицу, нужно:

1. Найти определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1}.

2. Найти матрицу A^T – транспонированную матрице A, т. е. в матрице A поменять местами строки и столбцы:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

3. Вычислить алгебраические дополнения каждого элемента матрицы с учетом, что $Aij = (-1)^{i+j} \cdot Mij$, где Mij – минор элемента aij. Составить матрицу из этих алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

4. Разделить каждый элемент матрицы $\tilde{A}$ на определитель Δ. Получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

10. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (6) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B.$$

(7)

Чтобы найти матрицу X , умножим (7) на A^{-1} слева.

$\mathrm{A}^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B \Rightarrow X = A^{-1} \bullet B$

ПРИМЕР 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

РЕШЕНИЕ.

1) Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 + 3 - 4 - 0 = 2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2) Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычисляем алгебраические дополнения

$$A_{11};\quad A_{12};\quad A_{13};\quad A_{21};\quad A_{22};\quad A_{23};\quad A_{31};\quad A_{32};\quad A_{33}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-5) = -5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4.$$

Вычисляем $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4$.

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$$A_{13} = 7;\quad A_{21} = 2;\quad A_{22} = -2;\quad A_{23} = -2;\quad A_{31} = 1;\quad A_{32} = 0;\quad A_{33} = -1.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5/2 & 2 & 7/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$E = A^{-1} \bullet A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 9.

Решить систему матричным способом

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A \cdot X = B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=84; \qquad A^T=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & 7 & 21\end{pmatrix}; \qquad A^{-1}=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & 7 & 21\end{pmatrix}.$$

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X .

$$X=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & & 21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}187/84\\ -26/21\\ 5/12\end{pmatrix}.$$

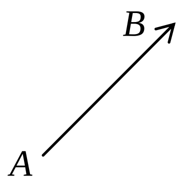
Отсюда получаем ответ:

$$x=\frac{187}{84}; \qquad y=-\frac{26}{21}; \qquad z=\frac{5}{12}.$$

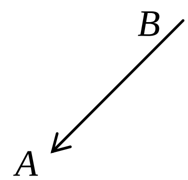
Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

11. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектором называют направленный отрезок в пространстве или на плоскости, который можно передвигать параллельно самому себе. Один конец называется началом (точка A), а другой конец (точка B) – концом вектора $\overrightarrow{AB}$.



вектор $\overrightarrow{AB}$



вектор $\overrightarrow{BA}$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ характеризуется длиной (или модулем $|\overrightarrow{AB}|$), которая равна длине отрезка AB, и направлением от A к B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых ($\vec{a}\,||\,\vec{b}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Определим линейные операции над векторами. К таким операциям относятся сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на число.

Сложение и вычитание векторов можно выполнить по правилу треугольника (рис. 1а) или по правилу параллелограмма (рис. 1б).

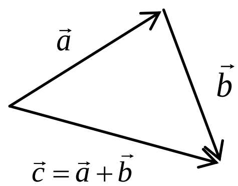


Рис. 1а

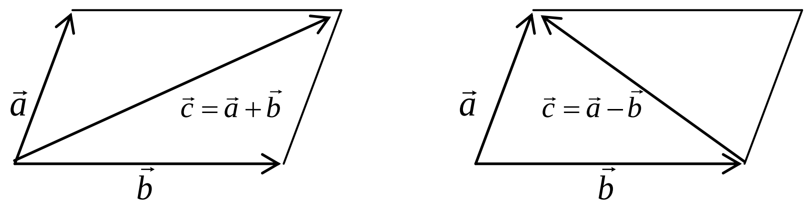


Рис. 1б

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называют такой вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Если $\lambda = -1$, то вектор $(-\vec{a})$ называется противоположным к $\vec{a}$ (рис. 2).

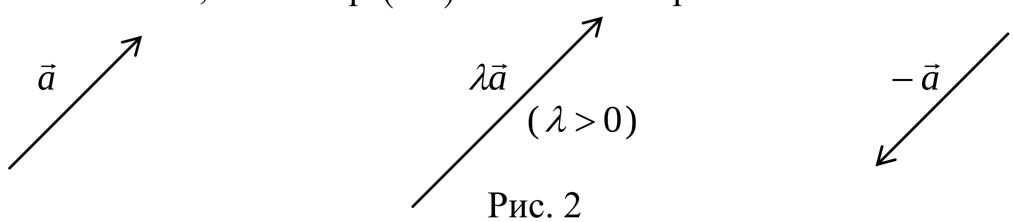


Рис. 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество всех векторов пространства с введенными на нем операциями сложения и умножения на число образует векторное пространство.

Определим понятие базиса и координат вектора в данном базисе.

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ 6. Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, …, $\vec{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа α_1, α_2, $\ldots\alpha_n$, такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0 \tag{8}$$

Если система линейно независима, то в (8) все $\alpha_i = 0$. Пусть для определенности коэффициент $\alpha_k \neq 0$, тогда из равенства (8) можно найти

$$\vec{a}_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} \cdot \vec{a}_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_k} \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_k} \cdot \vec{a}_n .$$

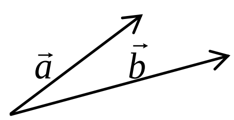
Итак, для линейно зависимой системы векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, …, $\vec{a}_n$ любой вектор можно представить как линейную комбинацию остальных

$(n-1)$ векторов. Для линейно независимой системы векторов такое представление невозможно.

