Разбиение материала на лекции 8-9 связано с тем, что материал 8-й лекции содержит упорядоченное до некоторой степени изложение вопросов школьной программы,состоящее большей частью из вопросов школьной математики, самым важным из которых является определение функции.
Собственно введение в математический анализ составляет содержание 9-й лекции. Большой объём материала связан с большим количеством графиков, а также с изложением решений задач практических занятий

Чтобы при чтении лекций с экрана использовать переход по ссылке, **достаточно нажать на красный квадратик мышью**.
Для того, чтобы **вернуться обратно**, нужно нажать **одновременно** на комбинацию клавиш

$\boxed{\textbf{Alt}}$ $\boxed{\rightarrow}$

Бидерман В. И.

Лекции по математике для студентов первого курса

ЛЕКЦИЯ 8.

Введение в математический анализ

Любое введение в науку предусматривает знакомство со словарём этой науки, то есть с теми словами, без которых нельзя сформулировать ни одно предложение в этой науке. В первую очередь такими словами являются: *отрезок, интервал, окрестность, функция.* Так уж получилось, что два из них мы определили в самом начале лекций, на странице (**??**), как примеры использования символики. Здесь эти определения мы повторим вновь, так как эти понятия играют в математическом анализе основные роли.

Все события в мире анализа развиваются в известной из школы *декартовой системе координат*, в которой по математической традиции горизонтальная ось называется *осью абцисс* или *осью* OX, а точки x образуют множество X. Перпендикулярная к ней ось называется *осью ординат* или *осью* OY, а точки y образуют множество Y. Множества X и Y являются геометрическими изображениями множества действительных чисел, которое является главным действующим лицом в курсе математического анализа.

§ 8.1. Множества точек в математическом анализе

Из курса геометрии математический анализ позаимствовал у неё некоторые объекты:

Определение 8.1. $\boldsymbol{(-\infty;\infty)=\{x\in\mathbb{R}\colon\ -\infty<x<\infty\}}$ – геометрическое обозначение всего множества действительных чисел или числовой прямой[1].

Определение 8.2. $\boldsymbol{[a;b]=\{x\in\mathbb{R}\colon\ a\le x\le b\}}$ – *отрезок* $[a;b]$. Точки a и b называются *концами отрезка.*

Определение 8.3. $\boldsymbol{(a;b)=\{x\in\mathbb{R}\colon\ a<x<b\}}$ – *интервал* $(a;b)$. Точки a и b называются *концами интервала*, которые самому интервалу не принадлежат.

Определение 8.4. Любой интервал, содержащий точку x, называется[2] *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

Определение 8.5. Любой интервал, окружающий точку x, **но не содержащий эту точку**, называется *выколотой окрестностью точки* x и обозначается $\mathring{\mathrm{U}}(x)$.

---

[1] В силу вышесказанного можно определить это множество как $(-\infty;\infty)=\{y\in\mathbb{R}:-\infty<y<\ \infty\}$.

[2] На самом деле, по умолчанию, под окрестностью понимается любой интервал, имеющий достаточно малые размеры (конечно, и сама числовая прямая является окрестностью любой точки, но этот факт не представляет интереса с точки зрения анализа).

Например,

$$\mathring{\mathrm{U}}(x_o) = (a;b), \text{ если } a < x_o < b, \text{ но } x_o \notin (a;b).$$

Одними из самых любимых математиками букв являются две греческие буквы: $\boldsymbol{\varepsilon}$ – *эпсилон* и $\boldsymbol{\delta}$ – *дельта.* Каждая из них обозначает радиус окрестности, окружающей точку:

Определение 8.6. $\boldsymbol{U_\delta(a) = (a-\delta; a+\delta)}$ – $\delta-$окрестность точки a, то есть интервал с центром в точке a радиуса δ.

Определение 8.7. $\boldsymbol{U_\varepsilon(A) = (A-\varepsilon; A+\varepsilon)}$ – $\varepsilon-$окрестность точки A, то есть интервал [1] с центром в точке A радиуса ε.

Определение 8.8. $\mathring{\mathrm{U}}_\delta(a) = (a-\delta;a) \cup (a;a+\delta)$ – *выколотая* $\delta-$ окрестность точки a, то есть интервал с центром в точке a радиуса δ, не содержащий саму точку a.

§ 8.2. Определение функции

Изучая какое-нибудь явление, мы пытаемся определить *причину* и *следствие*, стараясь при этом ответить на вопрос: *каким образом, почему из причины появляется это следствие.* То есть, каждое явление определяет тройку элементов: **причина, следствие, правило перехода от причины к следствию**. Понимание этого приводит к следующему определению.

Пусть X и Y – два подмножества множества действительных чисел[2], элементами которых являются соответственно числа x и y.

Определение 8.9. Отображение из множества X во множество Y, при котором по некоторому правилу f каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией одной переменной.*

Обозначение функции. В советской и российской математической литературе функция обозначается как

$$y = f(x).$$

В иностранной литературе чаще встречаются другие обозначения:

$$f\colon X \to Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y \text{ или } f\colon x \mapsto y.$$

Множество X называется *областью определения функции* и обозначается[3] D_f или D_y. Множество Y называется *областью значений функции* и обозначается E_f или E_y. Так, для функции $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = E_f = [0;\infty)$, а для функции $y = \ln x$ $D_y = (0;\infty)$, а $E_y = (-\infty;\infty)$.

---

[1] По математической традиции $\delta-$окрестности точек встречаются на оси абцисс, а $\varepsilon-$окрестности точек почти всегда рассматриваются на оси ординат.

[2] Которые могут совпадать со всем множеством $\mathbb{R}$.

[3] От английского *domain* – область.

Переменная x называется *аргументом функции* или *независимой переменной*, а переменная y зависимой переменной.

