ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Хабаровск 2012 г.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и индивидуальные задания к самостоятельной работе для студентов второго курса строительных специальностей.

Издание второе, стереотипное

Хабаровск 2012 г.

УДК 517.25.
Дифференциальные уравнения: Методические указания и индивидуальные задания к самостоятельной работе для студентов второго курса строительных специальностей / Сост. А.З.Син, В.В.Мухранова. – Хабаровск:
Хабар. политехн. ин-т, 1991. – 24 с.

Работа составлена на кафедре высшей математики (с). Она содержит методические указания для проведения занятия по дифференциальным уравнениям первого порядка.
Объём выполнения – 4 часа.

Печатается в соответствии с решением кафедры высшей математики (с), и методического совета архитектурно-строительного факультета.

Хабаровский политехнический институт, 1991г.

Содержание

Занятие 2.

Тема: *Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными.*

Цель: *Познакомиться с основными понятиями теории обыкновенных дифференциальных уравнений и простейшими уравнениями – дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.*

Приведем примеры обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем будем пользоваться общепринятым термином – дифференциальные уравнения, имея ввиду обыкновенные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим примеры:

1.1. $3y^{'} - e^{2y} - 2xy^{'} = 0;$

1.2. $(3-2x)\,\dfrac{dy}{dx} = e^{2y};$

2.1. $y - y - xy = 0;$

2.2. $(1-x)\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx};$

3.1. $y^{'''} - 2y^{''} - x + 2y = 0;$

3.2. $\dfrac{d^3y}{dx^2} - 2\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = x - 2y;$

4.1. $e^{y^{'}} + \sin xy^{'} - xy = 0;$

4.2. $e^{y^{'}} + \sin xy^{'} = xy.$

Основной характеристикой дифференциальных уравнений является его порядок, т.е. порядок старшей производной, входящей в уравнение. Очевидно, дифференциальное уравнение 1.1., 4.1. – первого порядка, 2.1. – второго, 3.1. – третьего.

Некоторые дифференциальные уравнения можно разрешить относительно старшей производной (выразить старшую производную). Решим указанные примеры относительно старшей производной, тогда получим:

$$1.3.\ y^{'} = \frac{e^{2y}}{3-2x};$$
$$2.3.\ y^{'''} = 2y^{''} + x - 2y;$$
$$3.3.\ y^{'''} = 2y^{''} + x - 2y.$$

Дифференциальные уравнения: 1.1. и 4.1., 2.1., 3.1. можно записать в общем виде:

$$(1^{'}).\ F(x, y, y^{'}) = 0;$$

$$(2^{'}).\ F(x, y, y^{'}, y^{''}) = 0;$$

$$(3^{'}).\ F(x, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}) = 0.$$

А дифференциальные уравнения: 1.3., 2.3., 3.3., разрешённые относительно старшей производной можно записать в общем виде:

$$(1).\ y^{'} = f(x, y);$$

$$(2).\ y^{''} = f(x, y, y^{'});$$

$$(3).\ y^{'''} = f(x, y^{'}, y^{'''}).$$

Не всякое дифференциальное уравнение можно разрешить относительно старшей производной. Таким дифференциальным уравнением является пример: 4.1.

Следующим основным понятием теории дифференциальных уравнений является понятием решения. Но всегда нужно иметь ввиду: найти решение уравнения (любого уравнения, не только диффеерenциального) означает найти найти неизвестную, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Рассмотрим понятие решения на примерах:

Пример 1: Пусть C, C_1, C_2, C_3. – произвольные постоянные.

Проверьте, какие из указанных функций являются решения дифференциального уравнения первого порядка: $y^{'} = 2$.

$$y = x; \quad y = 2x; \quad y = 2x + 5; \quad y = x + C_1; \quad y = C_1 x + C_2.$$

Пример 2: Проверить, какие из указанных функций являются решениями дифференциального уравнения первого порядка: $y^{'} = 1 - y$;

$$y = x; \quad y = C_1 e^{-x}; \quad y = C_1 e^{-x} + 1; \quad y = C_1 e^{-x} + C_2.$$

Пример 3: Проверить, какие из указанных функций являются решениями дифференциального уравнения второго порядка: $y^{''} = 2$;

$$y = x^2; \quad y = 3x^2; \quad y = x^2 + 2x + C_1;$$
$$y = x^2 + C_1 x + C_2; \quad y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

На этих примерах можно заметить следующее: во-первых, дифференциальное уранение имеет бесконечное множество решений, во-вторых, видна связь между решениями. Проиллюстрированна эта связь на первом примере.