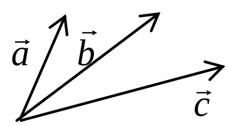
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Совокупность линейно независимых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, …, $\vec{c}$, взятых в определенном порядке, образует базис пространства, и обозначается базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{c}\}$.

На плоскости (в R^2) базис образует два линейно независимых вектора, в трехмерном пространстве (в R^3) – три линейно независимых вектора и в пространстве R^n – n линейно независимых векторов.

Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются зависимыми, так как $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Поэтому на плоскости два любых неколлинеарных вектора образуют базис. Аналогично, три любых некомпланарных вектора образуют базис трехмерного пространства R^3.



Базис в $R^2\{\vec{a},\vec{b}\}$



Базис в $R^3\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Любой вектор $\vec{p}$ в пространстве R^3 единственным образом определяется в виде суммы:

$$\vec{p} = \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} + \alpha_3 \cdot \vec{c}, \tag{9}$$

где числа α_1, α_2, α_3 называются координатами вектора $\vec{p}$ в данном базисе.

Равенство (9) представляет разложение вектора $\vec{p}$ по базису $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ в трехмерном пространстве (в R^3). На плоскости (в R^2) вектор $\vec{p}$ имеет разложение по базису $\{\vec{a},\vec{b}\}$:

$$\vec{p} = \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b}.$$

Замечание. Записи $\vec{p} = \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} + \alpha_3 \cdot \vec{c}$ и $\vec{p} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ означают одно и то же: вектор $\vec{p}$ имеет координаты α_1, α_2, α_3 в данном базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Необходимым и достаточным условием линейной независимости трех векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ и $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ является условие:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

ПРИМЕР 10. Найти разложение вектора $\vec{c}=\{11,-6,5\}$ по векторам $\vec{p}=\{3,-2,1\}$, $\vec{q}=\{-1,1-2\}$ и $\vec{r}=\{2,1,-3\}$.

РЕШЕНИЕ. Проверим, являются ли векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ линейно независимыми, то есть образуют ли они базис. Для этого вычислим определитель третьего порядка, составленный из координат векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ по методу треугольника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9+8-1-2+6+6=8\neq 0,$$

то есть векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ являются базисом, тогда $\vec{c}=c_1\vec{p}+c_2\vec{p}+c_3\vec{p}$, где c_1, c_2, c_3 – неизвестные координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Составим систему:

$$\begin{cases} 11=3\cdot c_1-c_2+2\cdot c_3 \\ -6=-2\cdot c_1+c_2+c_3 \\ 5=c_1-2\cdot c_2-3\cdot c_3 \end{cases}.$$

Решаем методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=8\neq 0; \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=16;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-24; \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=8.$$

$$c_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{16}{8}=2, \qquad c_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{24}{8}=-3, \qquad c_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{8}{8}=1.$$

Следовательно, $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$ или $\vec{c}=\{2,-3,1\}$.

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами этих векторов по следующим правилам:

1) Координаты алгебраической суммы векторов $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ равны суммам соответствующих координат:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3\} \tag{10}$$

2) Координаты произведения вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ равны произведениям координат $\vec{a}$ на λ:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\} \tag{11}$$

Самым удобным является базис, состоящий из единичных взаимно перпендикулярных векторов.

В трехмерном пространстве с декартовыми прямоугольными координатами такой базис составляют векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (рис. 3б), на плоскости – $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ (рис. 3а).

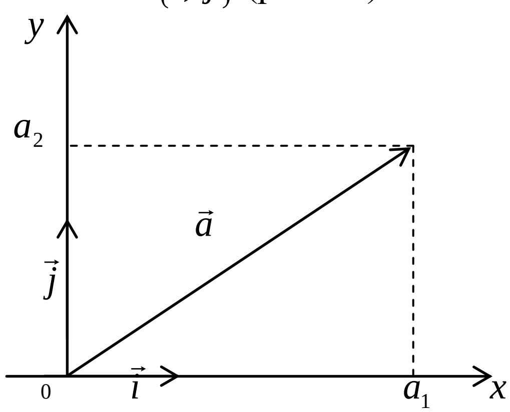


Рис. 3а

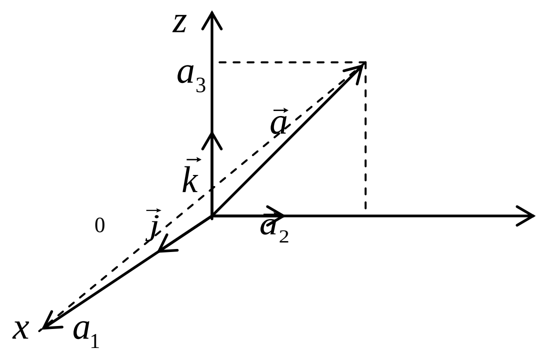


Рис. 3б

Тогда координаты произвольного вектора $\vec{a}$ являются проекциями этого вектора на соответствующие координатные оси, и разложение вектора по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеет вид

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \text{ или } \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \tag{12}$$

Такой базис называют декартов базис. В этом базисе справедливы следующие теоремы и формулы.

