Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$\boxed{\textbf{Alt}}$ $\boxed{\rightarrow}$

Бидерман В. И.

Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 7.

Линии и поверхности второго порядка

§ 7.1. Линии второго порядка на плоскости

Из предыдущей лекции известно, что уравнение $F(x,\, y) = 0$ определяет некоторую линию в декартовой плоскости. Поэтому логично линии определять исходя из класса уравнений. В курсе алгебры уравнения принято подразделять на алгебраические и трансцендентные. Нас будут интересовать только алгебраические уравнения, которые определяются как уравнения n-го порядка в соответствии с наибольшим порядком степени одночленов, входящих в уравнение. Согласно этому изученное нами уравнение прямой является *алгебраическим уравнением первого порядка.*

Чтобы продвинуться дальше, введём

Определение 7.1. *Линия на координатной плоскости, которая определяется алгебраическим уравнением второго порядка*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7.1}$$

(здесь A, B, C, D, E, F – действительные числа), называется *линией или кривой второго порядка* .

В зависимости от отношений между коэффициентами уравнения (7.16) существует следующая

§ 7.2. Классификация линий второго порядка на плоскости

В нашем курсе мы будем предполагать[1], что коэффициент $B = 0$. То есть, далее мы будем считать, что оси симметрий линий второго порядка параллельны осям координат.

Зная коэффициенты уравнения можно установить, что:

1. Если $A = C$, то линия является *окружностью.*
2. Если $A \cdot C > 0$ и $A \neq C$, то линия является *эллипсом.*
3. Если $A \cdot C < 0$, то линия является *гиперболой.*
3. Если $A \cdot C = 0$ при $A^2 + C^2 \neq 0$, то линия является *параболой.*

Примеры.

1. $4x^2 + 3y^2 - 6x + 9y - 5 = 0$ – эллипс, так как $A = 4$, $C = 3$, поэтому

[1] Мы также не будем рассматривать случаи, когда линии второго порядка вырождаются в прямые.

$A \cdot C = 4 \cdot 3 = 12 > 0$.

2. $8x - 7y - 2x^2 - 2y^2 + 4 = 0$ – окружность, так как $A = C = -2$.
3. $x^2 - 4y^2 + 8x - 12y + 14 = 0$ – гипербола, так как $A = 1$, $C = -4$, поэтому $A \cdot C = 1 \cdot (-4) = -4 < 0$.
4. $6y^2 - 12x + 24y - 5 = 0$ – парабола, так как $A = 0$, $C = 6$, поэтому $A \cdot C = 0 \cdot 4 = 0$ (Так как $C \neq 0$, то $A^2 + C^2 = 0^2 + 4^2 \neq 0$).

Рассмотрим каждый из указанных типов линий.

§ 7.3. Окружность

Из школьной программы известно

Определение 7.2. *Множество точек плоскости, равноудалённых от фиксированной точки на заданное расстояние, называется окружностью.*

При этом фиксированная точка называется *центром окружности*, а заданное расстояние – *радиусом окружности.*

Выберем декартову систему координат. Зафиксируем в ней точку M_o с координатами $(x_o; y_o)$ (см. Рис.7.1). Предположим, что радиус окружности R. Считая, что $M(x;y)$ – произвольная точка окружности, согласно определению (7.2), напишем уравнение

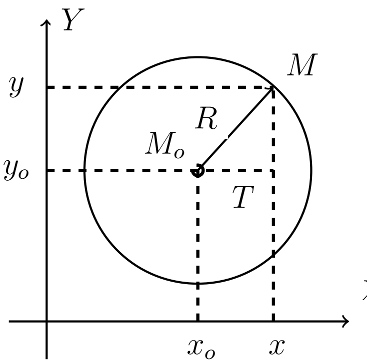


Рис. 7.1

$$|M_oM| = R. \qquad (7.2)$$

Из прямоугольного треугольника M_oTM согласно теореме Пифагора следует, что

$$|M_oT|^2 + |TM|^2 = |M_oM|^2.$$

Так как $|M_oT| = x - x_o$, $|TM| = y - y_o$ то, из (7.2) получим

Уравнение окружности с центром в точке $\mathbf{M}_o(x_o; y_o)$ радиуса R

$$\boldsymbol{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2}. \qquad (7.3)$$

В том случае, когда точка M_o совпадает с началом координат, уравнение окружности называется *каноническим уравнением окружности* и выглядит так:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2}. \qquad (7.4)$$

§ 7.4. Эллипс

Предположим, что $2a$ – некоторое положительное число, а F_1 и F_2 – две точки на плоскости, расстояние между которыми равно $2c$ ($c > 0$).

Определение 7.3. *Множество M точек плоскости, сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$, называется эллипсом.* Точки F_1 и F_2 называются *фокусами эллипса.*

Из данного определения вытекает практический способ построения эллипса. Зафиксируем на расстоянии $2c$ точки F_1 и F_2. Закрепим с помощью двух иголок нерастяжимую нить длиной $2a$ в точках F_1 и F_2. Очевидно, что это возможно только в случае, когда[1] $a > c$. Натянув нить карандашом, начертим линию, которая и является эллипсом, согласно определению (7.2).

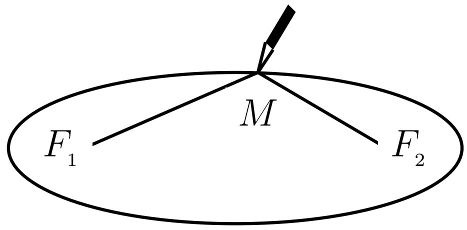


Рис. 7.2

Попробуем, пользуясь данным алгоритмом построения эллипса, получить его уравнение в некоторой связанной с эллипсом системе координат.

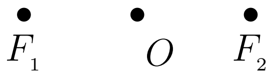


Рис. 7.3

Для этого отметим на расстоянии $2c$ друг от друга две точки: F_1 и F_2. А затем, разделив отрезок F_1F_2 пополам, отметим его середину точкой O.