Замечание 8.1. Возвращаясь к обозначению функции $y = f(x)$, следует заметить, что в этом обозначении двойная смысловая нагрузка:
1. В буквальном смысле обозначение $y = f(x)$ следует понимать как *уравнение $y = f(x)$ определяет функцию, отображающую элемент x в элемент y по правилу f.*
2. Обозначение $y = f(x)$ можно понимать также, как y *— есть значение функции f в точке x.*

Замечание 8.2. Возможно, понятие функции и её значения в точке воспринималось бы проще, если бы обозначение $y = f(x)$ представлялось бы как $y(x) = f(x)$. Тогда для многих понятнее была бы постановка задачи

Задача 8.1. Найти значение функции $y = (4x-5)^6$ в точке $x = 2$.

Решение. Так как $y(x) = (4x-5)^6$, то, подставим в обе части равенства вместо x её значение 2: $y(2) = (4\cdot 2-5)^6$. После вычислений

$$(4\cdot 2-5)^6 = (8-5)^6 = 3^6 = 729$$

получаем, что $\boxed{y(2) = 729}$.

Задача 8.2. Пусть функция $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x-2}+3\right)$. Найти $g\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$.

Решение. Подставим в обе части представления функции g вместо x дробь $\dfrac{2x+1}{x}$.

$$g\left(\frac{2x+1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{2x+1}{x}-2}+3\right).$$

Выполнив преобразования в скобке под знаком логарифма

$$\frac{1}{\frac{2x+1}{x}-2}+3 = \frac{1}{\frac{2x+1-2x}{x}}+3 = \frac{1}{\frac{1}{x}}+3 = x+3,$$

находим $\boxed{g\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = \ln(x+3)}$.

Замечание 8.3. Обратите внимание, что в записи $f(x)$ аргумент (или независимая переменная) x является в прямом смысле переменной величиной, принимая значения из области определения функции D_f и заставляя зависимую переменную $y = f(x)$ пробегать соответствующее множество значений из E_f. А в обозначении $f(x_o)$ x_o есть некоторое зафиксированное число из D_f, которому соответствует определённое число $y_o = f(x_o) \in E_f$.

Зачем нужны функции? Жизнь любого человека представляет процесс, который протекает во времени и в пространстве на фоне других процессов. Для изучения этих процессов используются различные методы их описания.

Функция одной переменной представляет *математическое описание процесса* в том случае, когда считают, что процесс определяется одной причиной и одним следствием[1].

В определённом смысле можно сказать, что *знание о том, что такое функция, предполагает умение считать до трёх*: функция это некоторая *тройка*, включающая $\{$**множество** D_f**, множество** E_f**, правило** $f\}$.

§ 8.3. Способы задания функции

К классическим способам описания функции относятся: *табличный*, *графический*, *аналитический*.

Табличный способ задания функции. Появление функции в любом исследовании связано с экспериментом, в ходе которого и появляется таблица вида

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

.

В задачах экономики табличный способ пользуется большим уважением. В качестве примера можно привести таблицу соответствия между разрядами тарифной сетки и соответствующими им ставками зарплаты.

Недостатками табличного способа задания функции является его малая информативность и ненаглядность. Вы не можете, не проводя новых исследований, узнать, что соответствует некоторому $\bar{x}$, если этот $\bar{x}$ находится между x_1 и x_2. Отсутствие наглядности может компенсировать

Графический способ задания функции.

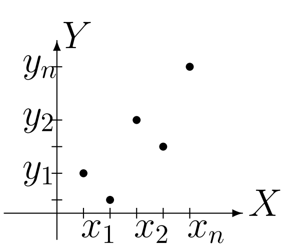


Рис. 8.1

Если на плоскости построить декартову систему координат, полагая горизонтальную ось абцисс за область определения функции, а вертикальную ось ординат — за область её значений, то множество точек с координатами $(x_1; y_1)$,, $(x_2; y_2), \ldots,$ $(x_n; y_n)$ графически опишет таблицу и, с определённой степенью точности позволит представить поведение функции в тех точках, в которых

[1]В том случае, когда процесс имеет множество причин и множество следствий, математика для его описания использует *операторы* – отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (например, отображая матрицу A, описывающую некоторое состояние, в матрицу e^A) и *функционалы* – отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ (например, ставя каждой квадратной матрице $n-$го порядка её определитель, который является числом).

таблично она не определена.

К недостаткам графического способа описания функции относится неточность изображения, связанная с техническими средствами изображения и возможностями зрения. Проблему отсутствия точности успешно решает лишённый наглядности

Аналитический способ задания функции. Под аналитическим способом задания функции понимается её задание с помощью одной или нескольких формул:

$$1.\, y = x^2 \;\; 2.\, f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \;\; 3.\, y = 4 - x^2 \;\; (y \geq 0).$$

Прежде, чем рассмотреть эти примеры подробнее, введём

Определение 8.10. *Графиком аналитически заданной функции* $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости, определённых координатами $(x; f(x))$.

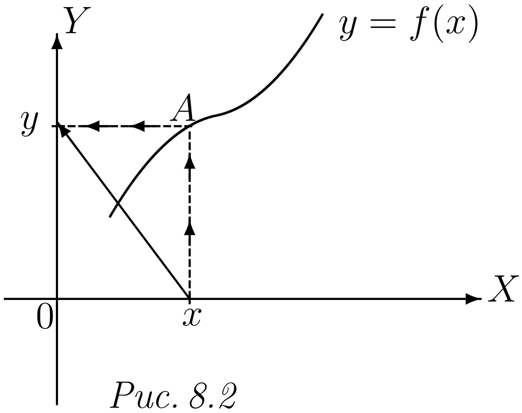


Рис. 8.2

Чтение графика функции. Пусть ось OX является областью определения D_f функции $y = f(x)$, а ось OY – множеством E_f её значений. Тогда правило f, отображающее $x \in D_f$ в элемент $y \in E_f$, задаётся кривой следующим образом: перпендикуляр, восстановленный в точке x, дойдя до точки A, лежащей на кривой, вынужден повернуть влево на $90°$ и закончить свой путь на оси OY, показав, что он x отображает в $y = f(x)$ не произвольно. Это его заставляет сделать именно график функции[1].

