

I. Показать, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' + y = \cos x$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad 5^{2x} dx &= 2 \sin 8y dy & 2. \quad 3 \cos \frac{3y}{5} \frac{dy}{dx} &= \frac{5}{x^2 + 4} \\ 3. \quad \frac{dt}{dx} &= \sqrt{4 - t^2} \cdot x & 4. \quad (x^2 + 1)y' - 5x &= 9xy \end{aligned}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x - 3)y' = y - 1, \quad y(4) = 2$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad y' &= \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2 & 2. \quad xy' &= \sqrt{x^2 + y^2} + y \\ 3. \quad y' - \frac{y}{x} &= x^2 & 4. \quad xy' + 5y &= \frac{\cos x}{x^4} \end{aligned}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y''x \ln x = y' \quad 2. \quad 4y^3 y'' = y^4 - 1$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - e^{2x} = 3$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - e^{2x} = 3$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент нормали к кривой равен абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
2. Угловой коэффициент нормали к кривой пропорционален абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
3. Угловой коэффициент нормали к кривой обратно пропорционален абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
4. Ослабление интенсивности излучения пропорционально количеству поглощенного излучения.

IX. Тело находится в среде с постоянной температурой $T = 25^\circ C$. За 20 минут в результате охлаждения температура тела понизилась от $80^\circ C$ до $60^\circ C$. За какое время с начала охлаждения температура тела понизится до $40^\circ C$? (По закону Ньютона величина охлаждения ΔT пропорциональна времени охлаждения и разности температур тела и среды).

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 4y' + 3y = 0$ **1.2** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **1.3** $y'' + 4y' + 5y = 0$

1.4 $y'' + 4y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ **2.2** $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$

2.3 $y'' - 4y' + 4y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$ **2.4** $y'' + 4y' + 5y = 3x^2 - 2x$

3. Решите задачу Коши $y'' - y' = 3e^{2x}$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' + y' = 3x$ $y(0) = 2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 2p - s \\ \frac{ds}{dx} = -p + 2s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + 2y = e^x$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \cos 2y dy = \frac{dx}{\sqrt{27 - 9x^2}} & 2. \quad x^{-6} \frac{dy}{dx} = 7y^{1/6} \\ 3. \quad \frac{dp}{dy} = (9 - 4p)^3 y^2 & 4. \quad (x^2 + 1)y' - y^2 = xy^2 \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 3)y' = x + 1, \quad y(0) = 4$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad y' = \frac{x + y}{x - y} & 2. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3 \\ 3. \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x & 4. \quad xy' - y = -2 \ln x \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy'' + y' = 1 \quad 2. \quad y'' = 128y^3$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - x^2 = x$, $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - x^2 = x$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2) = 4 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент касательной к кривой равен абсциссе точки пересечения касательной и кривой.

2. Угловой коэффициент касательной к кривой пропорционален абсциссе точки пересечения касательной и кривой.

3. Угловой коэффициент касательной к кривой обратно пропорционален абсциссе точки пересечения касательной и кривой.

4. Скорость полураспада вещества пропорциональна его количеству.

IX. Вещество А преобразуется в вещество В в ходе химической реакции со скоростью, пропорциональной количеству непрореагировавшего вещества.

Количество А через 1 час после начала реакции равно 7,75 г, а через 3 часа — $1\frac{2}{7}$ г. Сколько вещества А было вначале реакции? Через какое время после начала реакции от вещества А останется 1% ?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' + 3y' + 2y = 0$ **1.2** $y'' - 2y' + y = 0$ **1.3** $y'' - 2y' + 5y = 0$

1.4 $y'' + 5y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' + 3y' + 2y = (4 - 2x)e^{2x}$ **2.2** $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-x}$

2.3 $y'' - 2y' + y = 5 \sin x - 3 \cos x$ **2.4** $y'' - 2y' + 5y = 4x - 2x^2 + 1$

3. Решите задачу Коши $y'' + 4y = 3 \sin 3x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

4. Решите краевую задачу $y'' - 2y' = 6x + 4$ $y(0) = 1$, $y(1) = 2e^2$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = u + v \\ \frac{dv}{ds} = 4u - 2v \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \sqrt{1 - x^2} + 2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad \operatorname{tg} 2x dx = \frac{dy}{10 - 5y} \quad 2. \quad (7x - 1)^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(7 - y)}$$

$$3. \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(5 - 4z)^3} x^4 \quad 4. \quad y^2 y' - 5 \sin x = y \sin x$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x + 4)y' = y - 2, \quad y(-3) = 3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4 \quad 2. \quad y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$$

$$3. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x + 1}{x} \quad 4. \quad (x^2 + 4)y' + xy = 1$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 2xy'' = y' \quad 2. \quad yy'' + 1 = y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $\cos^2 xy'' = 1$, $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $\cos^2 xy'' = 1$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент нормали к кривой равен ординате точки пересечения нормали и кривой.

2. Угловой коэффициент нормали к кривой пропорционален ординате точки пересечения нормали и кривой.

3. Угловой коэффициент нормали к кривой обратно пропорционален ординате точки пересечения нормали и кривой.

4. Изменение числа людей, знающих о сенсации, пропорционально числу тех, кто знает, и числу тех, кто не знает о ней.

IX. Бак емкостью 100 л наполнен химическим раствором вещества А и соединен с таким же баком. За минуту в бак втекает 3 л воды и такое же количество смеси перекачивается во второй бак, первоначально наполненный водой (избыток жидкости выливается для очистки). Определить через какое время в баках окажется одинаковое количество вещества А (концентрация, т.е. количество вещества в 1 л раствора, остается неизменной за время Δt).