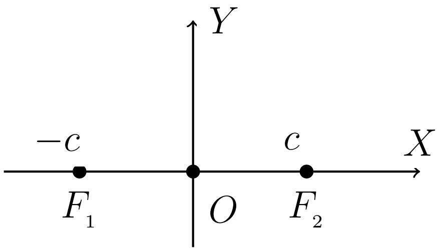


Рис. 7.4

Далее, проведём через точки F_1 и F_2 прямую, которую выберем за ось абцисс с центром в точке O. Через ту же точку O проведём прямую, перпендикулярную оси OX, выбрав её за ось ординат с центром в той же точке.

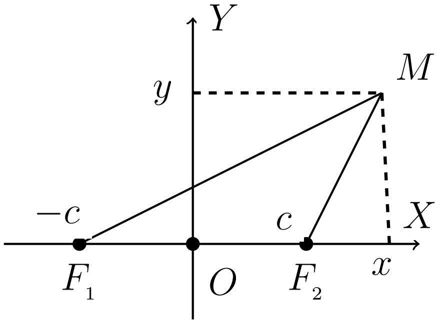


Рис. 7.5

Допустим, что точка M – произвольная точка эллипса имеет в построенной системе координаты x и y. Из определения (7.3) следует, что

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \qquad (7.5)$$

Используя формулу расстояния между точками в декартовой системе

[1] Если же $a = c$, то эллипс превращается в отрезок F_1F_2. В случае, когда $c = 0$, Точки F_1 и F_2 совпадают, и эллипс превращается в окружность радиуса a.

координат, найдем

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ и } |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (7.5), получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Так как данное уравнение имеет страшный вид, чтобы его упростить, попытаемся его преобразовать.

Вычтем правый корень из обеих частей уравнения, а затем возведём обе части в квадрат:

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Приведём подобные члены и, прибавив выражение с корнем к обеим частям, разделим обе части на 4.

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc.$$

Возведём обе части нового уравнения в квадрат и раскроем все скобки в левой и правой части:

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Приведя подобные члены, перегруппируем оставшиеся члены уравнения следующим образом:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Учитывая симметричный вид эллипса (см. Рис. (7.3)), сделаем уравнение симметричным с помощью замены[1]

$$b^2 = a^2 - c^2 : \tag{7.6}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Так как $a \neq 0$ и $b \neq 0$, разделим обе части на $a^2b^2 \geq 0$:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}. \tag{7.7}$$

Уравнение (7.7) называется *каноническим уравнением эллипса в данной системе координат.*

Построим график канонического уравнения и определим геометрический смысл его коэффициентов.

[1]То, что $a^2 - c^2 > 0$, следует из ограничения $a > c$.

Из уравнения следует $((-y)^2 = y^2,\ (-x)^2 = x^2)$, что эллипс симметричен относительно осей координат. Подставляя поочерёдно $x = 0$ и $y = 0$, определим точки пересечения графика с осями координат:

$A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; -b)$, $D(0; b)$. – Найденные точки называются *вершинами эллипса*. Число a называется *большой полуосью эллипса*, а число $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ – его *малой полуосью*.

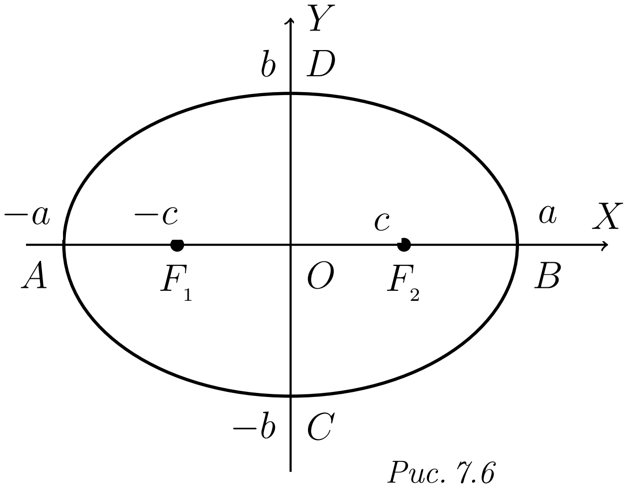


Рис. 7.6

Таким, образом, зная каноническое уравнение эллипса, можно построить его схематический график. А по виду графика определить его каноническое уравнение.

Задача 7.1. Привести уравнение $4x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ к каноническому виду и построить схематический чертёж.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны соответственно $A = 4$ и $C = \dfrac{1}{9}$, то $A \cdot C = 4 \cdot \dfrac{1}{9} > 0$. Поэтому данное уравнение является уравнением эллипса. Чтобы написать его каноническое уравнение, нужно коэффициент $A = 4$ представить с помощью обыкновенной дроби.

Зная, что $4 = \dfrac{1}{\frac{1}{4}}$, получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Из которого следует, что $a^2 = \dfrac{1}{4}$, а $b^2 = 9$. Поэтому длины полуосей равны $a = 0,5$ и $b = 3$. Так как уравнение каноническое, то центром эллипса является центр декартовой системы координат.

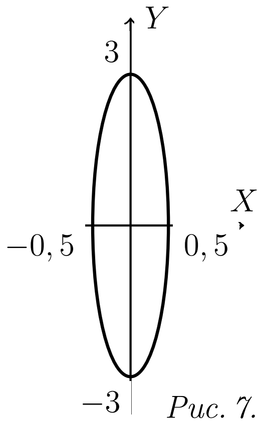


Рис. 7.7

Задача 7.2. Определить по данному чертежу каноническое уравнение эллипса.

Решение. Так как $a = 4$, а $b = 3$, то $a^2 = 16$, а $b^2 = 9$. Поэтому, согласно (7.7) уравнение имеет вид: $\boxed{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$.

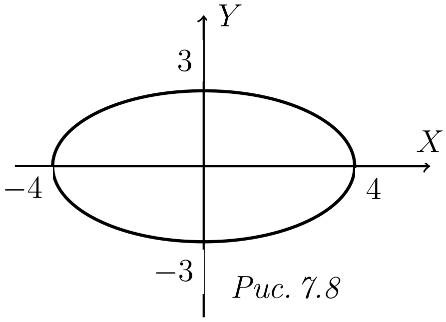


Рис. 7.8

В экономической теории эллипсы встречаются при изучении так называемых *кривых безразличия*, когда изучается график идеального потребительского набора, максимально удовлетворяющего «запросы» потребителя.