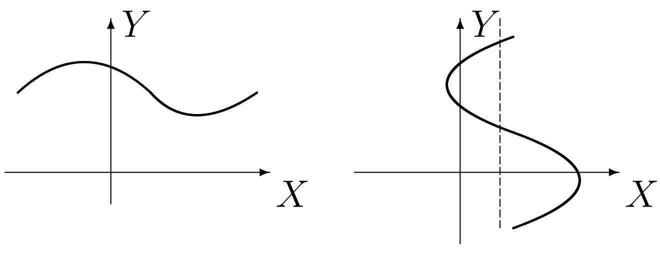


Рис. 8.3

[1]Стрелка-вектор показывает, что точка x отображается не в точку A, лежащую на кривой, а в точку y на оси OY.

Замечание 8.4. Обратите внимание, что не каждая кривая в декартовой системе координат является графиком некоторой функции. Так слева (см. Рис. (8.3) на чертеже изображен график некоторой функции (ни одна вертикальная прямая не сможет пересечь его в двух точках). Кривая на правом чертеже не является графиком функции, так как существует вертикальная прямая, пересекающая кривую не менее, чем в двух точках (Это означает, что существует элемент x из области определения, которому одновременно соответствуют по крайней мере два значения функции).

Вернёмся к примерам формул, определяющих функции при аналитическом способе задания.

1. Так как любое число можно возвести в «квадрат», то областью определения первой из функций является множество $D_y = (-\infty; \infty)$. Из того, что для всех x значения $x^2 \geq 0$, можно утверждать, что множество значений функции $E_y = [0; \infty)$. Следует также учесть, что $(-x)^2 = x^2$. Поэтому при построении схематического графика достаточно найти значения точек, лежащих в правой плоскости и симметрично отобразить их в левую полуплоскость.

x	y
0	0
1	1

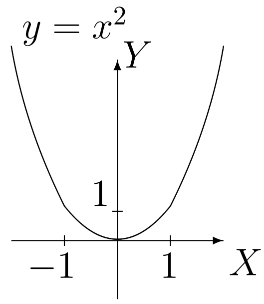


Рис. 8.4

2. Область определения функции $f(x)$ можно представить как $D_f = (-\infty; 0) \cup [0; \infty)$.А множество её значений $E_f = (-\infty; -1) \cup [0; \infty)$. Так как на каждом из множеств функция является линейной, то, чтобы построить график, нужно знать координаты двух точек на каждом из множеств. (Стрелка в точке $(0; -1)$ слева означает, что в точке $x = 0$ функция принимает значение 2).

x	y
0	0
1	2
0	-1
-1	-2

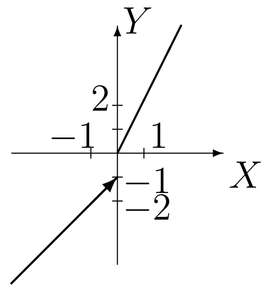


Рис. 8.5

3. В третьем примере область определения функции определяется условием $y \geq 0$. Из которого следует неравенство $4 - x^2 \geq 0$. Решив неравенство, получаем $D_y = [-2; 2]$. Так как $x^2 \geq 0$, то наибольшее значение, которое достигает функция $y(0) = 4$. Поэтому множество значений $E_y = [0; 4]$. Как и в первом примере, достаточно найти две точки, чтобы, используя симметрию, построить график.

x	y
0	4
2	0

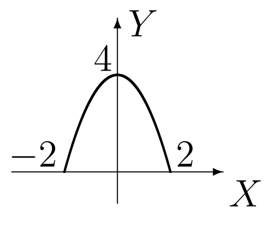


Рис. 8.6

Замечание 8.5. Следует заметить, что функции могут быть не только числовыми. И хотя они не относятся к данному курсу, тем не менее,

представляют интерес как задачи на определение области определения и множества значения. Сформулируем две из таких задач:
1. В холле 4-го этажа стоит исправный автомат по продаже напитков. Опишите его поведение как функцию f. Что из себя представляют область определения D_f и множество значений E_f? В чём смысл правила f?
2. Существует народная пословица: *Тише едешь, дальше будешь.* Опишите её как функцию g. Что из себя представляют область определения D_g и множество значений E_g? Постройте схематический график этой функции.

§ 8.4. Операции над функциями

Из курса школьной математики известно, что если функции имеют общую область определения, то в этой области их можно складывать, вычитать, умножать, делить (если, конечно, вы делите не на функцию, равную нулю). Все эти операции производятся по одному и тому же принципу: определив, что точка x лежит в общей области функций, вы значения функций в этой точке складываете, вычитаете, умножаете, делите.

Но не меньший интерес представляют случаи, когда область определения одной функции g пересекается с множеством значений другой функции f. Тогда мы можем считать значение функции f элементом области определения функции g. При этом функция g является *внешней функцией* по отношению к функции f. Соответственно функция f является *внутренней функцией* по отношению к функции g.

Опираясь на это, мы можем дать

Определение 8.11. *Сложной функцией* называется операция *определения функции от функции.* При таком определении внешняя функция зависит от аргумента не непосредственно, а через внутреннюю функцию.

Обозначается сложная функция так: $y = g(f(x))$.
Даннное определение можно объяснить с помощью цепочки функций[2]:

$$x \to f = f(x) \to y = g(f).$$

Например, если $f = \sin x$, а $g(f) = f^2$, то $y = (\sin x)^2$ или $y = \sin^2 x$.
Если же $f = x^2$, а $g(f) = \sin f$, то $y = \sin(x^2)$ или $y = \sin x^2$.

Из данного определения следует, что название **сложная функция** не определяет уровень сложности написания или исследования функции, а указывает некоторый тип функциональной зависимости. Заметим только, что очень часто операцию определения функции от функции называют *композицией* или *суперпозицией* функций.