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 4y' = 0$ **1.2** $y'' + 6y' + 9y = 0$ **1.3** $y'' + 6y' + 10y = 0$

1.4 $y'' + 2y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 4y' = 3 \cos 3x$ **2.2** $y'' - 4y' = 4x^2 - 2x$

2.3 $y'' + 6y' + 9y = 4e^{3x}$ **2.4** $y'' + 6y' + 10y = 4 \cos 5x + \sin 5x$

3. Решите задачу Коши $y'' - 9y' + 14y = 3e^x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' + 9y = 2x - 4$ $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = p - 2s \\ \frac{ds}{dx} = -5p - 2s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \operatorname{tg} \ln 4x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{1 + y^2}{x}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. & y^3 dy = \frac{dx}{12 + 4x^2} \\ 2. & e^{-2x} \frac{dy}{dx} = 2^{2y} \\ 3. & \frac{dq}{dt} = \frac{\ln^6 t}{qt} \\ 4. & (x^2 - 4)y' - \sqrt{y} = x\sqrt{y} \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y + 1)y' = x - 5, \quad y(1) = 7$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. & xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y \\ 2. & y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12 \\ 3. & xy' + y = e^x \\ 4. & y' - \frac{7y}{x} = \frac{x^7}{\sin^2 4x} \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy'' + y' = x + 1 \quad 2. \quad (y + 1)y'' = y'^2 + y$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - \sin 2x = 0$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - \sin 2x = 0$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент касательной к кривой равен квадрату ординаты точки пересечения касательной и кривой.
2. Угловой коэффициент касательной к кривой пропорционален квадрату ординаты точки пересечения касательной и кривой.
3. Угловой коэффициент касательной к кривой обратно пропорционален квадрату ординаты точки пересечения касательной и кривой.
4. Градиент температуры в каждой точке стержня пропорционален расстоянию от точки до начала стержня.

IX. В баке находится 60 л раствора, содержащего 50 г вещества А. В каждую минуту в бак вливается 3 л воды и вытекает 2 л раствора. Концентрация раствора, т.е. количество вещества в 1 л раствора, поддерживается постоянной. Сколько вещества А останется в баке через 40 мин?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 5y' + 6y = 0$ **1.2** $y'' + 8y' + 16y = 0$ **1.3** $y'' + 8y' + 20y = 0$

1.4 $y'' + 3y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 5y' + 6y = 6e^x$ **2.2** $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$

2.3 $y'' + 8y' + 16y = 4 \cos 4x + \sin 4x$ **2.4** $y'' + 8y' + 20y = 2x^2 - 6$

3. Решите задачу Коши $y'' + 9y = 3 \cos 4x$ $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' - 2y' = 1 - 2x$ $y(0) = 3$, $y(1) = e^2$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 7y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = -3u - 2v \\ \frac{dv}{ds} = 4u + 3v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = (x^2+1)e^{x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{dy}{\cos^2 2y} = 2 \sin 5x dx & 2. 5^{1-3x} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos 4y} \\ 3. \frac{dy}{dt} = (1+y)^4 t^4 & 4. \operatorname{ctg} xy' - 4 \cos x = y^2 \cos x \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x-4)y' = y-2, \quad y(5) = 3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 3 & 2. y' = \frac{x-2y}{x+2y} \\ 3. y' - \frac{y}{x+1} = x & 4. (x+1)y' - 3y = (x+1)^6 \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' = \frac{1}{\sin x} \quad 2. yy'' = 1 + y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - e^{2x} = 3$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - e^{2x} = 3$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Прирост населения равен его количеству.
2. Прирост населения пропорционален его количеству.
3. Изменение количества кислорода в комнате обратно пропорционально количеству людей в комнате.
4. Работа газа при сжатии пропорциональна давлению газа.

IX. Наполненный водой цилиндр высотой 3 м и площадью дна $0,8\text{ м}^2$ имеет в дне отверстие площадью $0,1\text{ м}^2$. Определить время полного истечения воды через отверстие. (Скорость истечения воды $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота слоя в данный момент времени.)

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 4y = 0$ **1.2** $y'' + 10y' + 25y = 0$ **1.3** $y'' - 4y' + 5y = 0$

1.4 $y'' + 7y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 4y = (3x - 8)e^{3x}$ **2.2** $y'' - 4y = 2e^{-2x}$

2.3 $y'' + 10y' + 25y = 4 - 2x + x^2$ **2.4** $y'' - 4y' + 5y = \sin 3x - 2 \cos 3x$

3. Решите задачу Коши $y'' - 4y' = 6e^{3x}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' + 16y = 4x - 1$ $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 7y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = -3p + 2s \\ \frac{ds}{dx} = -4p + 3s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = x(3 - \cos x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y + x^2 \sin x$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 6\sqrt[3]{x}dx = \frac{dy}{25 - 100y^2} \quad 2. \quad e^{3x}\frac{dy}{dx} = 5 - 2y$$

$$3. \quad \frac{dr}{ds} = \sqrt{(1+r)^3} \cdot s^3 \quad 4. \quad (x^2 - 3)y' - y^4 = xy^4$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 2)y' = x + 5, \quad y(-4) = 6$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy' = 3\sqrt{x+y} + y \quad 2. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$$

$$3. \quad y' + \frac{y}{2x} = x^2 \quad 4. \quad xy' - 2y = x^3 \cos 4x$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad x^2y'' + xy' = 1 \quad 2. \quad (4y + 5)y'' = 4y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $y'' = \cos \frac{x}{2}, \quad \begin{cases} y(0) = 0, 5 \\ y'(0) = 0, 25 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' = \cos \frac{x}{2}, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Сила трения равна пройденному пути.
2. Сила трения пропорциональна пройденному пути.
3. 2. Сила трения обратно пропорциональна пройденному пути.
4. Скорость изменения температуры пропорциональна потоку тепла.

IX. В цилиндрическом сосуде объемом 10 л атмосферный воздух адиабатически (без обмена теплоты с окружающей средой) сжимается до объема 4 л.