§ 7.5. Гипербола

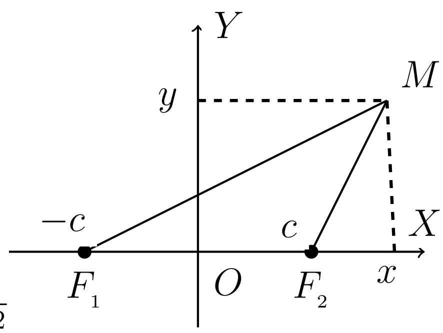
Как и в случае с эллипсом, предположим, что $2a$ — некоторое положительное число, а F_1 и F_2 — две точки на плоскости, расстояние между которыми равно $2c$ $(c > 0)$.

Определение 7.4. *Множество M точек плоскости, разность расстояний от которых до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$, называется гиперболой.* Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*

Найдём каноническое уравнение гиперболы. Для этого, воспользуемся рисунками (7.3)-(7.5) и составленным с их помощью уравнением эллипса (7.5). Из определений (7.3) и (7.4) следует, что изменив в уравнении (7.5) «+» на «−», мы получим уравнение гиперболы[1]

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a. \tag{7.8}$$

Для дальнейших действий нам ещё раз понадобится рисунок 7.5: Согласно неравенству треугольника разность длин двух сторон треугольника меньше длины третьей его стороны. Поэтому из треугольника F_1F_2M следует, что $2a < 2c$, а значит $a < c$.



Также, как и в случае с эллипсом, зная, что

$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

подставим эти значения в уравнение (7.8):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

[1]Так как левая часть должна быть положительной, то там должен быть модуль разности, но так как выбранный чертёж согласуется с положительной разностью, то модуль отсутствует.

и упростим его аналогичным образом.

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2.$$
$$xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$
$$x^2c^2-2a^2xc+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2.$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Так как $c^2-a^2>0$ с помощью замены

$$b^2=c^2-a^2 \tag{7.9}$$

получаем

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Так же, как и в случае с эллипсом ($a\neq 0$ и $b\neq 0$), разделим обе части на $a^2b^2>0$:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}. \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) называется *каноническим уравнением гиперболы в данной системе координат.*

Построим его график и определим геометрический смысл коэффициентов уравнения.

Из уравнения следует $((-y)^2=y^2,\ (-x)^2=x^2)$, что гипербола симметрична относительно осей координат. Определим точки пересечения гра фика с осями координат: Подставим $x=0$ в уравнение (7.10):

$$-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как левая часть уравнения отрицательна или равна нулю, а правая – больше нуля, то уравнение теряет смысл. Следовательно график гиперболы не пересекает ось ординат. Подставляя $y=0$ в уравнение (7.10), получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Поэтому гипербола пересекает ось абцисс в точках с координатами $(-a;0)$ и $(a;0)$. Далее, преобразуем уравнение (7.10) к следующему виду:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-b^2).$$

Учитывая симметрию, рассмотрим сначала возможность построить график при $x>0$ и $y>0$. В этом случае последняя форма уравнения примет вид

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-b^2}.$$

Если заставить x бежать к бесконечности, то $\sqrt{x^2-b^2} \to \sqrt{x^2} = x$. Поэтому кривая, заданная уравнением $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-b^2}$, будет с ростом x стремиться к прямой, заданной уравнением $y = \frac{b}{a}x$.

Введём следующее

Определение 7.5. *Прямая на координатной плоскости, к которой стремятся точки графика при их бесконечном удалении от начала координат, называется асимптотой графика.*

Согласно этому определению график гиперболы в правом координатном углу имеет асмптоту, определяемую уравнением $y = \frac{b}{a}x$. Следовательно, он является выпуклым вверх, так как $\sqrt{x^2-b^2} < x$.

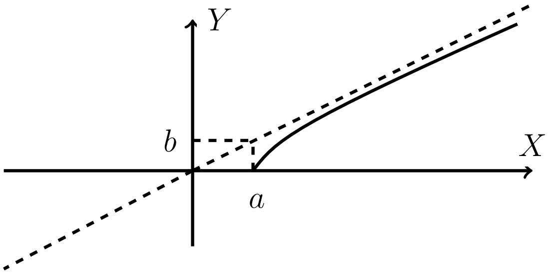


Рис. 7.9

Построив ветвь гиперболы в правом верхнем углу, мы можем теперь отразить её симметрично от обеих координатных осей (при этом асимптота $y = \frac{b}{a}x$ отразится в асимптоту $y = -\frac{b}{a}x$):

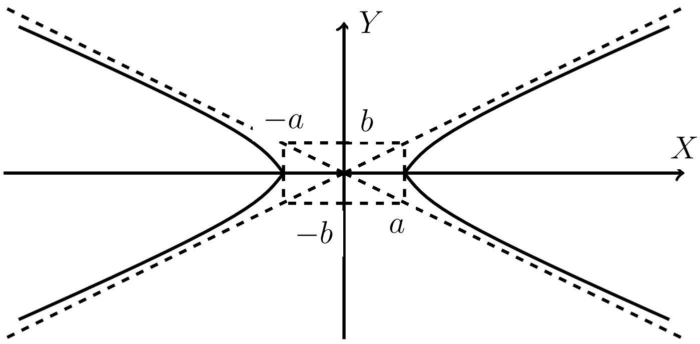


Рис. 7.10

Найденные точки $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ называются *вершинами гиперболы*. Число $a > 0$ называется *действительной полуосью гиперболы*, а число $b > 0$ называется *мнимой полуосью гиперболы*.

Рисунок (7.10) позволяет описать

Процесс построения гиперболы по каноническому уравнению

1. Отложить по оси абцисс по обе стороны от начала координат действительную полуось a.
2. Отложить по оси ординат по обе стороны от начала координат мнимую

полуось b.