[2]В принципе можно определить сложную функцию для бóльшего числа функций, чем две. Вопрос только в том, для чего это надо, не считая аналогии между образованием сложной функции и детективной историей о смерти Кощея Бессмертного: *смерть Кощея на острове, но не самом острове, а на дубе. но не на самом дубе, а...*

§ 8.5. Качественные свойства функции

В процессах, которые нас окружают в жизни[1], мы пытаемся разглядеть изменение этих процессов и их характеристик: их возрастание или убывание. Как именно они изменяются: стремятся ли они к насыщению или неудержимо растут (убывают). Нас интересуют не только их наибольшее и наименьшее значения, но и ответ на вопрос об их достижимости.

Ответы на все эти вопросы скрываются в качественных свойствах функций, описывающих эти процессы.

8.5.1. Ограниченные функции

Определение 8.12. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве X, если существует число M такое, что для всех точек x этого множества $f(x) \leq M$.* Так, например, любая квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ со старшим коэффициентом $a < 0$ является примером функции, ограниченной сверху. При этом $M = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Аналогично определяется функция, ограниченная снизу.

Определение 8.13. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве X, если существует число m такое, что для всех точек x этого множества $f(x) \geq m$.* Примером такой ограниченной снизу функции будет каждая квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ со старшим коэффициентом $a > 0$. При этом $m = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Такими же ограниченными снизу функциями являются показательные функции. Для каждой из них $m = 0$.

При этом следует заметить, что если квадратичная функция достигает своё наименьшее значение m, то показательные функции наименьшего значения не достигают.

Определение 8.14. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если она ограничена на этом множестве снизу и сверху. То есть,*

$$\exists m,\, M \in \mathbb{R} \colon \forall\, x \in X\; m \leq f(x) \leq M.$$

Имеет также место эквивалентное определение: *функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если*

$$\exists M > 0 \colon \forall\, x \in X\; |f(x)| \leq M.$$

[1]Рост курса доллара по отношению к рублю или его падение, наличие или отсутствие прибыли предприятия при увеличении или снижении расходов на сырьё и тому подобное.

Примерами ограниченных в области определения функций являются тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

8.5.2. Монотонные функции

На самом деле никаких монотонных функций не существует, а есть *монотонно возрастающие* и *монотонно убывающие*, *монотонно невозрастающие* и *монотонно неубывающие* функции[1].

Прежде, чем определить эти функции, введём два понятия:

Определение 8.15. Если x_o – фиксированная точка из области определения изучаемой функции, а x – некоторая точка в её окрестности, которая также лежит в области определения, то разность[2] $\Delta x = x - x_o$ называется *приращением аргумента в точке* x_o.

Предположим, что x_o – фиксированная точка из области определения функции $y = f(x)$, а $\Delta x = x - x_o$ – приращение аргумента в этой точке. Тогда точка $x = x_o + \Delta x$ тоже лежит в D_f. Найдём значения функции f в этих точках: ими будут, соответственно $f(x_o)$ и $f(x) = f(x_o + \Delta x)$.

Определение 8.16. Разность $\Delta f(x_o) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_o)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_o.

Естественно, что приращение аргумента Δx нужно искать на оси абцисс, а приращение функции в точке $\Delta f(x_o)$ – на оси ординат (см. Рис.8.7).

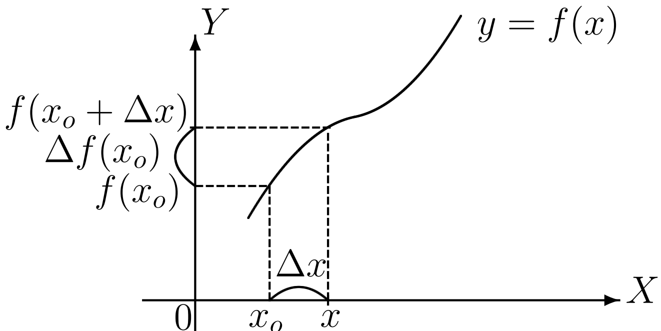


Рис. 8.7

Определение 8.17. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на некотором интервале* $(a;b)$, если для всех точек x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, *бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

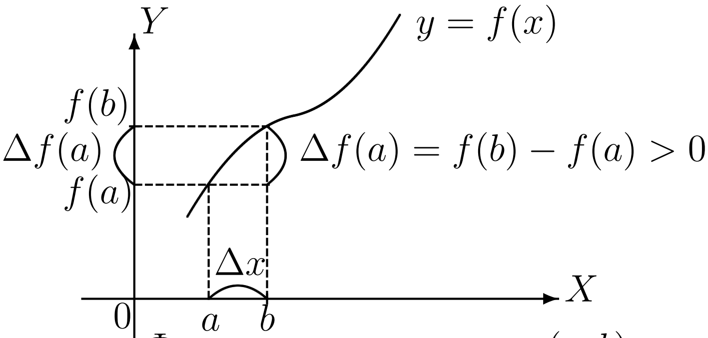
[1] Которые чаще всего называют просто возрастающими и убывающими, невозрастающими и неубывающими, не говоря о монотонности (что, конечно, не всегда правильно).

[2] В большинстве случаев точка x берётся справа от точки x_o, поэтому эта разность обычно положительна.