Вычислить работу сжатия. (Работа пропорциональна площади поперечного сечения и давлению вдоль направления сжатия. Закон Пуассона:

$$P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^k, \quad \text{где } k = \frac{1}{4}. \quad \text{Атмосферное давление} - 1033 \text{ н/м}^2 \text{ .)}$$

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 6y' + 8y = 0$ **1.2** $y'' - 12y' + 36y = 0$ **1.3** $y'' + 4y' + 13y = 0$

1.4 $y'' + 25y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 6y' + 8y = 4e^{3x}$ **2.2** $y'' - 6y' + 8y = 2e^{4x}$

2.3 $y'' - 12y' + 36y = 6 \cos 3x + 2 \sin 3x$ **2.4** $y'' + 4y' + 13y = x - 4x^2$

3. Решите задачу Коши $y'' + 36y = 4 \sin 2x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' - 4y' = 5x - 2$ $y(0) = 0$, $y(1) = 2e^4$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} = -2u + 8v \\ \frac{dv}{dx} = 2u + 4v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \frac{x}{\cos x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \operatorname{ctg} 3x dx = \frac{dy}{4-y} \quad 2. 3 \frac{dy}{dx} = \frac{4+9y^2}{\cos^2 2x}$$

$$3. \frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x+2t^2} \quad 4. y' - 5x = 9xy$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x+5)y' = y-3, \quad y(-4) = 4$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5 \quad 2. y' = \frac{4x-y}{x+4y}$$

$$3. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2 \quad 4. x \ln xy' - y = x \ln x$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. y'' \operatorname{ctg} 2x + 2y' = 0 \quad 2. 2yy'' + y'^2 = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - x = \sin 2x$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0,5 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - x = \sin 2x$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость тела равна квадрату пройденного пути.
2. Скорость тела пропорциональна квадрату пройденного пути.
3. Скорость тела обратно пропорциональна квадрату пройденного пути
4. Плотность тела обратно пропорциональна объему, занимаемому телом.

IX. В бак, содержащий 20 л воды, непрерывно поступает со скоростью 5 л/мин химический раствор, в каждом литре которого 0,2 кг вещества А. Полученная смесь вытекает из бака с той же скоростью. Сколько вещества А будет в баке через 4 мин ?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' + 3y' = 0$ **1.2** $y'' - 14y' + 49y = 0$ **1.3** $y'' - 6y' + 25y = 0$

1.4 $y'' + 6y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' + 3y' = (6 - 2x)e^{4x}$ **2.2** $y'' + 3y' = 4x^2 - 5x + 2$

2.3 $y'' - 14y' + 49y = 7e^{6x}$ **2.4** $y'' - 6y' + 25y = 3 \cos 2x + \sin 2x$

3. Решите задачу Коши $y'' - y = 5e^{4x}$ $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$

4. Решите краевую задачу $y'' + 25y = x - 2$ $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = -p + 2s \\ \frac{ds}{dx} = -p - 4s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = (x+1)(e^x - 1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{y-4}dy = \frac{dx}{4-x} & 2. x^{-2}\frac{dy}{dx} = (y+2)^3 \\ 3. \frac{dz}{dx} = \sqrt[5]{2+zx^2} & 4. (x+5)y' - y = xy \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y+1)y' = x-4, \quad y(5) = 0$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y & 2. y' = \frac{y^2}{x^2} - 4\frac{y}{x} + 4 \\ 3. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x & 4. xy' + 3y = \frac{\sin 5x}{x^2} \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. x^3y'' + x^2y' = 1 \quad 2. yy'' = y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $y'' = e^{2x} - x$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' = e^{2x} - x$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Градиент температуры в точке равен расстоянию от точки до оси ординат.

2. Градиент температуры в точке пропорционален расстоянию от точки до оси ординат.

3. Градиент температуры в точке обратно пропорционален расстоянию от точки до оси ординат.

4. Прирост населения пропорционален его численности.

IX. Сверло, двигаясь со скоростью 4 м/с, пробивает стену толщиной 20 см и выходит из нее со скоростью 1 м/с. Найти время движения сверла в стене, если сила сопротивления стены пропорциональна квадрату скорости движения сверла.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' + 8y' + 7y = 0$ **1.2** $y'' - 16y' + 64y = 0$ **1.3** $y'' + 2y' + 17y = 0$

1.4 $y'' + 8y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' + 8y' + 7y = 6e^x$ **2.2** $y'' + 8y' + 7y = 3e^{-x}$

2.3 $y'' - 16y' + 64y = 4 \sin 6x - \cos 6x$ **2.4** $y'' + 2y' + 17y = 2x^2 - 4x + 3$

3. Решите задачу Коши $y'' + 49y = 2 \cos 3x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' - 3y' = 3x + 4$ $y(0) = 1$, $y(1) = 4e^3$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = z - y \\ \frac{dy}{dx} = -6z + 2y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 4y \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xyy' - y^2 = x^4$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \sin \frac{x}{7} dx = 2^{3y} dy \quad 2. \frac{1 - 4x^2}{e^{5y}} \frac{dy}{dx} = 2$$

$$3. \frac{ds}{dx} = (2 + s^2)x \quad 4. xy' - 5y = 3xy$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x - 6)y' = y + 3, \quad y(7) = -2$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4 \quad 2. y' = \frac{x - 5y}{x + 5y}$$

$$3. y' - \frac{y}{x+1} = x^2 \quad 4. xy' - 3y = x^4 \cos 3x$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y' \quad 2. 4y^3 y'' = y^4 - 1$$

VI. Решить задачу Коши $y'' \cos^3 x = \sin x$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' \cos^3 x = \sin x$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость изменения энергии тела равна массе тела.
2. Скорость изменения энергии тела пропорциональна массе тела.
3. Скорость изменения энергии тела обратно пропорциональна массе тела.
4. Изменение числа людей, знающих о рекламе, пропорционально числу тех, кто о ней знает и тем, кто о ней ничего не знает.

IX. Слиток металла с температурой 20° перед прокаткой положен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от 20° до 120° . Найти закон нагревания слитка, если при разности температур печи и слитка в T слиток нагревается со скоростью изменения температуры пропорциональной T . (Коэффициент пропорциональности k .)

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 1.2 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 1.3 $y'' - 4y' + 13y = 0$

1.4 $y'' + 2y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' + 4y' + 3y = e^{2x}$ 2.2 $y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$

2.3 $y'' - 4y' + 4y = 3x^2 - 4x$ 2.4 $y'' - 4y' + 13y = 2 \sin 4x + 5 \cos 4x$

3. Решите задачу Коши $y'' - 2y' = 4e^x$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' + y' = 2x - 3$ $y(0) = 2$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = -2p + 3s \\ \frac{ds}{dx} = 4p - s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = e^{x+x^2} + 2e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \sqrt{1+2x}dx = 3 \sin 3y dy \quad 2. (x+2) \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 4y$$

$$3. \frac{dv}{dt} = (5-v)^2 t^4 \quad 4. (x^2-3)y' + y^3 = xy^3$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y-2)y' = x+8, \quad y(-7) = 3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y \quad 2. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 2$$

$$3. y' + \frac{xy}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-4} \quad 4. xy' - 4y = x^4 e^{6x}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. xy'' + y' + x = 0 \quad 2. 2yy'' = -y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $y'' \sin^2 4x = 4$,
$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

VII. Решить краевую задачу $y'' \sin^2 4x = 4$,
$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{16}\right) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость падения тела равна высоте падения.
2. Скорость падения тела пропорциональна высоте падения.
3. Скорость падения тела обратно пропорциональна высоте падения.
4. Скорость полураспада вещества пропорциональна его количеству.