3. Построить прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и равны $2a$ и $2b$, а центр находится в начале координат декартовой системы.
4. Построить пунктиром диагонали прямоугольника, продолжив их вне прямоугольника до пределов координатной системы как асимптоты гиперболы.
5. Выбрав точки $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ за вершины гиперболы, вписать её ветви так, чтобы они стремились к асимптотам, не пересекая их.

Задача 7.3. Привести уравнение кривой $9x^2 - 16y^2 = 144$ к каноническому виду и построить её схематический график.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны соответственно $A = 9$ и $C = -16$, то $A \cdot C = 9 \cdot (-16) < 0$. Поэтому данное уравнение является уравнением гиперболы. Чтобы написать её каноническое уравнение, нужно в правой части уравнения получить 1 вместо 144. Для этого разделим обе части уравнения на 144:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Получив каноническое уравнение гиперболы, находим $a^2 = 16$ и $b^2 = 9$. Следовательно, действительная полуось $a = 4$, а мнимая полуось $b = 3$. Так как уравнение каноническое, то центром гиперболы является центр декартовой системы координат. Следовательно схематический график имеет вид:

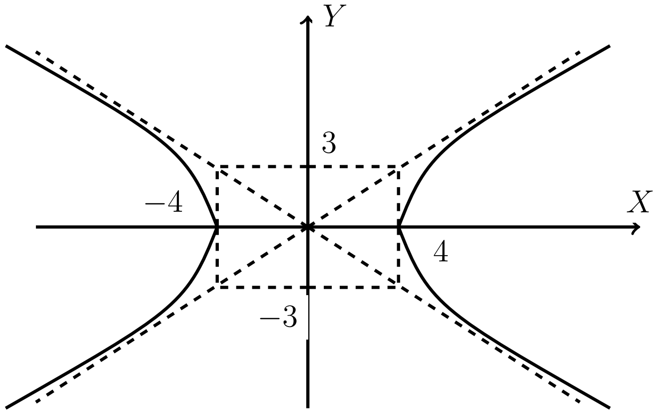


Рис. 7.11

Замечание 7.1. На чертеже (7.12) можно увидеть, что построенный прямоугольник с асимптотами определяет еще одну гиперболу, которая называется *сопряжённой гиперболой* по отношению к первой. Её ветви направлены вверх и вниз:

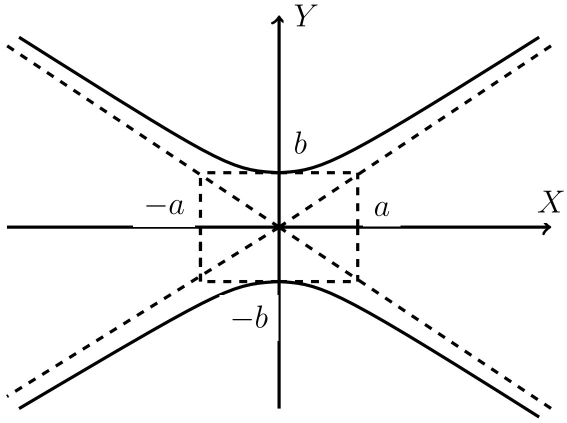


Рис. 7.12

Каноническое уравнение этой гиперболы имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,} \tag{7.11}$$

и называется *каноническим уравнением сопряженной гиперболы.* Действительная и мнимая оси первой гиперболы являются соответственно мнимой и действительной осями сопряжённой гиперболы.

Замечание 7.2. Если у гиперболы совпадают действительная и мнимая полуоси, то есть $a = b$, то угол между асимптотами является прямым[1]. Такая гипербола называется *равнобочной.* Для неё кроме канонической системы координат, в которой оси симметрии совпадают с осями координат,

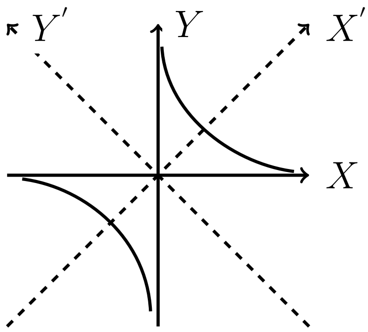


Рис. 7.13

существует другая часто используемая система координат, в которой осями являются асимптоты гиперболы. В новой системе координат $X'OY'$ уравнение гиперболы имеет вид

$$x'^2 - y'^2 = a^2$$

(здесь a – одновременно действительная и мнимая полуось гиперболы). Это уравнение можно с помощью замены[2] привести к виду

$$\boldsymbol{xy = \frac{a^2}{2}}. \tag{7.12}$$

Это уравнение называется *уравнением гиперболы в асимптотах.*

В том случае, когда $a = \sqrt{2k}$, где k – некоторый параметр, оно приобретает знакомый школьникам вид

$$y = \frac{k}{x}.$$

[1]Так как равен $2\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = 2\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2}$.

[2]$x' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$; $y' = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Именно в таком виде оно чаще встречается в экономической теории, когда гипербола описывает такую зависимость между двумя показателями, при которой при увеличении одной переменной значения другой увеличиваются до определённого уровня, а потом уменьшаются, например зависимость урожайности от количества внесённого удобрения, продуктивности животных от уровня их кормления, себестоимости единицы продукции от объёма её производства и так далее.

§ 7.6. Парабола

Предположим, что в плоскости расположена некоторая прямая d и зафиксирована точка F.

Определение 7.6. *Множество точек плоскости, равноудалённых от данной прямой и фиксированной точки, называется параболой.*

Для вывода канонического уравнения параболы с помощью данного определения проведём через точку F прямую, перпендикулярную данной прямой d. Новую прямую выберем за координатную ось абсцисс. Предположим, что она пересекает прямую d в точке A. Обозначим через p расстояние между точками A и F. Разделив отрезок AF пополам, обозначим его середину через O. Проведём через точку O прямую, перпендикулярную выбранной оси абсцисс, и примем её за ось ординат построенной системы координат XOY.