Определение 8.18. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на некотором интервале* $(a; b)$, если для всех точек x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, *бóльшему значению аргумента соответствует мéньшее значение функции:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a; b)\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Следствие 8.1. Из определений (8.15-8.17) вытекает, что функция является возрастающей на интервале тогда и только тогда, когда её приращение на этом интервале положительно. А из определений (8.15-8.16) и (8.18) следует, что функция убывает на интервале только в том случае, когда её приращение на этом интервале отрицательно. На схематических графиках это выглядит так:



Функция возрастает на $(a; b)$

Рис. 8.8

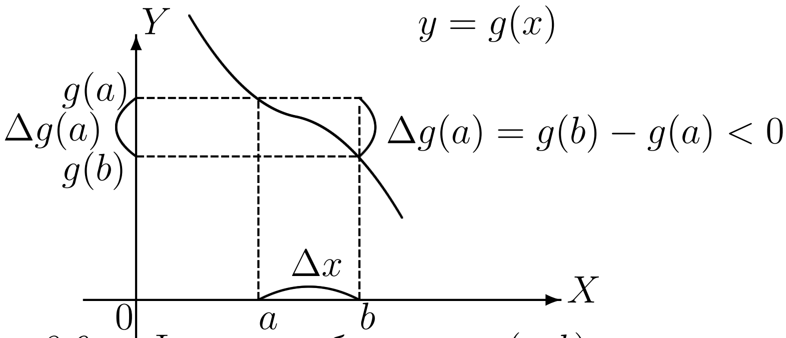


Рис. 8.9 Функция убывает на $(a; b)$

Замечание 8.6. Определения неубывающей и невозрастающей на интервале функций отличаются соответственно от определений возрастающей и убывающей на интервале функций заменой знаков соответствующих строгих неравенств на нестрогие.

8.5.3. Понятие локального максимума и локального минимума функции

Во многих ситуациях нас интересует, например, наибольшая и наименьшая стоимость товара, который мы собираемся приобрести в какой-то конкретный момент времени. Если эту стоимость можно описать с помощью функции, то говорят, что нас интересуют локальный максимум и локальный минимум функции[1].

Определение 8.19. Точка x_o из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой локального максимума функции* или *точкой максимума функции*, если существует хотя бы одна окрестность точки $U(x_o) \subset D_f$ такая, что

$$\forall\, x \in U(x_o)\ f(x) \leq f(x_o).$$

При этом значение функции в точке локального максимума $f(x_o)$ называется *локальным максимумом функции.*

Определение 8.20. Точка x_o из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой локального минимума функции* или *точкой минимума функции*, если существует хотя бы одна окрестность точки $U(x_o) \subset D_f$ такая, что

$$\forall\, x \in U(x_o)\ f(x) \geq f(x_o).$$

При этом значение функции в точке локального максимума $f(x_o)$ называется *локальным максимумом функции.*

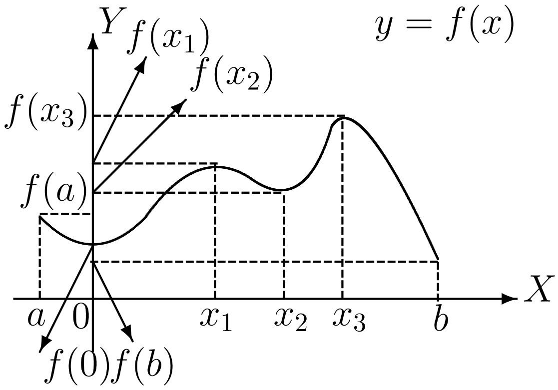


Рис. 8.10

Если предположить, что для функции $y = f(x)$ областью определения является отрезок $[a; b]$, то на схематическом графике (см. 8.10) видно, что функция достигает свои локальные максимумы в точках x_1 и x_3 и равны они соответственно $f(x_1)$ и $f(x_3)$. При этом хорошо видно, что наибольшее значение $f(x)$ достигает в точке x_3. Таким образом, наибольшее значение функции на множестве и максимум функции в точке это ни одно и тоже. Локальные минимумы достигаются функцией в точках 0 и x_2, а равны они соответственно $f(0)$ и $f(x_2)$. При этом наименьшее значение функции на отрезке достигается не в точках локального минимума, а на правом конце отрезка в точке b.

Определение 8.21. Точки локального минимума и локального максимума называются *точками локального экстремума функции*, а значения функции в этих точках называются *точками локальными экстремумами*

[1]Локальный (от лат. localis) – местный, в окрестности данной точки.

функции[1].

8.5.4. Понятие выпуклости графика функции

Изучая окружающие нас процессы, можно увидеть, что растут и убывают они по разному. Одни рвутся вверх вдоль оси ординат, а другие ползут, как черепахи вдоль той же оси. Какие-то камнем падают вниз, а другие скатываются не спеша. И специалисты в технике и экономике скажут, что их интересуют именно те, которые движутся вдоль оси ординат не спеша. Так как галопирующая инфляция, когда стоимость рубля катится вниз в эпоху кризиса, не нравится никому. А медленное, но постоянное увеличение прибыли предприятия есть процесс более обнадёживающий в плане оптимизма. А связаны эти изменения в росте с таким понятием как выпуклость функции на интервале.

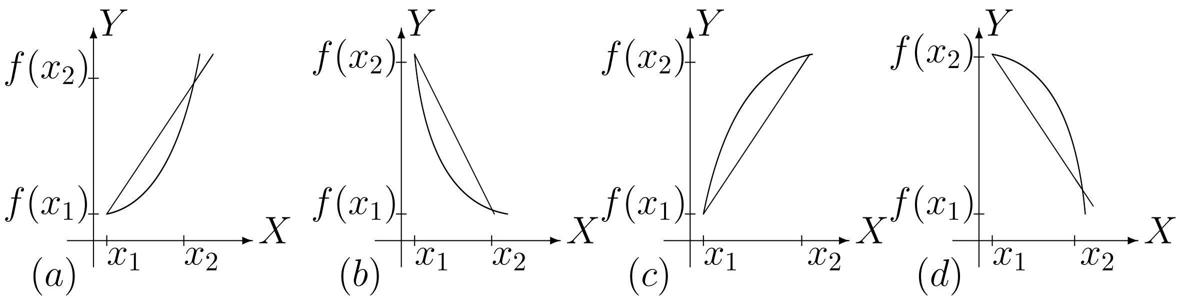


Рис. 8.11

Для того, чтобы разобраться с понятием выпуклости, введём следующие определения, иллюстрацией к которым будут служить схематические графики $(a) - (d)$, представленные на рисунке (8.11).