IX. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. Зная, что при прохождении через слой толщиной 3 м поглощается 0,7 первоначального светового потока. Определить, какой процент его дойдет до глубины 12 м.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 3y' = 0$ 1.2 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 1.3 $y'' - 6y' + 10y = 0$

1.4 $y'' + 3y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 3y' = 5 \sin 2x$ 2.2 $y'' - 3y' = 2x^2 - 4x + 1$

2.3 $y'' + 6y' + 9y = (2x - 3)e^{3x}$ 2.4 $y'' - 6y' + 10y = 3e^{2x}$

3. Решите задачу Коши $y'' + 4y = 2 \cos 4x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' - y' = 4x$ $y(0) = 0$, $y(1) = 4e$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \begin{cases} \frac{du}{ds} = 2u + 4v \\ \frac{dv}{ds} = -u - v \end{cases} \quad 5.2 \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = 5y + z \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \frac{4}{\cos x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \operatorname{ctg} 3x dx = 2 \cos 2y dy & 2. \quad 3y \frac{dy}{dx} = \cos^2 3x \\ 3. \quad \frac{du}{dy} = \sqrt{1-u^2} \cdot y^3 & 4. \quad y^2 y' + 2x = 2xy \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x+4)y' = y - 8, \quad y(-3) = 9$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} + 10 & 2. \quad y' = \frac{x+4y}{4x-y} \\ 3. \quad y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x & 4. \quad xy' + 6y = \frac{\cos x}{x^5} \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0 \quad 2. \quad yy'' + y^2 y' = y'^2$$

VI. Решить задачу Коши $(3x+2)^2 y'' = 3, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $(3x+2)^2 y'' = 3, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Растяжение тела равно приложенной силе.
2. Растяжение тела пропорционально приложенной силе.
3. Растяжение тела обратно пропорционально приложенной силе.
4. Скорость истечения жидкости пропорциональна уровню высоты истечения.

IX. В помещении цеха вместимостью 10800 м^3 воздух содержит $0,12\%$ углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий $0,04\%$ углекислоты, в количестве $a \text{ м}^3/\text{мин}$. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одна и таже (смешение чистого воздуха с загрязненным происходит немедленно), рассчитать какова должна быть мощность вентиляторов, чтобы через 10 мин содержание углекислоты не превышало $0,06\%$.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 3y' + 2y = 0$ **1.2** $y'' + 2y' + y = 0$ **1.3** $y'' - 2y' + 5y = 0$

1.4 $y'' + 5y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 3y' + 2y = (x - 4)e^{4x}$ **2.2** $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

2.3 $y'' + 2y' + y = 5 \sin 3x - 2 \cos 3x$ **2.4** $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$

3. Решите задачу Коши $y'' - 9y' + 18y = 2e^x$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

4. Решите краевую задачу $y'' + 9y = 4 - 2x$ $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = u - 7v \\ \frac{dv}{ds} = -4u + 4v \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = -2p + 8s \\ \frac{ds}{dx} = 2p + 4s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \sqrt{x^2 - x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. (1 - y)^2 dy = \frac{dx}{4 + x^2} \quad 2. y(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = x(y - 1)$$

$$3. \frac{dr}{dx} = x(3r - 4) \quad 4. (x + 1)y' - y = 4xy$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y + 1)y' = x + 2, \quad y(-1) = 0$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y \quad 2. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$$

$$3. y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad 4. (x + 2)y' - y = x^2 + 2x$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. xy'' + y' = \sqrt{x} \quad 2. y'' = 128y^3$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - x^3 = x^2$, $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - x^3 = x^2$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(2) = 3 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Изменение прибыли равно объему капиталовложений.
2. Изменение прибыли пропорционально объему капиталовложений.
3. Изменение прибыли обратно пропорционально объему капиталовложений.
4. Скорость тела пропорциональна квадратному корню из величины пройденного пути.

IX. При исследовании роста информационных потоков исходят из предположения, что скорость роста публикаций пропорциональна достигнутому уровню числа публикаций. Найти закон, определяющий достигнутый уровень числа публикаций. При относительной скорости роста числа публикаций в 7% через сколько лет удвоится число публикаций ?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' + 4y' = 0$ **1.2** $y'' - 14y' + 49y = 0$ **1.3** $y'' - 6y' + 25y = 0$

1.4 $y'' + 6y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' + 4y' = (3x + 5)e^{2x}$ **2.2** $y'' + 4y' = 4x^2 - 3x + 2$

2.3 $y'' - 14y' + 49y = 2 \cos 2x$ **2.4** $y'' - 6y' + 25y = 2e^{3x}$

3. Решите задачу Коши $y'' + 9y = 2 \sin 2x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

4. Решите краевую задачу $y'' - 2y' = 4x - 5$ $y(0) = 2$, $y(1) = 4e^2$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y - z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + z \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = -2u + 4v \\ \frac{dv}{ds} = 5u - v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' + y = \cos x$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{xdx}{x^2 - 1} = e^{2-y}dy & 2. y \frac{dy}{dx} = \frac{y + 5}{x^2 + 1} \\ 3. \frac{dt}{dx} = \sqrt{(4-t)x} & 4. 3y' + x^2 = 3x^2y \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x - 6)y' = y + 2, \quad y(7) = -1$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 3 & 2. y' = \frac{x - 5y}{5x + y} \\ 3. y' - \frac{y}{x} = x^6 & 4. xy' + y = \frac{e^{3x}}{x} \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. y'' \operatorname{tg} x = y' + 1 \quad 2. y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - e^{3x} = 1$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - e^{3x} = 1$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент нормали к кривой равен кубу абсциссы точки пересечения нормали и кривой.
2. Угловой коэффициент нормали к кривой пропорционален кубу абсциссы точки пересечения нормали и кривой.
3. Угловой коэффициент нормали к кривой обратно пропорционален кубу абсциссы точки пересечения нормали и кривой.
4. Ослабление интенсивности излучения пропорционально количеству поглощенного излучения.