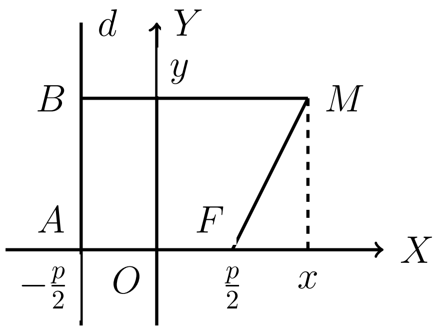


Рис. 7.14

Согласно определению (7.6) составляем уравнение

$$|BM| = |FM|. \tag{7.13}$$

Так как

$$|BM| = \left|x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right|, \text{ а } |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2},$$

то, подставляя эти значения в уравнение (7.13), получаем

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части полученного уравнения в квадрат и раскрыв скобки в обеих частях, имеем

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Приведя подобные члены, перпишем уравнение в виде

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}. \tag{7.14}$$

Очевидно, что вершина параболы находится в начале координат, а так как $(-y)^2 = y^2$, то парабола симметрична относительно оси абцисс, которая является её осью симметрии.

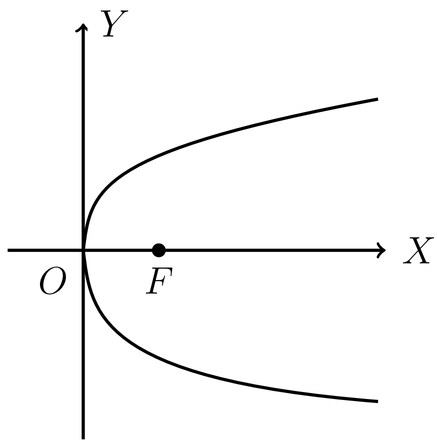


Рис. 7.15

Замечание 7.3. Заметим, что если бы мы обозначили ось, проходящую через фокус, как ось ординат OY, то каноническое уравнение параболы приняло бы вид

$$\boldsymbol{x^2 = 2py}, \tag{7.15}$$

который легко было бы переписать в форме уравнения, более знакомого с точки зрения школьной программы[1]:

$$y = kx^2$$

$\left(\text{здесь } k = \dfrac{1}{2p}\right)$.

В экономических исследованиях достаточно часто общая кривая средних издержек дли любого объёма производства представляется в виде огибающей семейства парабол, которые, в свою очередь, изображают графики краткосрочных средних издержек.

При изучении математической статистики в экономике используется метод наименьших квадратов, который позволяет многие процессы, происходящие в экономике, описать с помощью линий второго порядка.

§ 7.7. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду и построение их схематических чертежей в декартовой системе координат

Алгоритм решения задач данного параграфа включает три этапа:

1. Определение типа линии по коэффициентам уравнения.
2. Приведение уравнения к виду, в котором ясен геометрический смысл параметров уравнения, и составление канонического уравнения.
3. Построение схематического чертежа линии в данной системе координат.

Задача 7.4. Определить тип линии, заданной уравнением

$$4x^2 - 16x + 4y^2 + 8y - 124 = 0.$$

[1]А также матемематического анализа

Привести уравнение линии к каноническому виду и построить её схематический график.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны соответственно $A = 4$ и $C = 4$, то $A = C$. Поэтому данное уравнение является уравнением окружности. Чтобы его привести к виду (7.3), выделим полный квадрат относительно каждой переменной, входящей в уравнение.

Из школьной математики известно, что *полным квадратом* называются выражения вида

$$m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2 \text{ и } m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2.$$

Выпишем из данного уравнения блок, содержащий x, и преобразуем его:

$$4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x) = 4(\underbrace{x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2}_{(x-2)^2} - 1^2) =$$

$$= 4((x-2)^2 - 4) = 4(x-2)^2 - 16.$$

Аналогично выпишем блок, содержащий y:

$$4y^2 + 8y = 4(y^2 + 2y) = 4(\underbrace{y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2}_{(y+1)^2} - 1^2) =$$

$$= 4((y+1)^2 - 1) = 4(y+1)^2 - 4.$$

Возвращая в уравнение вместо вынутых блоков результаты преобразований, имеем

$$4(x-2)^2 - 16 + 4(y+1)^2 - 4 - 124 = 0.$$

Приведя подобные и перенеся свободный член в правую часть, получим

$$4(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 144.$$

Разделив обе части уравнения на 4, находим

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36.$$

Найдём параметры данной окружности. Так как $R^2 = 36$, то радиус окружности $R = 6$. Поэтому согласно (7.3) уравнение имеет вид:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 6^2.$$

Решив уравнения

$$\begin{cases} x - 2 = 0; \\ y + 1 = 0, \end{cases}$$

найдём координаты центра окружности: $C(2;\,-1)$. Зная координаты центра и радиус, построим схематический чертёж (Рис.7.16).

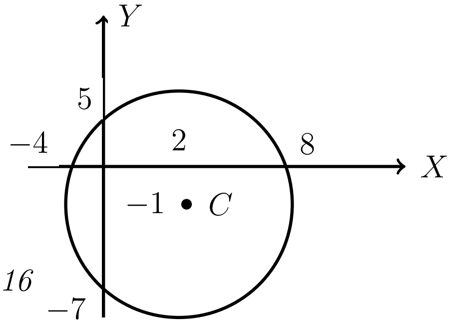


Рис. 7.16

Чтобы написать каноническое уравнение окружности, сделаем замену переменных:

$$x' = x - 2;\ \ y' = y + 1.$$

В результате получаем каноническое уравнение окружности:

$$x'^2 + y'^2 = 6^2.$$

Задача 7.5. Определить тип линии, заданной уравнением

$$9x^2 + 54x + y^2 - 8y - 128 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и построить её схематический график.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны соответственно $A = 9$ и $C = 1$, то $A \cdot C > 0$, причём $A \neq C$. Поэтому данное уравнение является уравнением эллипса. Чтобы его привести к виду (7.7), выделим полный квадрат относительно каждой переменной, входящей в уравнение.