Решениями дифференциального уравнения: $y^{'} = 2$, являются функции:

$$y = 2x; \quad y = 2x + 5; \quad y = 2x + C_1,$$

причём из решения: $y = 2x + C_1$, можно получить решения:

$$y = 2x; \quad y = 2x + 5,$$

если подставим значения: $C_1 = 0$ и $C_1 = 5$.

Определение: *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка, называется функция: $y = \varphi(x, c)$, которая обладает двумя свойствами:*

1. Она является решением дифференциального уравнения при любом значении постоянной C.

2. Для любого заданного решения можно найти значение постоянной $C = c^{0}$ такое, что функция $y = \varphi(x, c^{0})$ совподает с данным решением.

Теперь определим понятие общего решения для дифференциального уравнения $(2^{'})$.

Определение: *Общим решением дифференциального уравнения второго порядка $(2^{'})$, называется функция: $y = \varphi(x, c_{1}, c_{2})$, которая обладает думя свойствами:*

1. Она является решением дифференциального уравнения при дюбых значениях постоянных: C_{1}, C_{2}.

2. Для любого заданного решения можно найти значение постоянных $C_{1} = C_{1}^{0}$, $C_{2} = C_{2}^{0}$ такие, что функция $y = \varphi(x_{1}, c_{1}^{0}, c_{2}^{0})$ совподает с данным решением.

Если функция, обладающая свойствами первым и вторым, задана неявно, т.е. в виде: $\phi(x, y, c) = 0$, для уравнения первого порядка и $\phi(x, y, c_{1}, c_{2}) = 0$, для уравнения второго порядка, то она назыается общим интегралом.

Общее решение дает возможность получить любое решение данного дифференциального уравнения, которое принято называть частным решением. Но по виду частного решения не всегда легко определить общее решение.

Пример 4: Найти общее решение по виду частного решения: $y = e^{x}$, для дифференциального уранения:

$$\ln y + y^{'} = x + y.$$

Теперь рвссмотрим методы нахождения решения дифференциальных уравнений разрешённых относительно старшей производной.

Методы нахождения решения дифференциального уранения зависят от порядка и типа уравнения.

Изучим некоторые методы решения дифференциальных уранения первого порядка определяется видом правой части уравнения.

Простейшим уравнением первого порядка является дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Определение: *Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если его правая часть имеет вид:*

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y);$$

$$y' = f_1(x)\, f_2(y).$$

Нахождение решения данного дифференциального уравненения сводится простейшими преобразованиями к вычислению неопределённых интегралов.

Действительно: $y' = f_1(x)\, f_2(y)$ или $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$, умножим на dx , тогда $y = f_1(x)\, f_2(y)\, dx$ разделим на $f_2(y)$, что приводит к виду:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx,$$

полученное неравенство проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx,$$

после вычисления интеграллов получим общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

Рассмотрим пример: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2\sqrt{x}\, dy + y\, dx = 0.$$

Решение: Для определения типа уравнения найдём праую часть уравнения. Разделим уравнения на dx, тогда:

$$2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} + y = 0 \ \text{ или } \ 2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = -y,$$

окончательно: $y' = -\dfrac{y}{2\sqrt{x}}$. Правую часть $f(x, y) = -\dfrac{y}{2\sqrt{x}}$ можно представить как:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \text{ а } \ f_2(y) = -y.$$

Следовательно, уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}, \ \text{ откуда } \ \frac{2dy}{y} = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Полученное проинтегрируем: $\displaystyle\int \frac{2dy}{y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. В результате найдём общий интеграл:

$$2\ln|y| = -2\sqrt{x} + C.$$

Из полученного решения выразим y. Для этого $2\ln|y| = -2\sqrt{x}$ разделим на 2, тогда:

$$2\ln|y| = -\sqrt{x} + \frac{c}{2},$$

т.к. $\dfrac{c}{2}$ – является произольной постоянной, обозначим для простоты дробь $\dfrac{c}{2}$ за C, что приводит к виду: $\ln|y| = -\sqrt{x} + C$. Отсюда:

$$y = e^{-\sqrt{x}+c} \ \text{ или } \ y = e^c\, e^{-\sqrt{x}},$$

учитывая, что e^c – это так же яляется произвольной постоянной, обозначим его для простоты за c, тогда получим общее решение уравнения:

$$y = c\, e^{-\sqrt{x}}.$$

Вопросы к защите.