IX. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором OM любой точки $M(x, y)$ кривой, касательной MP в этой точке и осью Ox , равна 2. Кривая проходит через точку $A(2; -2)$. Найти ее уравнение.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 5y' + 6y = 0$ **1.2** $y'' - 8y' + 16y = 0$ **1.3** $y'' + 8y' + 20y = 0$

1.4 $y'' + 7y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 5y' + 6y = 6e^{4x}$ **2.2** $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$

2.3 $y'' - 8y' + 16y = 3 \sin 4x$ **2.4** $y'' + 8y' + 20y = x - 4x^2$

3. Решите задачу Коши $y'' - 5y' = 4e^{2x}$ $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' + 36y = x - 1$ $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 2y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 3p + 2s \\ \frac{ds}{dx} = p + 2s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \ln(e^x + 4)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = e^{x-y}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad \operatorname{tg} 4y dy = \frac{dx}{\sqrt{16 - 4x^2}} \quad 2. \quad x^2 \frac{dy}{dx} = y(x^2 + 1)$$

$$3. \quad \frac{dp}{dt} = (p + 1)^6 t^4 \quad 4. \quad (y^2 - 1)y' - x^3 = yx^3$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 5)y' = x + 4, \quad y(-3) = 6$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y \quad 2. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 4$$

$$3. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 5x}{x} \quad 4. \quad xy' + 4y = x^8$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad \operatorname{ctg} x \cdot y'' - y' = \frac{1}{\cos x} \quad 2. \quad 5y'' = y' (1 + y'^2)$$

VI. Решить задачу Коши $y'' \cos^2 2x = 2$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, 5 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' \cos^2 2x = 2$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент касательной к кривой равен квадрату абсциссы точки пересечения касательной и кривой.
2. Угловой коэффициент касательной к кривой пропорционален квадрату абсциссы точки пересечения касательной и кривой.
3. Угловой коэффициент касательной к кривой обратно пропорционален квадрату абсциссы точки пересечения касательной и кривой.
4. Скорость полураспада вещества пропорциональна его количеству.

IX. В цепи с индуктивностью идет переходный процесс. Индуктивность равна 1 Генри, а активное сопротивление равно 2 Ом. Напряжение $u(t) = te^{-2t}$. Начальный ток $I_0 = 3A$. Определить зависимость тока I от времени.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 9y = 0$ 1.2 $y'' - 10y' + 25y = 0$ 1.3 $y'' + 4y' + 5y = 0$

1.4 $y'' + 8y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 9y = (4x + 3)e^{2x}$ 2.2 $y'' - 9y = 4e^{-3x}$

2.3 $y'' - 10y' + 25y = 2x^2 - 5$ 2.4 $y'' + 4y' + 5y = 3 \sin 3x - \cos 3x$

3. Решите задачу Коши $y'' + 16y = 4 \cos 3x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' - 6y' = 1 - 5x$ $y(0) = 0$, $y(1) = 3e^6$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases} \quad 5.2 \begin{cases} \frac{du}{dx} = 5u + 3v \\ \frac{dv}{dx} = u + v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = x(4 - \ln x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{y - x}{x}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{\ln^y dy}{y} = e^{3x} dx \quad 2. \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^2 - 2}$$

$$3. \frac{ds}{dt} = \sqrt{9 - s^2} \cdot t^2 \quad 4. yy' - x = xy^2$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x - 3)y' = y - 5, \quad y(4) = 6$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. y' = \frac{y^2}{x^2} - 4\frac{y}{x} + 6 \quad 2. 5xyy' = 6x^2 + 4y^2$$

$$3. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x \quad 4. (x + 3)y' - 6y = (x + 3)^6$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. -xy'' + 2y' = \frac{2}{x^2} \quad 2. y'' = \frac{2y'^2}{2y + 3}$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - \cos 4x = 0$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - \cos 4x = 0$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

- Угловой коэффициент нормали к кривой равен корню квадратному из ординаты точки пересечения нормали и кривой.
- Угловой коэффициент нормали к кривой пропорционален корню квадратному из ординаты точки пересечения нормали и кривой.
- Угловой коэффициент нормали к кривой обратно пропорционален корню квадратному из ординаты точки пересечения нормали и кривой.
- Изменение числа людей, знающих о сенсации, пропорционально числу тех, кто знает, и числу тех, кто не знает о ней.

IX. Найти семейство кривых, у которых подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания (подкасательная - отрезок оси Ox , являющийся проекцией отрезка касательной от точки касания до точки пересечения касательной с осью Ox).

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 8y' + 7y = 0$ 1.2 $y'' - 16y' + 64y = 0$ 1.3 $y'' + 4y' + 29y = 0$

1.4 $y'' + 2y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 8y' + 7y = 4e^{-x}$ 2.2 $y'' - 8y' + 7y = 3e^x$

2.3 $y'' - 16y' + 64y = 3x^2 - 4x$ 2.4 $y'' + 4y' + 29y = 4 \cos 3x - 2 \sin 3x$

3. Решите задачу Коши $y'' - y = 2e^{3x}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

4. Решите краевую задачу $y'' + 25y = 3x - 8$ $y(0) = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 1$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 7y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = 4u - 2v \\ \frac{dv}{ds} = 3u + 9v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = -\frac{1}{3x+5}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 3y^2$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. & ydy = \frac{dx}{1-x} \\ 2. & \ln y \frac{dy}{dx} = y \sin 3x \\ 3. & \frac{dz}{dt} = (7-2z)^2 t^2 \\ 4. & (x^2+3)y' - y^4 = xy^4 \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y+4)y' = x-5, \quad y(6) = -3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. & y' = \frac{3x+y}{x-3y} \\ 2. & 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 9 \\ 3. & y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos 2x \\ 4. & xy' + 8y = \frac{4}{x^7} \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 2. \quad yy'' = -(yy' + y'^2)$$

VI. Решить задачу Коши $y'' = \sin \frac{x}{4}, \quad \begin{cases} y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0, 25 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' = \sin \frac{x}{4}, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(3\pi) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Прирост населения равен его количеству.
2. Прирост населения пропорционален его количеству.
3. Изменение количества кислорода в комнате обратно пропорционально количеству людей в комнате.
4. Работа газа при сжатии пропорциональна давлению газа.