ТЕОРЕМА 1. Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1, \qquad z = z_2 - z_1. \tag{13}$$

ПРИМЕР 11. Пусть даны две точки $A(2,-1,3)$ и $B(-1,5,2)$. Найти координаты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

РЕШЕНИЕ. $\overrightarrow{AB}=\{-3,6,-1\}$ и $\overrightarrow{BA}=\{3,-6,1\}$ – находим по формуле (13).

Итак, если известны координаты начала и конца вектора, то для отыскания координат самого вектора нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала.

ТЕОРЕМА 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, то есть

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}, \qquad \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\};$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda. \tag{14}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

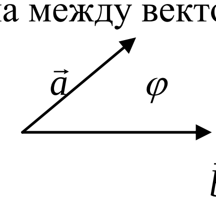
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right). \tag{15}$$

ТЕОРЕМА 3. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, заданных своими координатами, вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \tag{16}$$

Скалярное произведение применяется в геометрии и механике:

1. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле



$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} \tag{17}$$

2. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}. \tag{18}$$

3. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$, то есть

$$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0,$$

(19)

– условие перпендикулярности двух векторов.

4. Если вектор $\vec{F}$ задает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством
$$A=\left(\vec{F}\cdot\vec{S}\right) \tag{20}$$
– физический смысл скалярного произведения.

ТЕОРЕМА 4. Модуль вектора (длина) $\vec{a}=\{x,y,z\}$ находится по формуле
$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \tag{21}$$

ПРИМЕР 12. Вычислить работу равнодействующей $\vec{F}$ сил
$\vec{F}_1=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{F}_2=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{F}_3=-\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $A(4,2,-3)$ в точку $B(7,4,1)$.

РЕШЕНИЕ. Так как равнодействующая сил $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\{4,3,3\}$, $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\{3,2,4\}$, то работа A вычисляется по формуле (13):
$$A=\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=4\cdot 3+3\cdot 2+3\cdot 4=30 \text{ (дж).}$$

ПРИМЕР 13. Найти длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1,-2,3\}$ и $\vec{b}=\{-5,3,-1\}$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{b}=\{-10,6,-2\}$, т. к. $\vec{b}=\{-5,3,-1\}$. По формуле (14) $\vec{c}=\{-9,4,1\}$.
$$|\vec{c}|=\sqrt{(-9)^2+4^2+1^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}\approx 9{,}87.$$

ПРИМЕР 14. Найти длину вектора $3\vec{a}-5\vec{b}$, если известно $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$ и $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=60^\circ$.

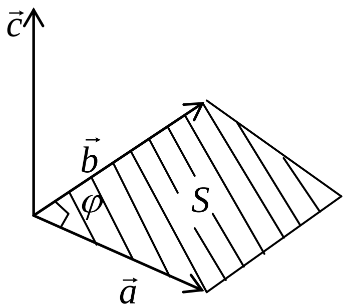
РЕШЕНИЕ. Обозначим $\vec{c}=3\vec{a}-5\vec{b}$. Тогда длина вектора
$$|\vec{c}|=\left|3\vec{a}-5\vec{b}\right|=\sqrt{\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)}=\sqrt{9|\vec{a}|^2-15\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)-15\vec{b}\cdot\vec{a}+25\left|\vec{b}\right|^2}=$$

$$= \sqrt{9 \cdot 9 - 30|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) + 25 \cdot 16} = \sqrt{801}.$$

(Использованы формулы (15) и (21)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом: (рис. 4)

1. Модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть
$$\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right); \tag{22}$$
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ после приведения в общему началу образуют правую тройку векторов, то есть ориентированы по отношению друг к другу как базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



$$S = |\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Рис. 4

ТЕОРЕМА 5. Векторное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, заданных своими координатами, находится по формуле
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

ПРИМЕР 15. Даны вершины треугольника $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$. Найти косинус угла ABC и площадь треугольника ABC.

РЕШЕНИЕ. Угол ABC образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдем координаты этих векторов по формуле (13):

$$\overrightarrow{BA}=\{-4,5,0\},\qquad \overrightarrow{BC}=\{-4,9,-3\}.$$

По формуле (17)

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{BC}\right)=\frac{(-4)(-4)+5\cdot 9+0\cdot(-3)}{\sqrt{(-4)^2+5^2}\sqrt{(-4)^2+9^2+(-3)^2}}=\frac{61}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{106}}\approx 0{,}9.$$

Треугольник ABC является половиной параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов по формуле (23):

$$\vec{C}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 5 & 0\\ -4 & 9 & -3\end{vmatrix}=-15\vec{i}-12\vec{j}-16\vec{k};$$

$$\left|\vec{C}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-15)^2+(-16)^2+(-12)^2}=\sqrt{625}=25.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 25=12{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Векторное произведение применяется в геометрии и механике для нахождения площади треугольника и параллелограмма (см. пример 15) и момента силы. Если вектор $\vec{F}$ задает силу, приложенную к какой-нибудь точке C, а вектор $\vec{a}$ идет из недвижимой точки O в точку C, то вектор $\vec{M}=\vec{a}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O – физический смысл векторного произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ умножить векторно $\vec{a}\times\vec{b}$, а полученный результат умножить на вектор $\vec{c}$ скалярно, то число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ называется смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

ТЕОРЕМА 6. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}=\{x_3,y_3,c_3\}$ находится с помощью определителя третьего порядка:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

(24)

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \tag{25}$$

ТЕОРЕМА 7. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на сторонах:

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{26}$$

ПРИМЕР 16. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

РЕШЕНИЕ. Объем призмы равен половине объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда по формуле (26) имеем

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2}V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Запишем координаты векторов $\vec{a} = \{-1, 1, -3\}$, $\vec{b} = \{-2, 2, 1\}$ и $\vec{c} = \{3, -2, 5\}$. Найдем смешанное произведение по формуле (24):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(10+2) - (-10-3) - 3(4-6) = 7.$$

Тогда $V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$ (куб. ед.).

12. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕМА 8. В декартовой прямоугольной системе координат XOY на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно X и Y:

$$Ax + By + C = 0 \tag{27}$$

где A, B и C – коэффициенты (при условии $A^2 + B^2 > 0$, то есть хотя бы одно из чисел A и B не равно нулю), и обратно, всякое уравнение вида (27) определяет прямую.

Если $B=0$, то уравнение примет вид $Ax+C=0$ или $x=-\dfrac{C}{A}$ – это уравнение прямой, параллельной оси OY.

Аналогично $By+C=0$ – уравнение прямой, параллельной оси OX.

Уравнение (27) называется общим уравнением прямой.

Если $B\neq 0$, то уравнение $Ax+By+C=0$ можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y=kx+b, \qquad \text{где } k=\operatorname{tg}\alpha \tag{28}$$

Последнее уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k. Угол α, отсчитываемый от положительного направления оси OX до прямой, называется углом наклона прямой, а число b определяет начальную ординату, то есть величину отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 5).

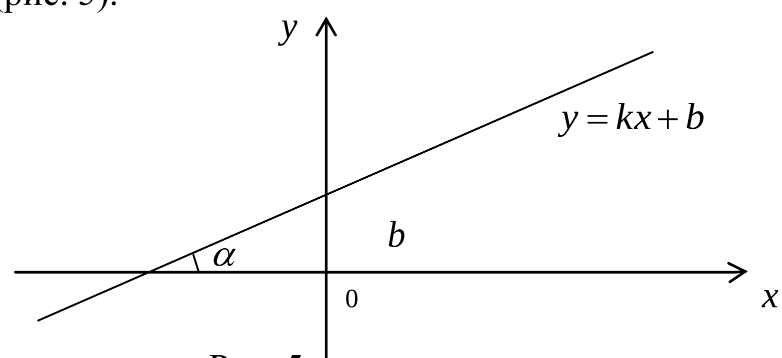


Рис. 5

Если прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \tag{29}$$

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов $k_1=k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1\cdot k_2=-1$, то есть $k_2=\dfrac{-1}{k_1}$.

(30)

ПРИМЕР 17. Вычислить величину меньшего угла φ между прямыми $3x+4y-2=0$ и $8x+6y+5=0$.

РЕШЕНИЕ. Разрешим общие уравнения прямых относительно переменной y: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}$.

Отсюда следует, что угловые коэффициенты прямых $k_1=-\frac{3}{4}$, $k_2=-\frac{4}{3}$, так как $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются, и по формуле (29)

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{7}{24} \quad \Rightarrow \quad \varphi=-\operatorname{arctg}(0{,}25).$$

Острый угол $\varphi=\operatorname{arctg}(0{,}25)\approx 14^o$.

Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости:

1) Уравнение прямой в «отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{31}$$

где a – отрезок, отсекаемый на оси OX , b – на оси OY .

2) Уравнение через точку $M_0(x_0,y_0)$ и угловой коэффициент k:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{32}$$

ПРИМЕР 18. Через точки $A(4,3)$ и $B(2,1)$ проведена прямая AB. Проходит ли она через начало координат?

РЕШЕНИЕ. Возьмем на данной прямой еще одну текущую точку M. Пусть координаты этой точки $M(x,y)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ лежат на одной прямой, то есть они коллинеарны. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AM}=\{x-4,y-3\}$ и $\overrightarrow{AB}=\{-2,-2\}$. Из условий коллинеарности двух векторов (формула 14) получаем уравнение прямой AB:

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-3}{-2}.$$

Отсюда $-2(x-4)=-2(y-3)$ или $y=x-1$.

Прямая не проходит через начало координат, так как точка $(0,0)$ не удовлетворяет уравнению прямой: $0\neq 0-1$.

ПРИМЕР 19. Точка $A(-2,3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x-3y+8=0$. Найти уравнение этой прямой.

РЕШЕНИЕ. Определим угловой коэффициент первой прямой: $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$, отсюда $k_1=\frac{2}{3}$. С учетом перпендикулярности прямых (формула 30) $k_2=-\frac{3}{2}$. Тогда уравнение второй прямой можно найти по формуле (32):

$$y-3=-\frac{3}{2}(x+2) \qquad \text{или} \qquad 3x+2y=0.$$

13. ПЛОСКОСТЬ

ТЕОРЕМА 9. В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{33}$$

где A, B, C и D – заданные числа, причем $A^2+B^2+C^2>0$, и обратно, уравнение (33) всегда является уравнением плоскости.