Определение 8.22. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[x_1; x_2]$ из области определения функции, если *значение в средней точке отрезка не превосходит полусумму значений функции на его концах.* То есть, выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Например, известная из школьной математики функция $y = x^2$ является выпуклой вниз, так как для всех $x_1 \neq x_2$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} =$$

[1]Точки a и b (см. 8.10) не являются точками локального экстремума данной функции, так как они являются граничными точками области определения, а следоваательно, не существует ни одной окрестности этих точек лежащей в области определения.

$$= \frac{2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2}{4} = -\frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{4} < 0.$$

С геометрической точки зрения функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[x_1; x_2]$ из области определения функции, если *график функции располагается ниже прямой, проходящей через точки* $(x_1; f(x_1))$ *и* $(x_2; f(x_2))$.

Так на схематических графиках (a) и (b) (см. Рис. (8.11) изображены функции, выпуклые вниз.

Определение 8.23. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на отрезке $[x_1; x_2]$ из области определения функции, если *значение в средней точке отрезка не меньше полусуммы значений функции на его концах.* То есть, выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Согласно этому определению, одна из любимых в экономике функций $y = \ln x$ является выпуклой вверх, так как[1] для всех $x_1 \neq x_2$

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \ln(x_1 + x_2) - \ln 2 - \frac{\ln(x_1x_2)}{2} =$$

$$= \ln(x_1 + x_2) - \ln 2 - \ln\sqrt{x_1x_2} = \ln\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} > \ln 1 = 0.$$

С геометрической точки зрения функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на отрезке $[x_1; x_2]$ из области определения функции, если *график функции располагается выше прямой, проходящей через точки* $(x_1; f(x_1))$ *и* $(x_2; f(x_2))$.

На схематических графиках (c) и (d) (см. Рис. (8.11) изображены функции, выпуклые вверх.

Замечание 8.7. В экономической теории процессы, склонные к насыщению, изображают с помощью функций выпуклых вверх (трудно представить, что прибыль предприятия может неограниченно расти вверх).

§ 8.6. Элементарные функции

Все функции, которые представляют интерес в задачах науки, техники и экономики, можно разбить на два большие класса: *элементарные функции*

[1] Выражение под знаком последнего логарифма больше 1, так как $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1x_2}$ $(x_1 \neq x_2)$.

и *неэлементарные функции*[1].

Определение 8.24. *Основными элементарными функциямя* называются функции, относящиеся к следующим классам:

- *Степенные функции*
- *Показательные функции*
- *Логарифмические функции*
- *Тригонометрические функции*
- *Обратные тригонометрические функции*

8.6.1. Степенные функции

Определение 8.25. *Степенными функциями* называются функции вида $y = x^\alpha$.

Среди них можно выделить несколько типов в зависимости от числа α.
1. $\boldsymbol{\alpha = n}$, где $n-$ натуральное число. Так как натуральные числа можно разделить на два класса: чётные и нечётные, то согласно этому разбиению степенные функции также делятся на чётные и нечётные.
1.1 $\boldsymbol{n = 2k}$.

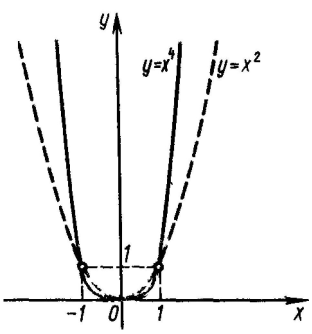


Рис. 8.12

Среди функций этого типа чаще эксплуатируется квадратичная функция $y = x^2$. По ней можно определить основные свойства функций этого класса.
(a) Область определения $D_y = (-\infty; \infty)$;
(b) Множество значений $E_y = [0; \infty)$;
(c) Монотонно убывает при $x \in (-\infty; 0)$;
(d) Монотонно возрастает при $x \in (0; \infty;)$;
(e) Ограничена снизу: $\forall\, x \in D_y\, x^{2k} \geq 0$;
(f) $y_{min}(0) = 0$;
(g) Чётная: $\forall\, x \in D_y\, (-x)^{2k} = x^{2k}$;
(h) График симметричен относительно оси OY;
(i) Является выпуклой вниз на всей области определения.

1.2 $\boldsymbol{n = 2k + 1}$.

[1] В нашем курсе мы рассмотрим только элементарные функции. Точнее, мы рассмотрим те элементарные функции, которые среди элементов не содержат обратные тригонометрические функции, а также тангенс и котангенс (Игнорирование этих функций объясняется как ограниченностью данного курса для бакалавров в области экономики во времени, так и невостребованностью этих функций в задачах экономики).

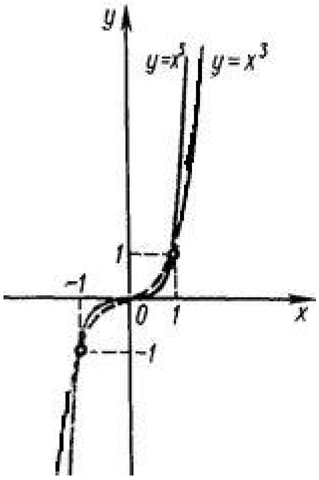


Рис. 8.13

Типичными представителями этого класса являются линейная функция $y = x$ и кубическая функция $y = x^3$. Основные свойства функций этого класса:

(a) Область определения $D_y = (-\infty; \infty)$;
(b) Множество значений $E_y = (-\infty; \infty)$;
(c) Монотонно возрастают при $x \in (-\infty; \infty)$;
(e) Неограничены в области определения;
(f) Нечётные: $\forall\, x \in D_y\, (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$;
(g) Графики симметричны относительно начала координат.
(h) Являются выпуклыми вверх $\forall\, x \in (-\infty; 0)$;
(e) Является выпуклыми вниз $\forall\, x \in (0; \infty)$.