IX. В баке находится 80 л раствора, содержащего 60 г вещества А. В каждую минуту в бак вливается 4 л воды и вытекает 3 л раствора. Концентрация раствора, т.е. количество вещества в 1 л раствора, поддерживается постоянной. Сколько вещества А останется в баке через 30 мин?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 6y' + 8y = 0$ **1.2** $y'' + 12y' + 36y = 0$ **1.3** $y'' - 4y' + 13y = 0$

1.4 $y'' + 3y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 6y' + 8y = (2x - 5)e^{5x}$ **2.2** $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}$

2.3 $y'' + 12y' + 36y = \cos 4x - 2 \sin 4x$ **2.4** $y'' - 4y' + 13y = 2x - x^2$

3. Решите задачу Коши $y'' + 49y = 2 \sin x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

4. Решите краевую задачу $y'' - 8y' = 8x + 4$ $y(0) = 0$, $y(1) = e^8$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2z + 3y \\ \frac{dy}{dx} = z + 4y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 8y \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \frac{2}{\cos x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{3dx}{9-x^2} = \frac{dy}{\sqrt{y^2+2}} \quad 2. \quad 3^{-3x} \frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}$$

$$3. \frac{dt}{dx} = 2x \operatorname{ctg} t \quad 4. \quad y' - \sqrt{y} = 2x\sqrt{y}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x-7)y' = y+8, \quad y(8) = -7$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 1 \quad 2. \quad xy' = x \cos^2 \frac{y}{x} + y$$

$$3. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos x \quad 4. \quad xy' - 5y = x^6$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x \quad 2. \quad y^3y'' + 64 = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - e^{3x} = 2$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - e^{3x} = 2$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Сила трения равна пройденному пути.
2. Сила трения пропорциональна пройденному пути.
3. Сила трения обратно пропорциональна пройденному пути.
4. Скорость изменения температуры пропорциональна потоку тепла.

IX. Тело находится в среде с постоянной температурой $T = 20^\circ\text{C}$. За 10 минут в результате охлаждения температура тела понизилась от 60°C до 40°C . За какое время с начала охлаждения температура тела понизится до 30°C ? (По закону Ньютона величина охлаждения ΔT пропорциональна времени охлаждения и разности температур тела и среды).

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 5y' = 0$ **1.2** $y'' + 6y' + 9y = 0$ **1.3** $y'' - 6y' + 10y = 0$

1.4 $y'' + 5y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 5y' = 2 \cos 5x$ **2.2** $y'' - 5y' = 5x^2 - 2x + 3$

2.3 $y'' + 6y' + 9y = 2e^{3x}$ **2.4** $y'' - 6y' + 10y = 4 \sin x + 2 \cos x$

3. Решите задачу Коши $y'' + 64y = 4 \sin 4x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' - y' = 2 - 4x$ $y(0) = 0$, $y(1) = 6e$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = 5x + y \\ \frac{dy}{ds} = 3x + 7y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 4y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = y + 7z \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = -\frac{1}{3x+4}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 3y^2$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \sin^2 3y dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} & 2. \quad x^2 \frac{dy}{dx} = 4y^2 + 1 \\ 3. \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x \ln p} & 4. \quad (x^2 + 1)y' - x^2 = x^2 y \end{array}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 4)y' = x + 2, \quad y(-1) = 5$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad y' = \frac{x-y}{x+y} & 2. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} - 5\frac{y}{x} + 12 \\ 3. \quad xy' + 2y = x^4 & 4. \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2 \end{array}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad (x+1)y'' + y' = x+1 \quad 2. \quad y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - 4x^3 = 2x$, $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - 4x^3 = 2x$, $\begin{cases} y(3) = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость тела равна квадрату пройденного пути.
2. Скорость тела пропорциональна квадрату пройденного пути.
3. Скорость тела обратно пропорциональна квадрату пройденного пути
4. Плотность тела обратно пропорциональна объему, занимаемому телом.

IX. Наполненный водой цилиндр высотой 2 м и площадью дна $0,6 \text{ м}^2$ имеет в дне отверстие площадью $0,1 \text{ м}^2$. Определить время полного истечения воды через отверстие. (Скорость истечения воды $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота слоя в данный момент времени.)

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 6y' + 5y = 0$ 1.2 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 1.3 $y'' + 4y' + 8y = 0$

1.4 $y'' + 6y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 6y' + 5y = (4x - 1)e^{2x}$ 2.2 $y'' - 6y' + 5y = 3e^{-x}$

2.3 $y'' - 4y' + 4y = 4x - 6x^2$ 2.4 $y'' + 4y' + 8y = 2 \sin 4x + \cos 4x$

3. Решите задачу Коши $y'' - 2y' = 6e^x$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

4. Решите краевую задачу $y'' + y = 4x - 5$ $y(0) = 3$, $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

5.2
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 3p + 2s \\ \frac{ds}{dx} = -p + 6s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = x\sqrt{1-x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $yy' = x - 2x^3$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos 4x dx &= \frac{dy}{y^2} & 2. \quad 2xy \frac{dy}{dx} &= \frac{y+1}{x-1} \\ 3. \quad \frac{dz}{dt} &= \sqrt{(1-2z)^3} t^4 & 4. \quad y^2 y' - 4 \cos x &= y \cos x \end{aligned}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x-3)y' = y+4, \quad y(4) = -3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad y' &= \frac{y^2}{x^2} - 4\frac{y}{x} - 5 & 2. \quad 2xyy' &= 3x^2 + 4y^2 \\ 3. \quad x^3 y' - x^2 y &= -12 & 4. \quad y' + 6\frac{y}{x} &= x^{-6} e^{2x} \end{aligned}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad x^3 y'' + x^2 y' = \sqrt{x} \quad 2. \quad y'' = 98y^3$$

VI. Решить задачу Коши $y'' \cos^2 3x = 2$, $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' \cos^2 3x = 2$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Градиент температуры в точке равен расстоянию от точки до оси ординат.
2. Градиент температуры в точке пропорционален расстоянию от точки до оси ординат.
3. Градиент температуры в точке обратно пропорционален расстоянию от точки до оси ординат.
4. Прирост населения пропорционален его численности.