Аналогично решению предыдущей задачи, выпишем из данного уравнения блок, содержащий x, и преобразуем его:

$$9x^2 + 54x = 9(x^2 + 6x) = 9(\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2) =$$

$$= 9((x+3)^2 - 9) = 9(x+3)^2 - 81.$$

Точно так же выпишем блок, содержащий y:

$$y^2 - 8y = \underbrace{y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2}_{(y-4)^2} - 4^2 = (y-4)^2 - 16.$$

Возвращая в уравнение вместо вынутых блоков результаты преобразований, получаем

$$9(x+3)^2 - 81 + (y-4)^2 - 16 - 128 = 0.$$

Приведя подобные и перенеся свободный член в правую часть, получим

$$9(x+3)^2 + (y-4)^2 = 225.$$

Чтобы определить полуоси эллипса и координаты его центра, нам нужно в правой части уравнения получить 1 вместо 225. Для этого разделим обе части уравнения на 225:

$$\frac{9(x+3)^2}{225} + \frac{(y-4)^2}{225} = 1.$$

Сократив первую дробь и определив основания квадратов в знаменателях, имеем

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{15^2} = 1.$$

Следовательно, большая полуось $a = 5$ не является такой уж большой, так как она меньше малой полуоси $b = 15$. То есть, эллипс вытянут вдоль оси ординат. Решив уравнения $\begin{cases} x+3=0; \\ y-4=0, \end{cases}$ найдём координаты центра эллипса: $C(-3;\,4)$. Зная координаты центра и полуоси, построим схематический чертёж (см. Рис.(7.17)).

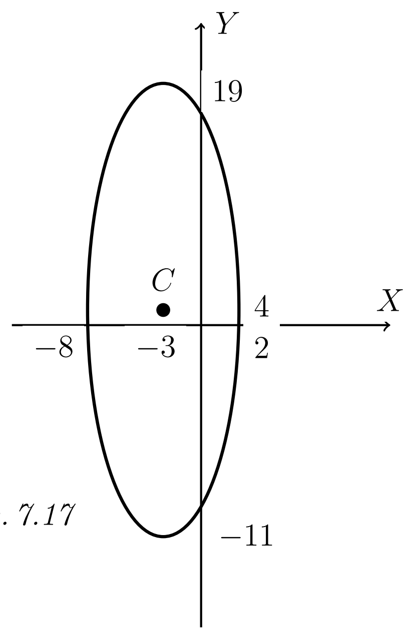


Рис. 7.17

Напишем каноническое уравнение эллипса, сделав замену переменных:

$$x' = x + 3;\; y' = y - 4.$$

$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{15^2} = 1.$$

Задача 7.6. Определить тип линии, заданной уравнением

$$4x^2 - 24x - 9y^2 + 18y - 9 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и построить её схематический график.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны соответственно $A = 4$ и $C = -9$, то $A \cdot C < 0$. Поэтому данное уравнение является уравнением гиперболы. Чтобы его привести к виду (7.10) или (7.11), выделим полный квадрат относительно каждой переменной, входящей в уравнение.

Так же, как и в двух предыдущих задачах, выпишем из данного уравнения блоки, содержащие x и y, и преобразуем их:

$$4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x) = 4(\underbrace{x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2}_{(x-3)^2} - 3^2) =$$

$$= 4((x-3)^2 - 9) = 4(x-3)^2 - 36;$$

$$-9y^2+18y=-9(\underbrace{y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2}_{(y-1)^2}-1^2)=-9((y-1)^2-1^2)=$$

$$=-9((y-1)^2-1)=-9(y-1)^2+9.$$

Возвращая в уравнение вместо вынутых блоков результаты преобразований, получаем

$$4(x-3)^2-36-9(y-1)^2+9-9=0.$$

Приведя подобные и перенеся свободный член в правую часть, получим

$$4(x-3)^2-9(y-1)^2=36.$$

Чтобы определить полуоси гиперболы и координаты её центра, нам нужно в правой части уравнения получить 1 вместо 36. Для этого разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{4(x-3)^2}{36}-\frac{9(y-1)^2}{36}=1.$$

Сократив первую дробь и определив основания квадратов в знаменателях, имеем

$$\frac{(x-3)^2}{3^2}-\frac{(y-1)^2}{2^2}=1.$$

Следовательно, действительная полуось $a=3$, а мнимая полуось $b=\ 2$.

Решив уравнения $\begin{cases} x-3=0; \\ y-1=0, \end{cases}$ найдём координаты центра гиперболы: $C(3;\,1)$. Зная координаты центра и полуоси, построим схематический чертёж.

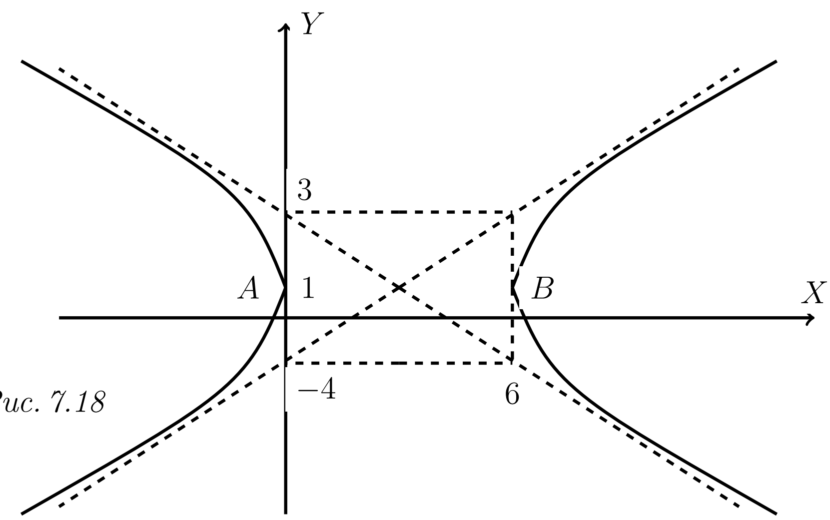


Рис. 7.18

Напишем каноническое уравнение гиперболы, сделав замену переменных:

$$x'=x-3;\ \ y'=y-1.$$

$$\frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1.$$

Задача 7.7. Определить тип линии, заданной уравнением

$$x^2 + 2x - 6y + 7 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и построить её схематический график.