Уравнение (33) называется общим уравнением плоскости. Коэффициенты A, B и C являются координатами нормального вектора $\vec{n}=\{A,B,C\}$, то есть вектора, перпендикулярного к плоскости.

Существуют различные способы задания плоскости в R^3 и соответствующие им виды уравнений.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n}$.

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}=\{A,B,C\}$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{34}$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если плоскость проходит через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{35}$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, придем к общему уравнению плоскости (33).

3. Уравнение плоскости в «отрезках» (рис. 6).

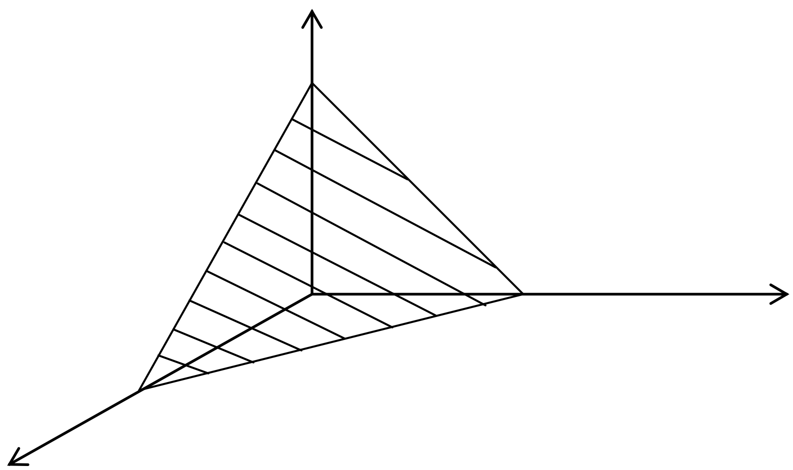


Рис. 6

Если плоскость пересекает координаты оси в точках $A(a,0,0)$ и $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$. то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{36}$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

ПРИМЕР20. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M_0(-2,7,3)$, параллельно плоскости $x-4y+5z=1$.

РЕШЕНИЕ. Если плоскость проходит через точку M_0, то ее уравнение можно записать в виде (по формуле (34))

$$A(x+2)+B(y-7)+C(z-3)=0,$$

где $\vec{n}_1=\{A,B,C\}$ – нормальный вектор.

Так как плоскости параллельны, то в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять нормальный вектор данной плоскости $\vec{n}_1=\{1,-4,5\}$, тогда $(x+2)-4(y-7)+5(z-3)=0$. После упрощения имеем общее уравнение. Преобразуем: x-4y+5z+15=0.

$$x-4y+5z=-15 \text{ или } \frac{x}{-15}+\frac{y}{15/4}+\frac{z}{-3}=1 \text{ (делим на -15).}$$

Отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью соответственно равны $a=-15$, $b=\frac{15}{4}$, $c=-3$.

ПРИМЕР 21. Вычислить угол между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $3x-4y+5=0$.

РЕШЕНИЕ. Величина угла φ между плоскостями равна углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1=\{1,-2,2\}$ и $\vec{n}_2=\{3,-4,0\}$. Тогда по формуле (17)

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{n}_1,\hat{\ }\vec{n}_2\right)=\frac{1\cdot 3+(-2)(-4)+0\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{11}{15}.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\frac{11}{15}\approx 42^\circ 51'$.

ПРИМЕР 22. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3,6,-7)$, $M_2(-5,2,3)$ и $M_3(4,-7,-2)$.

РЕШЕНИЕ. Возьмем на этой плоскости произвольную точку $M(x,y,z)$. Рассмотрим три вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ (рис. 7) и найдем их координаты:

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-3,y-6,z+7\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-8,-4,10\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{1,-13,5\}$$

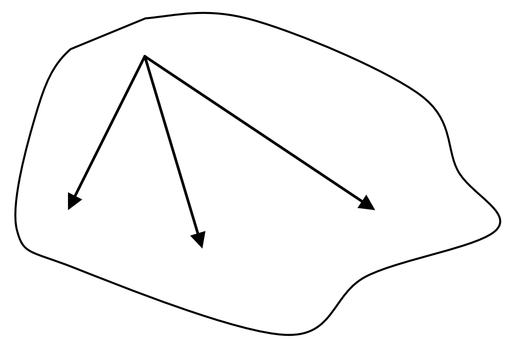


Рис. 7

Эти три вектора принадлежат одной плоскости, то есть они компланарны. Условие компланарности трех векторов (25) и определит искомое уравнение плоскости (35):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z+7 \\ -8 & -4 & 10 \\ 1 & -13 & 5 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -13 & 5 \end{vmatrix}-(y-6)\begin{vmatrix} -8 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(z+7)\begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 1 & -13 \end{vmatrix}=0.$$

$$(x-3)(-20+130)-(y-6)(-40-10)+(z+7)(104+4)=0$$

$$110(x-3)+50(y-6)+108(z+7)=0.$$

После упрощения окончательно имеем: $55x+25y+54z+63=0$.

Это уравнение является общим уравнением плоскости, нормальный вектор: $\vec{n}=\{55, 25, 54\}$.

14. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В зависимости от способа заданий в пространстве можно рассматривать различные уравнения прямой.