1. Дайте определение дифференциального уравнения в общем виде для 4-го, n-го порядка;
2. Дайте определение дифференциального уравнения, разрешенного относительно старшей производной 4-го, n-го порядка;
3. Дайте определение общего решения, общего интеграла для дифференциального уравнения 4-го, n-го порядка;
4. Как связаны частные и общее решение?
5. Дайте определение дифференциального уравнения с разрешающимися переменными;
6. Проверить, что $y = c\, e^{-\sqrt{x}}$, является решением последнего примера.

Индивидуальные задания.

1. Выполнить индивидуальные задания к СРС 1;
2. Почему указанные примеры являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными?

Занятие 3.

Тема: *Линейные, однородные дифференциальные уравнения.*

Цель: *Изучить основной метод сведения различных дифференциальных уравнений к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными – метод замены искомой функции.*

Мы познакомились с простым типом дифференциальных уравнений первого порядка.

Для нахождения решения целого класса дифференциальных уравнений используют метод замены искомой функции, который позволяет сводить данное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Проиллюстрируем идею метода на примерах:

Пример 1: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2yy' + x = x\cos^2 3\left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right).$$

Решение: Сделаем замену искомой величены $u(x) = y^2(x) + \dfrac{x^2}{2}$ и продифференцируем:

$$u' = \left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right)' \quad \text{или} \quad u' = 2yy' + x,$$

тогда исходное дифференциальное уравнение преабразуется к виду:

$$u' = x\cos^2 3u.$$

Полученное уравнение: $\dfrac{du}{dx} = x\cos^2 3u$, проинтегрируем:

$$\int \frac{du}{\cos^2 3u} = \int x dx.$$

Вычеслим интегралы, в результате получим: $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} 3u = \dfrac{x^2}{2}$. Сделаем обратную замену: $u = y^2 + \dfrac{x^2}{2}$, тогда получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Отсюда выразим функцию y , тогда получим общее решение:

$$y = \sqrt{\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right) - \frac{x^2}{2}}.$$

Пример 2: Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка:

$$y^{'} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Решение: Для данного уравнения необходимо применить замену искомой функции: $y(x)$ на новую: $u(x)$, тогда $y^{'} = u + xu^{'}$, а исходное уравнение сведётся к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$xu^{'} + u = \frac{x+xu}{x-xu} \ \text{ или } \ u^{'}x = \frac{1+u}{1-u} - u,$$

откуда $u^{'} == \dfrac{1+u^2}{1-u^2}\,\dfrac{1}{x}$. Разделив переменные: $\dfrac{1-u}{1+u^2}\,du = \dfrac{dx}{x}$, проинтегрируем:

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x} \ \text{ или } \ \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u\,du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Окончательно получим: $\operatorname{arctg} u - \dfrac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + C$, преобразуем:

$$\operatorname{arctg} - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln C\,|x|\,.$$

Сделаем обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, тогда получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln C\,|x|\,.$$

Пример 3: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^{'} = yx^3 + 9e^{\frac{x^4}{8}}\sqrt{(1+3x)\,y}.$$

Решение: произведем стандартную замену: $y(x) = u(x)\,v(x)$, тогда $y^{'} = u^{'}v + uv^{'}$, а уравнение преобразуется к виду:

$$u^{'}v + uv^{'} = uvx^3 + 9e^{\frac{x^4}{8}}\sqrt{(1+3x)uv},$$

$$u^{'}v + uv^{'} - uvx^3 = 9e^{\frac{x^4}{8}}\sqrt{(1+3x)uv},$$

$$u^{'}v + u(v - vx^3) = 9e^{\frac{x^4}{8}}\sqrt{(1+3x)uv}\ (*).$$

Найдём одну из функций $v(x)$ из условия: $v - vx^3 = 0$. Из полученного уравнения с разделяющимися переменными: $\dfrac{dv}{dx} = vx^3$ находим частное решение: $v = e^{\frac{x^4}{4}}$. Найденное: $v = e^{\frac{x^4}{4}}$, подставим в уравнение

$$(*)\ u^{'} e^{\frac{x^4}{4}} = 9e^{\frac{x^4}{8}}\sqrt{(1+3x)ue^{\frac{x^4}{4}}} \text{ или } u^{'} = 9(1+3x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{u}.$$

Из полученного уравнения с разделяющимися переменными найдём решение:

$$u^{\frac{1}{2}} = 9(1+3x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Следовательно, $u = \left((1+3x)^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$, а общее решение исходного уравнения:

$$y = \sqrt{(1+3x)^{\frac{3}{2}} + c} \times e^{\frac{x^4}{4}},$$

т.к. была произведена замена: $y = uv$. Для определённых типов правой части существует стандартные замены, которые позволяют сводить исходное уравнение к дифференциальным уравнениям с различающимися переменными.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений.