IX. В цилиндрическом сосуде объемом 10 л атмосферный воздух адиабатически (без обмена теплоты с окружающей средой) сжимается до объема 4 л. Вычислить работу сжатия. (Работа пропорциональна площади поперечного сечения и давлению вдоль направления сжатия. Закон Пуассона:

$$P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^k, \quad \text{где } k = \frac{1}{4}. \quad \text{Атмосферное давление} - 1033 \text{ н/м}^2 \text{ .)}$$

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 7y' + 10y = 0$ **1.2** $y'' - 12y' + 36y = 0$ **1.3** $y'' - 4y' + 20y = 0$

1.4 $y'' + 7y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 7y' + 10y = 3e^{3x}$ **2.2** $y'' - 7y' + 10y = 4e^{5x}$

2.3 $y'' - 12y' + 36y = 2 \cos 4x - \sin 4x$ **2.4** $y'' - 4y' + 20y = 3x - 2x^2$

3. Решите задачу Коши $y'' + 81y = 2 \sin 2x$ $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' - 3y' = 6x - 3$ $y(0) = 0$, $y(1) = 2e^3$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y + z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 6z \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = 8u + 2v \\ \frac{dv}{ds} = -u + 5v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \ln(e^x + 2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = e^{x-y}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y^4 dy = \frac{dx}{1+4x} \quad 2. \quad e^{-3x} \frac{dy}{dx} = 3^{2y}$$

$$3. \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\ln^2 t}{st} \quad 4. \quad (x^2 + 9)y' + \sqrt{y} = x\sqrt{y}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 2)y' = x - 1, \quad y(2) = 3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y' = \frac{6x + y}{y - 6x} \quad 2. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 6$$

$$3. \quad y' + \frac{7y}{x} = \frac{1}{x^7 \sin^2 x} \quad 4. \quad (x + 1)y' - 8y = (x + 1)^9$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad x^4 y'' + x^3 y' = 4 \quad 2. \quad y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - \sin 4x = 0$, $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - \sin 4x = 0$, $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость изменения энергии тела равна массе тела.
2. Скорость изменения энергии тела пропорциональна массе тела.
3. Скорость изменения энергии тела обратно пропорциональна массе тела.
4. Изменение числа людей, знающих о рекламе, пропорционально числу тех, кто о ней знает и тем, кто о ней ничего не знает.

IX. Вещество А преобразуется в вещество В в ходе химической реакции со скоростью, пропорциональной количеству непрореагировавшего вещества. Количество А через 1 час после начала реакции равно 10 г, а через 2 часа — $1\frac{2}{5}$ г. Сколько вещества А было в начале реакции? Через какое время после начала реакции от вещества А останется 2% ?

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 8y' + 15y = 0$ 1.2 $y'' + 2y' + y = 0$ 1.3 $y'' - 2y' + 10y = 0$

1.4 $y'' + 8y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 8y' + 15y = (5 - 3x)e^{2x}$ 2.2 $y'' - 8y' + 15y = 4e^{3x}$

2.3 $y'' + 2y' + y = 5x^2 - 2x + 4$ 2.4 $y'' - 2y' + 10y = 3 \cos 2x - \sin 2x$

3. Решите задачу Коши $y'' - 9y' + 20y = 4e^x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' + 9y = 6x$ $y(0) = 0$, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \begin{cases} \frac{du}{ds} = u + 5v \\ \frac{dv}{ds} = -u + 7v \end{cases} \quad 5.2 \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 3p + s \\ \frac{ds}{dx} = -3p + 7s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \frac{1+x}{1-x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{dy}{\sin^2 5y} = 3 \cos 5x dx \quad 2. \quad 3^{3-2x} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2y}$$

$$3. \frac{dx}{dt} = (2-x)^3 t^3 \quad 4. \quad \operatorname{tg} xy' + \sin x = y^2 \sin x$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x-4)y' = y-6, \quad y(5) = 7$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 2 \quad 2. \quad xy' - y = x \cos^2 \frac{2y}{x}$$

$$3. \quad y' - 9y = e^{9x} \quad 4. \quad xy' + y = 3x^2$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad -xy'' + 2y' \frac{2}{x^2} \quad 2. \quad y^3 y'' + 25y = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y'' = \sin \frac{x}{4}, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' = \sin \frac{x}{4}, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Угловой коэффициент нормали к кривой равен абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
2. Угловой коэффициент нормали к кривой пропорционален абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
3. Угловой коэффициент нормали к кривой обратно пропорционален абсциссе точки пересечения нормали и кривой.
4. Ослабление интенсивности излучения пропорционально количеству поглощенного излучения.

IX. Сверло, двигаясь со скоростью 5 м/с, пробивает стену толщиной 20 см и выходит из нее со скоростью 2 м/с. Найти время движения сверла в стене, если сила сопротивления стены пропорциональна квадрату скорости движения сверла.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 8y' + 12y = 0$ **1.2** $y'' + 16y' + 64y = 0$ **1.3** $y'' - 8y' + 17y = 0$

1.4 $y'' + 2y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 8y' + 12y = 5e^{4x}$ **2.2** $y'' - 8y' + 12y = 2e^{2x}$

2.3 $y'' + 16y' + 64y = 3 \sin 2x$ **2.4** $y'' - 8y' + 17y = 4x^2 - 5x + 3$

3. Решите задачу Коши $y'' - 5y' = 2e^{4x}$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' + 36y = 1 - x$ $y(0) = 2$, $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = 6u + 3v \\ \frac{dv}{dx} = -u + 2v \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = x(1 - \ln x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{y - x}{x}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad 8\sqrt[4]{x}dx = \frac{dy}{9 - 36y^2} \quad 2. \quad e^{2x}\frac{dy}{dx} = 1 - 2y$$

$$3. \quad \frac{du}{ds} = \sqrt{(2 + u)^4} \cdot s^2 \quad 4. \quad (x^2 + 5)y' - y^2 = xy^2$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y - 5)y' = x + 3, \quad y(-2) = 6$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y' = \frac{4x - y}{x - 4y} \quad 2. \quad 5y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 1$$

$$3. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2} \quad 4. \quad xy' - 3y = x^3 \sin 2x$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad \operatorname{ctg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\cos x} \quad 2. \quad y'' = 8y^3$$

VI. Решить задачу Коши $y'' - 4x = 9 \cos 3x$, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' - 4x = 9 \cos 3x$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Скорость падения тела равна высоте падения.
2. Скорость падения тела пропорциональна высоте падения.
3. Скорость падения тела обратно пропорциональна высоте падения.
4. Скорость полураспада вещества пропорциональна его количеству.