1. Канонические уравнения прямой. Если прямая в пространстве проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \vec{s}=\{m,n,p\}. \tag{37}$$

Вектор $\vec{s}$, параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

2. Параметрические уравнения прямой. Из уравнения (37) получим

$$x=x_0+mt, \qquad y=y_0nt, \qquad z=z_0+pt, \tag{38}$$

где t – параметр.

3. Прямая, проходящая через две точки. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{39}$$

4. Общие уравнения прямой в пространстве.

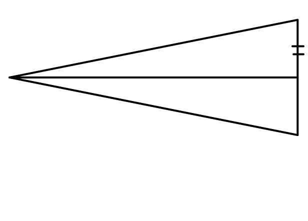
Две пересекающиеся плоскости определяют прямую

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\} \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\} \end{cases},$$

где $\vec{n}_1$ не параллелен $\vec{n}_2$.

ПРИМЕР 23. Даны вершины треугольника $A(2,-6,4)$, $B(4,2,-8)$ и $C(-1,2,-3)$. Составить уравнение медианы, опущенной из вершины на противоположную сторону.

РЕШЕНИЕ. Медиана CD делит сторону AB пополам. Найдем координаты точки D: $AD=DB$



$$D\left(\frac{2+4}{2},\frac{-6+2}{2},\frac{4-8}{2}\right)$$

=   или

$D(3,2,-2)$

Используем уравнения прямой, проходящей через две точки (39), уравнения прямой можно записать в виде

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-8}{2-2}=\frac{z+3}{-2+3} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{1}.$$

Полученные уравнения прямой являются каноническими уравнениями, направляющий вектор $\vec{s}=\{4,0,1\}$.

ПРИМЕР 24. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5,2,-1)$ перпендикулярно плоскости $P:\ 2x+3y-7z+2=0$.

РЕШЕНИЕ. Плоскость P имеет нормальный вектор $\vec{n}=\{2,3,-7\}$, а так как нам нужна прямая L, перпендикулярная плоскости P, то в качестве ее направляющего вектора можно взять вектор $\vec{n}$ (рис. 8). Тогда искомая прямая имеет вид

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-7}.$$

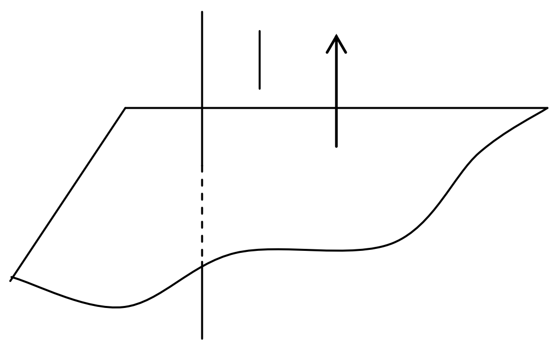


Рис. 8

ПРИМЕР 25. Найти угол между прямой $L:\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$ и плоскостью $P:\ x-3y+6z-1=0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем из канонических уравнений: $\vec{s}=\{2,3,4\}$, $\vec{n}=\{1,-3,6\}$. Искомый угол $L=\dfrac{\pi}{2}-\left(\vec{s},\hat{\ }\vec{n}\right)$ (рис. 9), то есть

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vec{s},\hat{\ }\vec{n}\right)=\cos\left(\vec{s},\hat{\ }\vec{n}\right);$$

$$\sin\alpha=\frac{\vec{9}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{2\cdot1+3(-3)+4\cdot6}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{46}}\approx0{,}48$$

$$L=\arcsin0{,}48=28^{\circ}40'.$$

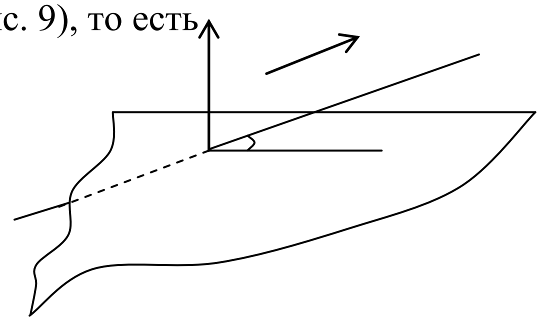


Рис. 9

15. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты X и Y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

(40)

где A, B, C, D, E, F – постоянные действительные числа. Уравнение (40) называется общим уравнением кривой второго порядка.

Рассмотрим частные случаи уравнения (40).

1. Окружность радиусом R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

2. Эллипс с полуосями a и b, центром в точке $C(x_0, y_0)$ определяется уравнением $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

3. Гипербола с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, центром в точке $C(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Уравнение сопряженной гиперболы: $\dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$.

4. Парабола с вершиной в точке $C(x_0, y_0)$, симметричная относительно оси OX, имеет уравнение $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяют параболы, иначе ориентированные относительно осей координат.

Уравнение (40) может и не определять действительного геометрического образа (в зависимости от коэффициента), тогда говорят о мнимых кривых второго порядка. С помощью параллельного переноса или поворота системы координат на некоторый угол общее уравнение сводится к каноническому виду.

Особенно простым является приведение уравнения (40) к каноническому виду в случае $B = 0$ (отсутствие члена XY), когда можно применить метод выделения полных квадратов.