Определение: *Дифференциальное уравнение первого порядка называеся однородным, если его правая часть обладает свойством:*

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) \text{ для любого числа } \lambda \neq 0.$$

Определение: *Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его правая часть представима в виде:*

$$f(x, y) = P(x)y + Q(x).$$

Для однородного и линейных уравнений приведём сдандартные замены, приводящие к дифференциальным ураненииям с разделяющимися переменными:

для одного элемента: $y = xu$,

для линейной замены: $y = uv$.

Как используются приведённые замены, показано в примерах: во-втором и в-третьем.

Вопросы к защите.

1. Дайте определение линейного, однородного и дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;

2. К какому типу дифференциального уравнения сводит замена искомой функции?

3. В чем отличие замены искомой функции линейного уравнения первого порядка от одного?

Индивидуальные задания.

1. Определить типы дифференциальных уравнений;
2. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
3. Решить дифференциальные уравнения с заданной заменой искомой функции;
4. Решить однородные, линейные уравнения.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант 1:

1. $x\,du + 4u\,dx = 0;$
2. $(3+4x^2)\,du + 6x\,udx = 0;$
3. $x^3y^{'} + 4x^2y = x^4;$
4. $(3x+4y)\,dy = (5x+3y)\,dx;$
5. $\dfrac{xu^{'}}{u} = \ln\dfrac{2}{3}u;$
6. $u^{'}x = \dfrac{5-4u^2}{3+4u};$
7. $z^{'} - \dfrac{z}{x} = \dfrac{z}{x}(\ln 2z - \ln 3x);$
8. $2yy^{'} + x^3 = 3\cos^2 5\left(y^2 + \dfrac{x^4}{4}\right);$
9. $3+4x^2z^{'} - 6xz = \left(3+4x^2\right)^{\frac{11}{4}}.$

Вариант 2:

1. $y - \dfrac{y}{x} = 2\sin^2 2\dfrac{y}{x};$
2. $u^{'} + au = 0;$
3. $(x+4y)\,dy = (3x+y)dx;$
4. $y^{'}e^{-3x} + 2ye^{-3x} = 7;$
5. $xu^{'} = 2\sin^2 2u;$
6. $z^{'}x = \dfrac{3-4z^2}{1+4z};$
7. $(2+3x^2)\,y^{'} + 6xy = \left(2+3x^2\right)^2;$
8. $y^{'} + x^2 = 5\cos^2\left(y + \dfrac{x^3}{3}\right);$
9. $(2+3x^2)\,du + 6x\,udx = 0.$

Вариант 3:

1. $u^{'}(5x+3u) = 4x+5u;$
2. $(3-4x^2)y^{'} + 6xy = \left(3-4x^2\right)^{\frac{5}{4}};$
3. $x^{-3}z^{'} + z = 0;$
4. $(3-x^2)\,du + 6x\,udx = 0;$
5. $xu^{'} = u\ln\dfrac{2}{3}u;$
6. $y^{'}x = \dfrac{4-3y^2}{5+3y};$
7. $3y^2y^{'} + x^4 = 2\,\mathrm{tg}\left(y^3 + \dfrac{x^5}{5}\right);$
8. $x^{-3}y^{'} + y = e^{-\frac{x^4}{4}}x^{-3}\ln x;$
9. $z^{'} - \dfrac{z}{x} = \dfrac{z}{x}(\ln 2z - \ln 3x).$

Вариант 4:

1. $y^{'}-\dfrac{y}{x}=e^{2\frac{y}{x}}$;
2. $(3-4x^2)y^{'}+6xy=\left(3-4x^2\right)^{\frac{5}{4}}$;
3. $x^{-3}z^{'}+z=0$;
4. $(3-x^2)\,du+6x\,udx=0$;
5. $xu^{'}=u\ln\dfrac{2}{3}\,u$;
6. $yx=\dfrac{4-3y^2}{5+3y}$;
7. $3y^2y^{'}+x^4=2\,\mathrm{tg}\left(y^3+\dfrac{x^5}{5}\right)$;
8. $x^{-3}y^{'}+y=e^{-\frac{x^4}{4}}x^{-3}\ln x$;
9. $z^{'}-\dfrac{z}{x}=\dfrac{z}{x}\,(\ln 2z-\ln 3x)$.