IX. Слиток металла с температурой 25° перед прокаткой положен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от 30° до 130° . Найти закон нагревания слитка, если при разности температур печи и слитка в T слиток нагревается со скоростью изменения температуры пропорциональной T . (Коэффициент пропорциональности k .)

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 7y' + 10y = 0$ **1.2** $y'' + 12y' + 36y = 0$ **1.3** $y'' - 14y' + 50y = 0$

1.4 $y'' + 3y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 7y' + 10y = (2x - 1)e^{3x}$ **2.2** $y'' - 7y' + 10y = 4e^{2x}$

2.3 $y'' + 12y' + 36y = 2 \sin 3x + 6 \cos 3x$ **2.4** $y'' - 14y' + 50y = 5e^{3x}$

3. Решите задачу Коши $y'' + 16y = 4 \cos 6x$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' - 6y' = 2x + 4$ $y(0) = 0$, $y(1) = 2e^6$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 3p + 2s \\ \frac{ds}{dx} = p + 4s \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' \sin x = y \ln y$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos 2x dx &= \frac{dy}{4 - y^2} & 2. \quad 2y \frac{dy}{dx} &= \frac{9 + 4y^2}{\sin^2 4x} \\ 3. \quad \frac{dy}{dt} &= \sqrt[6]{y + 1} t^2 & 4. \quad y' - x &= 4xy \end{aligned}$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(x - 7)y' = y - 2, \quad y(8) = 3$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad y' &= \frac{y^2}{x^2} - 8\frac{y}{x} + 20 & 2. \quad y' &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ 3. \quad y' + 3y &= e^{-3x} & 4. \quad (x + 1)y' - 2y &= (x + 1)^4 \end{aligned}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \quad y'' \operatorname{tg} 5x = 5y' \quad 2. \quad y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$$

VI. Решить задачу Коши $y'' = e^{3x} - x$, $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y'' = e^{3x} - x$, $\begin{cases} y(0) = 4 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Растяжение тела равно приложенной силе.
2. Растяжение тела пропорционально приложенной силе.
3. Растяжение тела обратно пропорционально приложенной силе.
4. Скорость истечения жидкости пропорциональна уровню высоты истечения.

IX. Найти семейство кривых, у которых подкасательная равна сумме удвоенной абсциссы и ординаты точки касания (подкасательная — отрезок оси Ox , являющийся проекцией отрезка касательной от точки касания до точки пересечения касательной с осью Ox).

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 9y' + 20y = 0$ **1.2** $y'' + 14y' + 49y = 0$ **1.3** $y'' - 10y' + 29y = 0$

1.4 $y'' + 5y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 9y' + 20y = (2x - 3)e^{2x}$ **2.2** $y'' - 9y' + 20y = 4e^{4x}$

2.3 $y'' + 14y' + 49y = 2x^2 - 4x$ **2.4** $y'' - 10y' + 29y = 4 \cos 3x + 3 \sin 3x$

3. Решите задачу Коши $y'' + 49y = 7 \sin 2x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Решите краевую задачу $y'' - 8y' = 4x - 8$ $y(0) = 0$, $y(1) = 2e^8$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

$$5.1 \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = 5z + 4y \\ \frac{dy}{dx} = 3z + 6y \end{cases} \quad 5.2 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y \end{cases}$$

I. Показать, что функция $y = \operatorname{tg} \ln 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{1 + y^2}{x}$.

II. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. \sqrt{y-2}dy = \frac{dx}{3-x} \quad 2. x^{-4}\frac{dy}{dx} = (y+2)^2$$

$$3. \frac{ds}{dx} = \sqrt[3]{s+1}\sqrt{x} \quad 4. (x-2)y' - y^2 = xy^2$$

III. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

$$(y-4)y' = x+6, \quad y(-5) = 5$$

IV. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1. xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y \quad 2. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 8$$

$$3. y' + 2xy = xe^{-x^2} \quad 4. y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3}$$

V. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

$$1. xy'' + y' = x + 2 \quad 2. y'' + 50 \sin^3 y \cos y = 0$$

VI. Решить задачу Коши $y''(4x-1)^2 = 2, \quad \begin{cases} y(0,5) = 1 \\ y'(0,5) = 0 \end{cases}$

VII. Решить краевую задачу $y''(4x-1)^2 = 2, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(0,5) = 2 \end{cases}$

VIII. На основании условия составить дифференциальное уравнение:

1. Изменение прибыли равно объему капиталовложений.
2. Изменение прибыли пропорционально объему капиталовложений.
3. Изменение прибыли обратно пропорционально объему капиталовложений.
4. Скорость тела пропорциональна квадратному корню из величины пройденного пути.

IX. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором OA любой точки $A(x, y)$ кривой, касательной AB в этой точке и осью Ox , равна 3. Кривая проходит через точку $C(3; -3)$. Найти ее уравнение.

Х. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решите уравнения:

1.1 $y'' - 9y' + 8y = 0$ 1.2 $y'' + 16y' + 64y = 0$ 1.3 $y'' - 6y' + 34y = 0$

1.4 $y'' + 6y = 0$

2. Решите уравнения:

2.1 $y'' - 9y' + 8y = 2e^{-x}$ 2.2 $y'' - 9y' + 8y = 2e^{8x}$

2.3 $y'' - 16y' + 64y = 4x^2 - 3x$ 2.4 $y'' - 6y' + 34y = 4 \cos 2x - 5 \sin 2x$

3. Решите задачу Коши $y'' - y = 5e^{4x}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

4. Решите краевую задачу $y'' + 100y = 6x - 2$ $y(0) = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{20}\right) = 0$

5. Решите (двумя способами) системы дифференциальных уравнений:

5.1
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$$
 5.2
$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = 6u + 5v \\ \frac{dv}{ds} = u + 2v \end{cases}$$