Решение. В силу того, что y^2 в уравнении отсутствует $(A \cdot C = 0)$, уравнение является уравнением параболы. Чтобы его привести к виду (7.15), выделим полный квадрат относительно переменной x.

$$x^2 + 2x = \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2}_{(x+1)^2} - 1^2 = (x+1)^2 - 1.$$

Возвращая в уравнение результат преобразования вынутого блока и прибавляя к обеим частям уравнения $(6y - 6)$, получаем

$$(x+1)^2 = 6(y-1).$$

Полученное уравнение является уравнением параболы с вертикальной осью симметрии $x = -1$.

Найдём координаты вершины параболы. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} x + 1 = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$ Зная координаты вершины $(-1;\ 1)$ и ось симметрии, построим схематический чертёж.

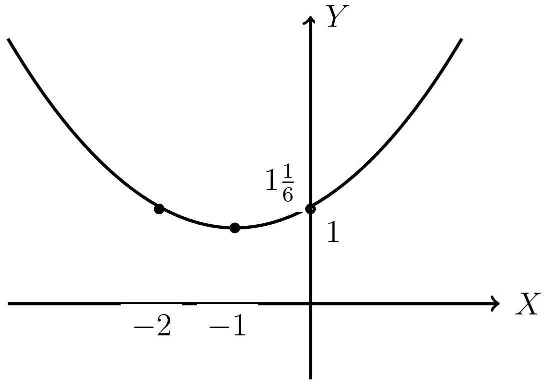


Рис. 7.19

Заменив переменные, напишем каноническое уравнение параболы:

$$x' = x + 1;\ \ y' = y - 1.$$

$$x'^2 = 6y'.$$

Замечание 7.4. Заметим, что существует другое определение линий второго порядка, объединяющее эти линии с помощью постоянной величины – отношения расстояний от произвольной точки кривой до данной точки (фокуса) и до заданной прямой. Эта отношение называется *эксцентриситетом.* Из теории линий второго порядка известно, что для эллипса и гиперболы эксцентриситет можно вычислить по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, а для параболы $\varepsilon = 1$. (При этом для гиперболы $\varepsilon > 1$, а для эллипса $\varepsilon < 1$.)

Задача 7.8. Найти эксцентриситет эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Решение. Из формулы замены (7.6) следует, что $c^2 = a^2 - b^2$. Поэтому из условия задачи находим $c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$ (так как c определяет расстояние, то $c \geq 0$). Из замечания 7.4 $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$.

В результате имеем $\boxed{\varepsilon = 0,8}$.

Задача 7.9. Найти эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Решение. Из формулы замены (7.9) получаем $c^2 = a^2 + b^2$. Поэтому из условия задачи находим $c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c = 4$. Из замечания 7.4 $\varepsilon = \dfrac{4}{2} = 2$.

Следовательно, $\boxed{\varepsilon = 2}$.

§ 7.8. Понятие о поверхностях второго порядка

В дальнейшем, при изучении функций нескольких переменных, в частности их графического представления, а затем и в специальных приложениях экономики и техники, может понадобиться знание о поверхностях второго порядка.

Аналогично определению 7.1 можно дать следующее

Определение 7.7. *Поверхность в трёхмерной системе координат $OXYZ$, которая определяется алгебраическим уравнением второго порядка*
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \qquad (7.16)$$
(здесь $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ – действительные числа), называется *поверхностью второго порядка* .

Рассмотрим канонические уравнения[1] и графические изображения основных классов таких поверхностей.

7.8.1. Эллипсоиды

Определение 7.8. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}, \qquad (7.17)$$
называется эллипсоидом
(здесь a, b, c – положительные действительные числа).

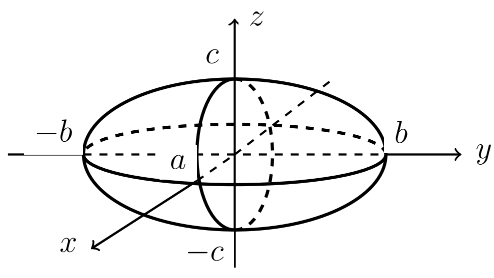


Рис. 7.20

[1]То есть такие уравнения поверхностей, у которых центр или вершина расположены в начале координат декартовой системы.

Как и в случае с эллипсом (см. (7.7)), числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида.* При этом имеют место определения:

Определение 7.9. *Эллипсоид называется трёхосным, если*

$$a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c.$$

Определение 7.10. *Эллипсоид называется эллипсоидом вращения, если две из трёх его полуосей равны между собой.*

Определение 7.11. *Если все полуоси эллипсоида равны:*

$$a = b = c = r,$$

то эллипсоид называется сферой радиуса r.

Уравнение сферы имеет вид:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}. \tag{7.18}$$

7.8.2. Гиперболоиды

Определение 7.12. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} - \frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2}} = \boldsymbol{1}, \tag{7.19}$$

называется однополостным гиперболоидом (здесь a, b, c — положительные действительные числа).

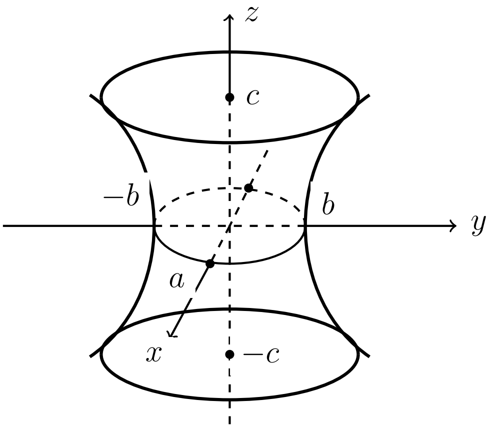


Рис. 7.21

Как и в случае с эллипсоидом (см. (7.7)), числа a, b, c называются *полуосями гиперболоида.*

Определение 7.13. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} - \frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2}} = \boldsymbol{-1}, \tag{7.20}$$

называется двуполостным гиперболоидом (здесь a, b, c — положительные действительные числа).