Вариант 5:

1. $xu^{'}=u\ln\dfrac{4}{3}\,u$;
2. $y^{'}+y\,\mathrm{tg}\,2x=(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}$;
3. $dt+2t\,dx=0$;
4. $y^{'}-\dfrac{y}{x}=5\sin^2\dfrac{3y}{x}$;
5. $xt^{'}=5\sin^2 3t$;
6. $z^{'}+2z=3e^{3x}$;
7. $3y^2y^{'}+x=\mathrm{tg}\left(y^3+\dfrac{x^2}{2}\right)$;
8. $\cos 2x\,du+u\sin 2x\,dx=0$;
9. $y^{'}=\dfrac{y}{x}(\ln 4y-\ln 3x)+\dfrac{y}{x}$.

Вариант 6:

1. $y^{'}=6\cos^2\dfrac{3y}{x}+\dfrac{y}{x}$;
2. $xt^{'}=\dfrac{1+t^2}{4}$;
3. $u'+6u\cos 3x=0$;
4. $x\,du+9u\,dx=0$;
5. $y^{'}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{4x^2}$;
6. $xu^{'}=6\cos^2 3u$;
7. $y^{'}+5x^4=8\sin^2(y+x^5)$;
8. $x^4y^{'}+9x^3y=x^6$;
9. $y^{'}+6y\cos 3x=7\sin 6x$.

Вариант 7:

1. $x^{-5}u^{'} + u;$
2. $y^{'} = e^{7\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x};$
3. $xt^{'} = t\ln\dfrac{7}{6}t;$
4. $xz^{'} = e^{7z};$
5. $(7+8x^2)y^{'} = \left(7+8x^2\right)\dfrac{9}{4};$
6. $(7+8x^2)u^{'} + 4xu = 0;$
7. $x^{-5}y^{'} + y = e^{-\frac{x^6}{6}}x^{-5}\arcsin x;$
8. $5y^4y^{'} + 2x = \operatorname{ctg}(y^5+x^2);$
9. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x}(\ln 7y - \ln 6x).$

Вариант 8:

1. $y^{'} = \dfrac{\sqrt{8x^2+9y^2}}{3x} + \dfrac{y}{x};$
2. $\cos 8x\,du + 4\sin 8x\,dx = 0;$
3. $xt^{'} = 8\cos^2 4t;$
4. $x^{-6}dt + t\,dx = 0;$
5. $xz^{'} = \dfrac{\sqrt{8+9z^2}}{3};$
6. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = 8\cos^2 4\dfrac{y}{x};$
7. $4y^3y^{'} + x^3 = \left(y^4 + \dfrac{x^4}{4}\right)^{\frac{7}{3}};$
8. $x^{-6}y^{'} + y = e^{-\frac{x^7}{z}}x^{-6}\operatorname{arctg} x.$

Вариант 9:

1. $z^{'}e^{-7x} + 9ze^{7x} = 5;$
2. $y^{'}(x-7y) = 4x + y;$
3. $x\,du = -4\cos^2\dfrac{4}{3}\,u\,dx;$
4. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = -4\cos^2\dfrac{4y}{x};$
5. $du + 9u\,dx = 0;$
6. $t^{'x} = \dfrac{4+7t^2}{1-7t};$
7. $y^{'} + y\operatorname{ctg} 9x = (\sin 9x)^{\frac{8}{9}};$
8. $\sin 8x\,du + u\cos 8x\,dx = 0;$
9. $y^{'} + 3x^2 = \left(y+x^3\right)^{-\frac{4}{3}}.$

Вариант 10:

1. $z^{'} = -3\sin^2\dfrac{2z}{x} + \dfrac{z}{x}$;
2. $x\,du = \dfrac{4+5u^2}{6}\,dx$;
3. $u^{'}\cos 2x + u\sin 2x = 0$;
4. $x\,dt = -3\sin^2 2t\,dx$;
5. $(4-3x^2)\,du + 8x\,u\,dx = 0$;
6. $y^{'} = \dfrac{4x^2+5y^2}{6x^2} + \dfrac{y}{x}$;
7. $y^{'} + y\,\mathrm{tg}\,2x = (\cos 2x)^{\frac{3}{2}}$;
8. $(4-3x^2)y^{'} + 8xy = \left(4-3x^2\right)^{\frac{2}{3}}$;
9. $y^{'} - 2x = \mathrm{tg}\,4(y-x^2)$.