ПРИМЕР 26. Привести к каноническому виду уравнение линии и построить ее. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Данная линия является кривой второго порядка, в уравнении которой отсутствует произведение переменных X и Y. Дополним члены, содержащие X, и члены, содержащие Y, до полных квадратов. Получим

$$4\left(x^2+8x\right)+9\left(y^2-6x\right)+109=0,$$
$$4\left(x^2+8x+16-16\right)+9\left(y^2-6x+9-9\right)+109=0,$$
$$4(x+4)^2-4\cdot16+9(y-3)^2-9\cdot9+109=0,$$
$$4(x+4)^2+9(y-3)^2=36,$$
$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Имеем эллипс, центр которого лежит в точке $C(-4,\ 3)$, большая полуось $a=\sqrt{9}=3$, малая ось $b=\sqrt{4}=2$ (рис. 10).

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $C(-4,\ 3)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x'=x+4$, $y'=y-3$.

Тогда уравнение эллипса запишется в виде $\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}=1$.

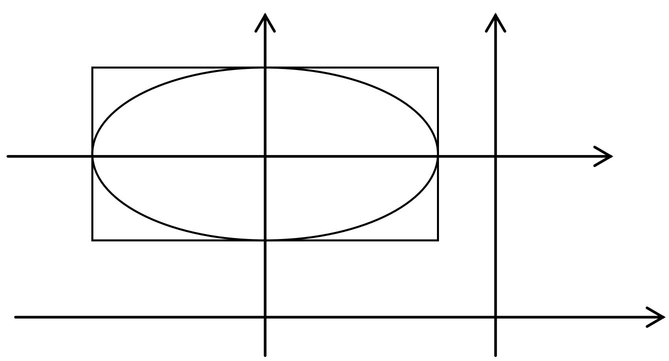


Рис. 10

ПРИМЕР 27. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $24x^2-y^2+40x+16=0$ и построить ее.

РЕШЕНИЕ. Для приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду выделим полный квадрат для x:

$$24\left(x^2+\frac{40}{24}x\right)-y^2+16=0,$$

$$24\left(x^2+2\cdot\frac{20}{24}x+\left(\frac{20}{24}\right)^2-\left(\frac{20}{24}\right)^2\right)-y^2=16,$$

$$24\left(x+\frac{20}{24}\right)^2+24\left(\frac{20}{24}\right)^2-y^2=16,$$

$$24\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-y^2=\frac{98}{3} \text{ или } \frac{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{98}{72}}-\frac{y^2}{\frac{98}{3}}=1,$$

то есть имеем гиперболу, центр которой находится в точке $C\left(-\frac{5}{6},0\right)$, действительная полуось $a=\sqrt{\frac{98}{72}}\approx 1{,}17$, мнимая полуось $b=\sqrt{\frac{98}{3}}\approx 5{,}71$. Формулы преобразования координат при параллельном переносе имеют вид

$$x'=x+\frac{5}{6},\ y'=y.$$

Тогда уравнение гиперболы запишется в виде $\frac{(x')^2}{(1{,}17)^2}-\frac{(y')^2}{(5{,}71)^2}=1$ (рис. 11).

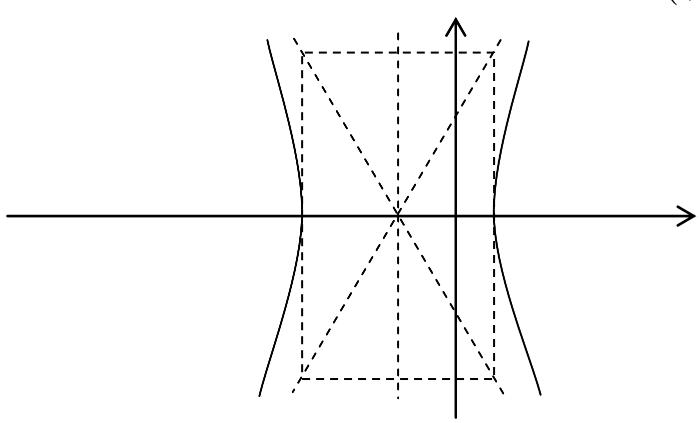


Рис. 11

ПРИМЕР 28. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $2y^2-4y+2x-1=0$ и построить ее.

РЕШЕНИЕ. Уравнение кривой преобразуется следующим образом:

$$2\left(y^2-2y+1-1\right)+2x-1=0 \text{ или } 2(y-1)^2+2x-3=0.$$

Отсюда $\quad 2(y-1)^2=-2\left(x-\frac{3}{2}\right),\quad (y-1)^2=-\left(x-\frac{3}{2}\right),$

имеем параболу, у которой вершина находится в точке $O'\left(\frac{3}{2},1\right)$, параметр $p=-\frac{1}{2}$, а ветви параболы направлены в отрицательную сторону оси OX. Формулы преобразования координат при параллельном переносе имеют вид: $x'=x-\frac{8}{2}$, $y'=y-1$. Тогда уравнение параболы примет вид $(y')^2=-x'$.