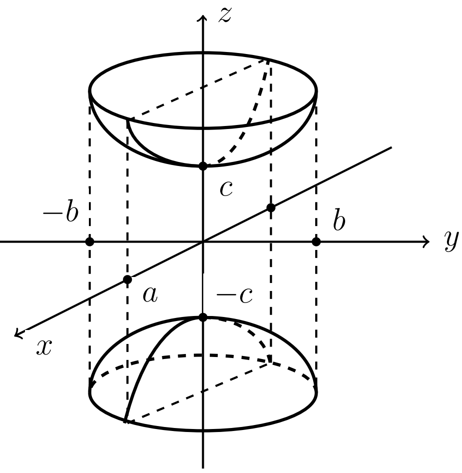


Рис. 7.22

Как и в предыдущих случаях, числа a, b, c называются *полуосями гиперболоида.*

Аналогично определению 7.10 гиперболоиды называются *гиперболоидами вращения*, если две из трёх их полуосей равны между собой.

7.8.3. Параболоиды

Определение 7.14. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{7.21}$$

называется эллиптическим параболоидом.

(Здесь a, b – положительные действительные числа).

При $a = b$ параболоид называется *эллиптическим параболоидом вращения* с осью Oz. А его уравнение имеет вид:

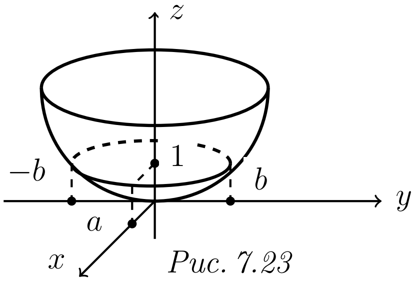


Рис. 7.23

$$x^2 + y^2 = a^2 z. \tag{7.22}$$

Определение 7.15. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{7.23}$$

называется гиперболическим параболоидом (здесь a, b – положительные действительные числа).

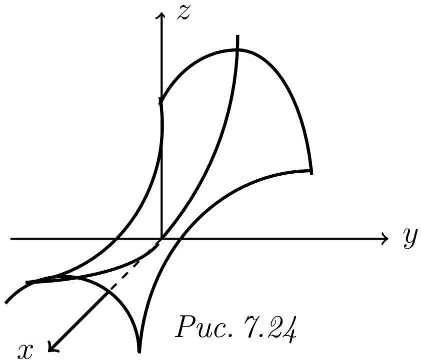


Рис. 7.24

7.8.4. Цилиндрические поверхности

Определение 7.16. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.24}$$

называется эллиптическим цилиндром (здесь a, b – положительные действительные числа).

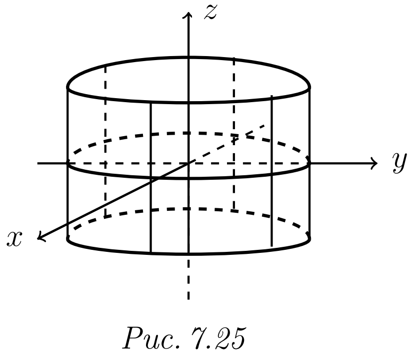


Рис. 7.25

Определение 7.17. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (7.25)$$

называется гиперболическим цилиндром (здесь a, b — положительные действительные числа).

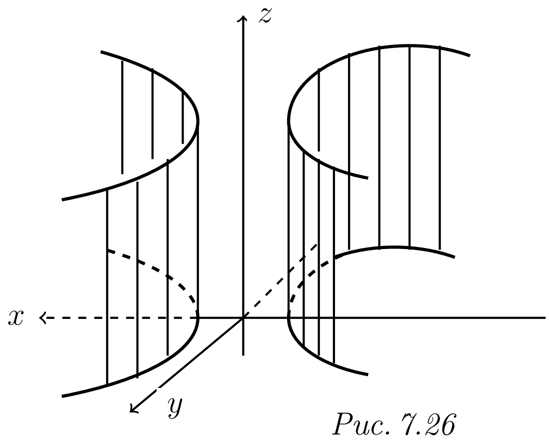


Рис. 7.26

Определение 7.18. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$y^2 = 2px, \qquad (7.26)$$

называется параболическим цилиндром.

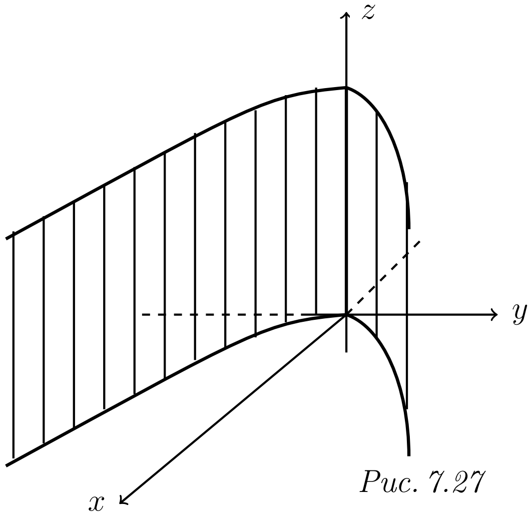


Рис. 7.27

7.8.5. Коническая поверхность

Определение 7.19. *Поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (7.27)$$

называется эллиптическим цилиндром (здесь a, b, c — положительные действительные числа).

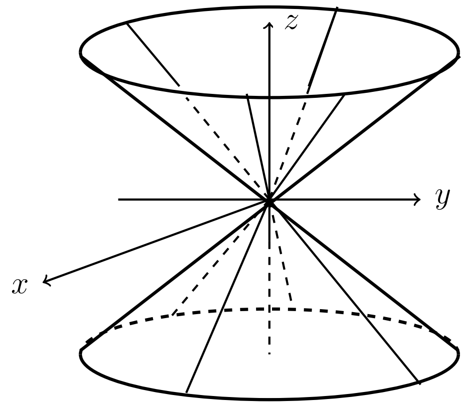


Рис. 7.28