Вариант 11:

1. $x\,du + 11u\,dx = 0$;
2. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = e^{-\frac{4y}{x}}$;
3. $x^3y^{'} + 11x^2y = x^5$;
4. $xt^{'} = t\ln\dfrac{11}{12}\,t$;
5. $xz^{'} = e^{-4z}$;
6. $x^2du + u\,du = 0$;
7. $2yy^{'}$-$3x^2 = (y^2-x^3)\ln(y^2-x^3)$;
8. $x^{-2}y^{'} + y = e^{-\frac{x^3}{3}}x^{-2}\cos^2 2x$;
9. $z^{'} = \dfrac{z}{x}(\ln 11z - \ln 2x) + \dfrac{z}{x}$.

Вариант 12:

1. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = -4\cos^2\dfrac{2y}{x}$;
2. $x\,du = \dfrac{\sqrt{2u^2-1}}{3}\,dx$;
3. $du = 12u\,dx = 0$;
4. $xu^{'} = -4\cos^2 2u$;
5. $x^{-4}u^{'} + u = 0$;
6. $y^{'}e^{-5x} + 12ye^{-5x} = 3$;
7. $z^{'} + x^4z = e^{-\frac{x^5}{5}}\sin^2 10x$;
8. $y^{'} = \dfrac{\sqrt{2y^2-x^2}}{3x} + \dfrac{y}{x}$;
9. $y^{'} - \dfrac{7}{8}x^6 = \mathrm{tg}\,2\left(y - \dfrac{x^8}{8}\right)$.

Вариант 13:

1. $x\,dt = 13t\,dx$;
2. $y' = -\frac{y}{x} + \frac{3}{2}\cos^2\frac{4}{3}x$;
3. $y' - \frac{y}{x} = e^{-\frac{4y}{x}}$;
4. $x^5y' + 13x^4y = x^2$;
5. $xu' = \frac{3}{2}\cos^2\frac{4}{3}u$;
6. $xz' = e^{-4z}$;
7. $y' + y\operatorname{tg}3x = (\cos 3x)^{\frac{4}{3}}$;
8. $\cos 3x\,du + u\sin 3x\,dx = 0$;
9. $2yy' - 4x^3 = \sin^2(y^2 - x^4)$.

Вариант 14:

1. $x\,du = -14u\,dx$;
2. $xt' = t\ln\frac{2}{6}t$;
3. $\sin 2x\,u' + u\cos 2x = 0$;
4. $y' + \frac{14}{x}y = x^3$;
5. $u' = \frac{u - 3u^2}{5x}$;
6. $z' = \frac{4x^2 - 3z^2}{5x^2} + \frac{z}{x}$;
7. $y' - \frac{y}{x} = \frac{y}{x}(\ln 2y - \ln 6x)$;
8. $3y^2y' - 7x^6 = \sqrt[3]{y^3 - x^7}$;
9. $y' + y\operatorname{ctg}2x = (\sin 2x)^{\frac{1}{2}}$.

Вариант 15:

1. $y' - 15y = 2e^{3x}$;
2. $u' - 15u = 0$;
3. $z'\cos 3x + z\sin 3x = 0$;
4. $xu' + 3\sin^2\frac{2}{3}u = 0$;
5. $t' = -3\sin^2\frac{2t}{3x} + \frac{t}{x}$;
6. $xu' = u\ln\frac{5}{4}u$;
7. $y' - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos^2\left(y - \sqrt{x}\right)$;
8. $y' = \frac{y}{x}(\ln 5y - \ln 4x) + \frac{y}{x}$;
9. $y' + \operatorname{tg}3x = (\cos 3x)^{\frac{4}{3}}$.