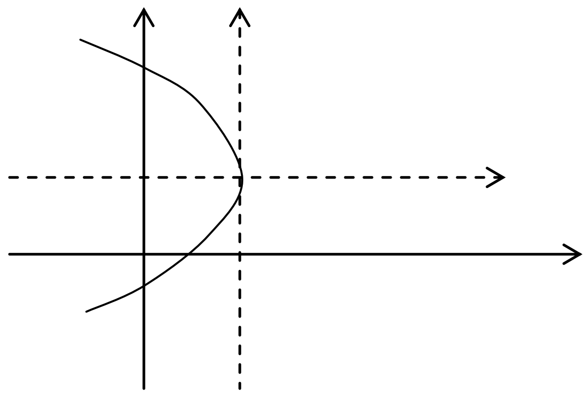


Рис. 12

Для построения параболы найдем точки пересечения параболы с осью OY. Для этого положим $x=0$ и решим уравнение $2y^2-4y-1=0$. Тогда

$$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{4} \qquad \Rightarrow y_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}\approx 2{,}25, \quad y_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}=-0{,}25.$$

Имеем две точки $A(0;\,2{,}25)$ и $B(0;\,-0{,}25)$ – точки пересечения параболы с осью OY (рис. 12).

Задания к контрольной работе:

Задание 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Решить систему: а) методом Гаусса;
б) по правилу Крамера;
в) средствами матричного исчисления (зад. 1 – 10).

1. $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 2x + 4y - z = 1 \\ x - 8y - 3z = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 = -6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 13 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 15 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 (в градусах) и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

11.	A_1(3, 4, 5)	A_2(1, 2, 1)	A_3(-2, -3, 6)	A_4(3, -6, -3)
12.	A_1(1, 3, 1)	A_2(-1, 4, 6)	A_3(-2, -3, 4)	A_4(3, 4, -4)
13.	A_1(2, 4, 1)	A_2(-3, -2, 4)	A_3(3, 5, -2)	A_4(4, 2, -3)
14.	A_1(3, 4, 2)	A_2(-2, 3, -5)	A_3(4, -3, 6)	A_4(6, -5, 3)
15.	A_1(3, -2, 6)	A_2(-6, -2, 3)	A_3(1, 1, -4)	A_4(4, 6, -7)
16.	A_1(-5, -4, -3)	A_2(7, 3, -1)	A_3(6, -2, 0)	A_4(3, 2, -7)
17.	A_1(7, 4, 9)	A_2(1, -2, -3)	A_3(-5, -3, 0)	A_4(1, -3, 4)
18.	A_1(-4, -5, -3)	A_2(3, 1, 2)	A_3(5, 7, -6)	A_4(6, -1, 5)

19. $A_1(5, -4, 4)$ $A_2(-4, -6, 5)$ $A_3(3, 2, -7)$ $A_4(6, 2, -9)$
20. $A_1(-7, -6, -5)$ $A_2(5, 1, -3)$ $A_3(8, -4, 0)$ $A_4(3, 4, -7)$

Задание 3. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B и C. Найти нормальный вектор и уравнение плоскости в «отрезках». Построить данную плоскость.

21. $A(-3, 2, 5)$, $B(1, 4, -3)$, $C(2, 1, 4)$
22. $A(-2, 1, 0)$, $B(1, -7, 3)$, $C(3, 1, 2)$
23. $A(9, -5, 3)$, $B(2, 1, 4)$, $C(-2, 7, 2)$
24. $A(6, 2, -1)$, $B(-4, 1, 3)$, $C(4, 1, 7)$
25. $A(3, -2, 4)$, $B(5, 1, -6)$, $C(3, 5, -7)$
26. $A(7, -1, 3)$, $B(5, 2, 4)$, $C(8, 2, -1)$
27. $A(3, 2, -5)$, $B(-1, 4, 5)$, $C(2, 0, 3)$
28. $A(-1, 3, 4)$, $B(2, 3, -7)$, $C(8, 1, 3)$
29. $A(2, 4, -1)$, $B(1, -1, 3)$, $C(5, 3, 6)$
30. $A(3, 2, 4)$, $B(-3, 7, 1)$, $C(2, -1, 4)$

Задание 4. Привести кривую второго порядка к каноническому виду и построить ее.

31. $2x^2+3y^2-10x+21y-70=0$
32. $3x^2-2y^2+15x+10y-100=0$
33. $5x^2+15x-2y+7=0$
34. $4x^2+3y^2+20x-15y-25=0$
35. $2x^2-5y^2-18x-10y-50=0$
36. $3x^2+2y^2-9y+14y-100=0$
37. $2y^2-10y+3x-15=0$
38. $4x^2-3y^2+4x+9y-25=0$
39. $2y^2-3x^2+10y+6x-10=0$
40. $4x^2-20x+3y-5=0$

Задание 5. Даны вершины треугольника ABC. Найти точку N пересечения медианы AM и высоты CH. Сделать чертеж.

41. $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$
42. $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$
43. $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$
44. $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$

45.	$A(1, -2)$,	$B(7, 1)$,	$C(3, 7)$
46.	$A(-2, -3)$,	$B(1, 6)$,	$C(6, 1)$
47.	$A(-4, 2)$,	$B(-6, 6)$,	$C(6, 2)$
48.	$A(4, -3)$,	$B(7, 3)$,	$C(1, 10)$
49.	$A(4, -4)$,	$B(8, 2)$,	$C(3, 8)$
50.	$A(-3, -3)$,	$B(5, -7)$,	$C(7, 7)$