Вариант 16:

1. $u^{'}\cos 2x + u\sin 2x = 0;$
2. $z^{'} - \dfrac{z}{x} = e^{\frac{16z}{x}};$
3. $x\,du - 4\cos^2 3u\,dx = 0;$
4. $(4+9x^2)\,u^{'} + 3x\,u = 0;$
5. $y^{'} = 4\cos^2\dfrac{3y}{x} + \dfrac{y}{x};$
6. $xt^{'} = e^{16t};$
7. $y^{'} + \dfrac{3x}{4+9x^2}\,y = (4+9x^2)^{\frac{7}{6}};$
8. $y^{'} + 4\,\mathrm{tg}\,2x = (\cos 2x)^{\frac{3}{2}};$
9. $3y^{'} - 3x^2 = \left(3y - x^3\right)^{-\frac{5}{3}}.$

Вариант 17:

1. $x^{-2}u^{'} + u = 0;$
2. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}\cos^2\dfrac{y}{x};$
3. $x\,dz = \dfrac{\sqrt{1-4z^2}}{3}\,dx;$
4. $y^{'} = \dfrac{\sqrt{x^2-4y^2}}{3x} + \dfrac{y}{x};$
5. $xu^{'} = \dfrac{3}{2}\cos^2 u;$
6. $du - 4u\,dx = 0;$
7. $y^{'} - \dfrac{4}{5}\,x^3 = \cos^2\left(y - \dfrac{x^4}{5}\right);$
8. $y^{'} + x^3y = e^{-\frac{x}{4}}\ln(x+1);$
9. $z^{'}e^{-3x} - 4ye^{-x} = 10.$

Вариант 18:

1. $x^{-2}u^{'} + u = 0;$
2. $x\,dt - e^{-2t}dx = 0;$
3. $u^{'}\cos 3x + u\sin 3x = 0;$
4. $y^{'} = \dfrac{y}{x}(\ln 7y - \ln 3x) + \dfrac{y}{x};$
5. $xz^{'} = z\ln\dfrac{z}{3};$
6. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = e^{-\frac{2y}{x}};$
7. $y^{'} + y\,\mathrm{tg}\,3x = (\cos 3x)^{\frac{4}{3}};$
8. $4y^3y^{'} - x^2 = \mathrm{tg}\left(y^4 - \dfrac{x^3}{3}\right);$
9. $y^{'} + x^2y = e^{-\frac{x^3}{3}}\cos^2 10x.$

Вариант 19:

1. $y^{'}(2x+3y)=4x+2y;$
2. $x^{-2}u^{'}+u=0;$
3. $xz^{'}=2\cos^2 3z;$
4. $u^{'}x=\dfrac{4-3u^2}{2+3u};$
5. $du+2u\cos 3x\,dx=0;$
6. $y^{'}-\dfrac{y}{x}=2\cos^2\left(3\dfrac{y}{x}\right);$
7. $y^{'}+2y\cos 3x=4\sin 6x;$
8. $y^{'}-\dfrac{4}{3}x^3=\left(y-\dfrac{x^4}{3}\right)^{-\frac{7}{2}};$
9. $y^{'}+x^2y=e^{-\frac{x^3}{3}}x\ln x.$

Вариант 20:

1. $y^{'}=u\sin^2\dfrac{2y}{3x}+\dfrac{y}{x};$
2. $x\,du=u\ln\dfrac{5}{3}u\,dx;$
3. $x^{-3}u^{'}+u=0;$
4. $y^{'}+7y\cos 3x=4\sin 6x;$
5. $u^{'}+7u\cos 3x=0;$
6. $xt^{'}=4\sin^2\dfrac{2}{3}t;$
7. $3y^2y^{'}-\dfrac{6}{7}x^5=4\cos^2\left(y^3-\dfrac{x^6}{7}\right);$
8. $y^{'}+x^3y=e^{-\frac{x^4}{4}}\dfrac{x}{x^2-1};$
9. $y^{'}=\dfrac{y}{x}(\ln 5y-\ln 3x)+\dfrac{y}{x}.$

Вариант 21:

1. $y^{'}+\dfrac{6x}{1-x^2}y=\left(1-x^2\right)^{-2};$
2. $xt^{'}-t=0;$
3. $(1-x^2)\,y^{'}+6xy=0;$
4. $u^{'}x=\dfrac{7+3u^2}{2-3u};$
5. $y^{'}-\dfrac{y}{x}=e^{-3\frac{y}{x}};$
6. $y^{'}(2x-3y)=7x+2y;$
7. $2yy^{'}-x^3=4\cos^2 7\left(y^2-\dfrac{x^4}{4}\right);$
8. $\sin 5x\,du+u\cos 5x\,dx=0;$
9. $y^{'}+y\operatorname{ctg}5x=(\sin 5x)^{\frac{4}{5}}.$

Вариант 22:

1. $xt^{'} + 22t = 0;$
2. $y^{'} = e^{-\frac{2y}{x}} + \dfrac{y}{x};$
3. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = 10\cos^2\dfrac{y}{x};$
4. $u^{'} = \dfrac{10}{x}\cos^2 u;$
5. $xz^{'} = e^{-2u};$
6. $\cos 7x\,du + u\sin 7x\,dx = 0;$
7. $y^{'} + y\,\mathrm{tg}\,7x = (\cos 7x)^{\frac{8}{7}};$
8. $y^{'}y - \dfrac{5}{3}x^4 = \mathrm{tg}\left(\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^5}{3}\right);$
9. $x^4y^{'} + 22x^3y = x^2.$

Вариант 23:

1. $y^{'} = \dfrac{2x^2 - 7y^2}{5x^2} + \dfrac{y}{x};$
2. $xu^{'} = e^{-5u};$
3. $(4 - 5x^2)z^{'} - 12xz = 0;$
4. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = e^{-\frac{5y}{x}};$
5. $\cos 4x\,du + u\sin 4x\,dx = 0;$
6. $xu^{'} = \dfrac{2 - 7u}{5};$
7. $y^{'} + y\,\mathrm{tg}\,4x = (\cos 4x)^{\frac{5}{4}};$
8. $(4 - 5x^2)y^{'} = \left(4 - 5x^2\right)^{\frac{16}{5}};$
9. $y^{'} + 4x^3 = \sqrt{1 + y + x^4}.$

Вариант 24:

1. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = 0;$
2. $u^{'} + 24u\cos 2x = 0;$
3. $z^{'} - \dfrac{z}{x} = -\dfrac{5}{3}\cos^2\dfrac{2z}{x};$
4. $xy^{'} = -\dfrac{5}{3}\cos^2 2t;$
5. $u^{'} = \dfrac{u}{x}\ln\dfrac{4}{x}u;$
6. $xy^{'} - y = x^4;$
7. $y^{'} + 24y\cos 2x = 3\sin 4x;$
8. $y^{'} = \dfrac{y}{x}(\ln 4y - \ln x) + \dfrac{y}{x};$
9. $5y^{''}y^{'} - x^2 = e^{\left(y^5 - \frac{x^3}{3}\right)}.$

Вариант 25:

1. $y^{'} + 4y = 3e^{-5x}$;
2. $u^{'} \sin 3x + u \cos 3x = 0$;
3. $xu^{'} - = \cos^2 3u$;
4. $du + 4u\, dx = 0$;
5. $u^{'} = \dfrac{\sqrt{4 - 9u^2}}{3}$;
6. $y^{'} - \dfrac{y}{x} = -4\cos^2 \dfrac{3y}{x}$;
7. $z^{'} = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 9z^2}}{3x} + \dfrac{z}{x}$;
8. $2yy^{'} + 4x^3 = 3\,\mathrm{tg}\left(y^2 + x^4\right)$;
9. $y^{'} + y\,\mathrm{ctg}\,3x = (\sin 3x)^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 26:

1. $z^{'} \sin 9y; + \cos 9y = 0$;
2. $x^{'} e^{-6t} + 4xe^{-6t} = 8$;
3. $du + 4u\, dx = 0$;
4. $xz^{'} = 6\sin^2 4z$;
5. $xu^{'} = u \ln \dfrac{4}{2}$;
6. $z^{'} - \dfrac{z}{x} = 6\sin^2 \dfrac{4z}{x}$;
7. $z^{'} + z\,\mathrm{ctg}\,9x = (\sin 9x)^{\frac{8}{9}}$;
8. $z^{'} = \dfrac{z}{x}(\ln 7y - \ln 14x) + \dfrac{z}{x}$;
9. $2yy^{'} + x^3 = 3\sin^2 5\left(y^2 + \dfrac{x^4}{4}\right)$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и индивидуальные задания к самостоятельной работе для студентов второго курса строительных специальностей.

Валентина Васильевна Мухранова
Александр Замсуевич Син

Редактор Т.Ф.Шейкина
Технический редактор Л.А.Ушакова

Подписано в печать: 28.09.90. Формат: 60х90, 1/16. Бумага песчая. Офсетная печать. Усл. печ. л. 1,4. Уч. изделия 1,1. Тираж 500 экземпляров. Заказ 16. Бесплатно.

Редакционно-издательский отдел Хабаровского политехнического института. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская 136.

Фотоофсетная лаборатория Хабаровского политехнического института. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская 136.