2. $\boldsymbol{\alpha = -n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

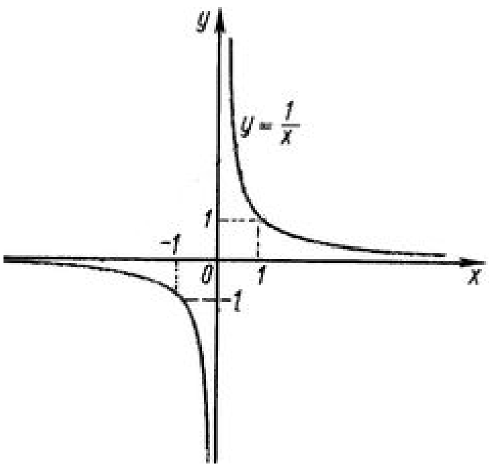


Рис. 8.14

Практический интерес в этом классе функций представляет функция $y = \dfrac{1}{x}$, график которой – гипербола, встречался при изучении кривых второго порядка. Функции этого класса обладают следующими свойствами:

(a) $D_y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;
(b) $E_y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;
(c) Монотонно убывают при $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$;
(e) Неограничены в области определения;
(f) Нечётные: $\forall\, x \in D_y\, (-x)^{2k+1} = -\, x^{2k+1}$;
(g) Графики симметричны относительно на чала координат.
(h) Являются выпуклыми вверх $\forall\, x \in (-\infty; 0)$;
(e) Является выпуклыми вниз $\forall\, x \in (0; \infty)$.

3. $\boldsymbol{\alpha = \dfrac{m}{n}}$ $(m,\, n \in \mathbb{N},\, n = 2k)$.

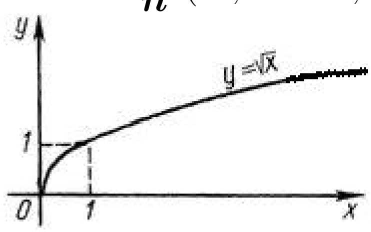


Рис. 8.15

В качестве представителя данного класса рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. График этой функции является верхней половиной параболы $y^2 = x$.

(a) $D_y = [0; \infty)$;
(b) $E_y = [0; \infty)$;
(c) Монотонно возрастает при $\forall x \in D_y$;
(d) Ограничена снизу: $\forall x \in D_y\ \sqrt{x} \geq 0$;

(e) $y_{min}(0) = 0$;

(f) Является выпуклой вверх $\forall\, x \in D_y$.

4. $\boldsymbol{\alpha = \frac{m}{n}}$ $(m,\, n \in \mathbb{N},\, n = 2k+1)$.

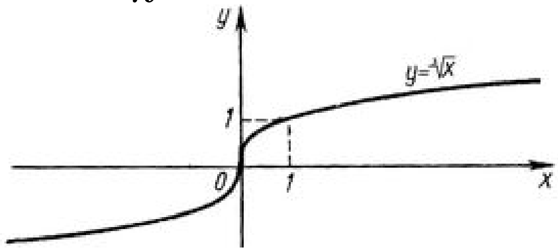


Рис. 8.16

Свойства функций этого вида мы покажем на примере функции $y = \sqrt[3]{x}$, являющейся обратной к функции $y = x^3$.

(a) $D_y = (-\infty; \infty)$;

(b) $E_y = (-\infty; \infty)$;

(c) Монотонно возрастает при $\forall x \in D_y$;

(d) Неограничена в области определения;

(e) Является выпуклой вниз $\forall\, x \in (-\infty; 0)$;

(f) Является выпуклой вверх $\forall\, x \in (0; \infty)$.

8.6.2. Показательные функции

Определение 8.26. *Показательными функциями* называются функции вида $y = a^x$, где a – действительное число: $a > 0$, $a \neq 1$.

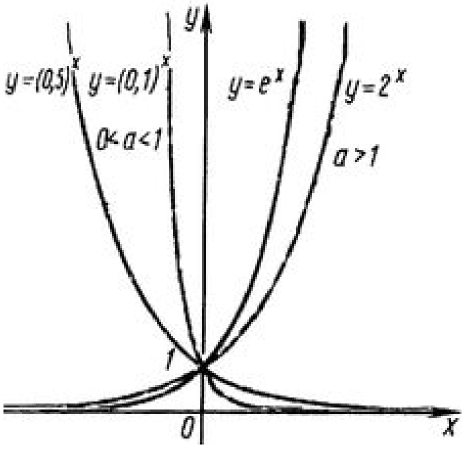


Рис. 8.17

Показательные функции достаточно популярны в задачах экономики, но наибольшим почтением пользуется *экспонента* $y = e^x$ $(e = 2,718281828\ldots)$.

Рассмотрим свойства и графики этих функций:

(a) $D_y = (-\infty; \infty)$;

(b) $E_y = (0; \infty)$;

(c) Если $0 < a < 1$, то монотонно убывают $\forall x \in D_y$;

(d) Если $a > 1$, то монотонно возрастают $\forall x \in D_y$;

(e) Ограничены снизу: $\forall x \in D_y$ $a^x > 0$;

(f) Являются выпуклыми вниз $\forall\, x \in D_y$.

8.6.3. Логарифмические функции

Определение 8.27. *Логарифмическими функциями* называются функции вида $y = \log_a x$, где a – действительное число: $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифмические функции являются функциями обратными показательным, поэтому также находят применение в экономической теории. Среди функций этого класса следует выделить по частоте использования функции с $a = 10$ и $a = e$. Из-за своей востребованности они получили собственные обозначения и имена: $lgx = \log_{10} x$ *– десятичный логарифм* и $lnx = \log_e x$ *– натуральный логарифм*. Логарифмические функции обладают следующими свойствами:

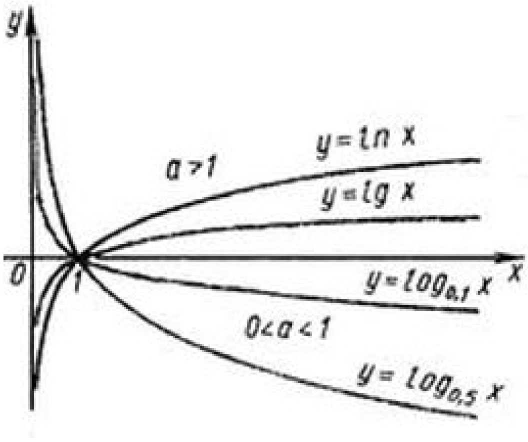


Рис. 8.18

(a) $D_y = (0; \infty)$;
(b) $E_y = (-\infty; \infty)$;
(c) Если $0 < a < 1$, то монотонно убывают $\forall x \in D_y$;
(d) Если $a > 1$, то монотонно возрастают $\forall x \in D_y$;
(e) Неограничены в области определения;
(f) Если $0 < a < 1$, то являются выпуклыми вниз $\forall x \in D_y$.
(g) Если $a > 1$, то являются выпуклы-- ми вверх $\forall x \in D_y$.

8.6.4. Тригонометрические функции

Так как в рамках данного курса дать определение тригонометрических функций $y = sinx$ и $y = cosx$, невозможно, то мы ограничимся показом их графиков и свойств. Что же касается их применения в задачах экономики, то оно связано с двумя их важными свойствами: ограниченностью и периодичностью.

1.

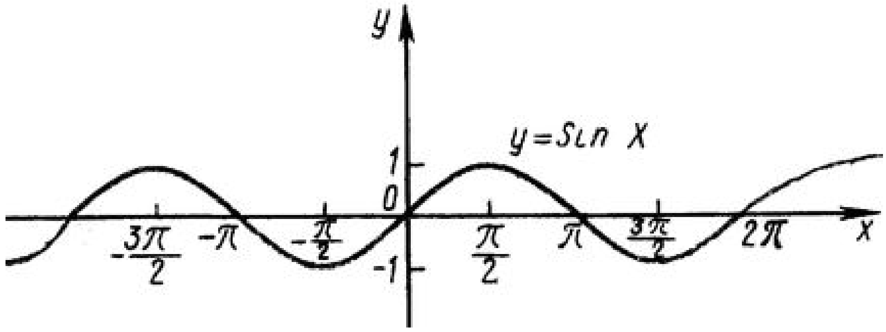


Рис. 8.19

(a) $D_y = (-\infty; \infty)$;
(b) $E_y = [-1; 1]$;
(c) $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $(n \in \mathbb{Z})$ монотонно возрастает;
(d) $\forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $(n \in \mathbb{Z})$ монотонно убывает;
(e) Ограничена снизу и сверху: $\forall x \in D_y \; -1 \leq \sin x \leq 1$;

(f) $y_{min}\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1$, $(n\in\mathbb{Z})$;

(g) $y_{max}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, $(n\in\mathbb{Z})$;

(h) $\forall x\in(2\pi n;\pi+2\pi n)$, $(n\in\mathbb{Z})$ выпукла вверх;

(i) $\forall x\in(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $(n\in\mathbb{Z})$ выпукла вниз;

(j) Является периодической: $\forall\, x\in D_y\ \sin(x+2\pi)=\sin x$.

2.

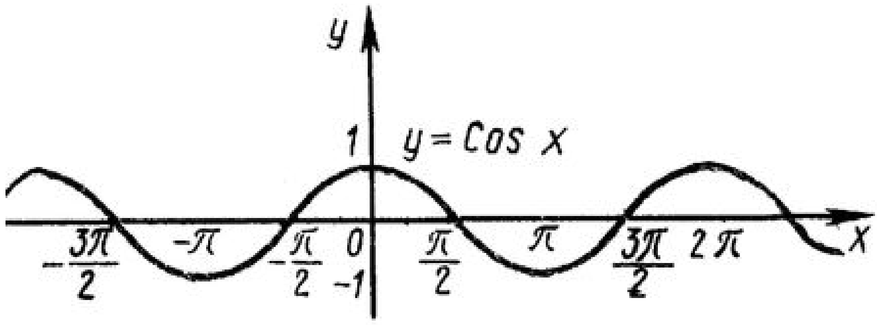


Рис. 8.20

(a) $D_y=(-\infty;\infty)$;
(b) $E_y=[-1;1]$;

(c) $\forall x\in(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $(n\in\mathbb{Z})$ монотонно возрастает;

(d) $\forall x\in(2\pi n;\pi+2\pi n)$, $(n\in\mathbb{Z})$ монотонно убывает;

(e) Ограничена снизу и сверху: $\forall x\in D_y\ -1\le\sin x\le 1$;

(f) $y_{min}(-\pi+2\pi n)=-1$, $(n\in\mathbb{Z})$;

(g) $y_{max}(2\pi n)=1$, $(n\in\mathbb{Z})$;

(h) $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $(n\in\mathbb{Z})$ выпукла вверх;

(i) $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{3\pi}{2}2\pi n\right)$, $(n\in\mathbb{Z})$ выпукла вниз;

(j) Является периодической: $\forall\, x\in D_y\ \cos(x+2\pi)=\cos x$.

В заключение параграфа мы можем дать определение того класса функций, с которым мы будем в дальнейшем иметь дело:

Определение 8.28. *Элементарными функциями* называются функции, которые являются основными элементарными или получаются из них с помощью конечного числа арифметических операций, а также создания из них сложных функций.

Среди классов элементарных функций, встречающихся в задачах экономики, можно выделить:

- *Многочлены*: $P_1(x) = ax + b$, $P_2(x) = ax^2 + bx + c$,
  $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- *Дробно-рациональные функции*: $Q(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- *Иррациональные функции:* $R(x) = \sqrt{ax+b}$.

§ 8.7. Понятие обратной функции

Многие из тех процессов, которые окружают нас в повседневной жизни, обратимы. И поэтому описание этих процессов на языке математики играет большую роль.

Пусть существует функция $y = f(x)$ с областью определения D_f, отображающая эту область во множество своих значений E_f.

Определение 8.29. *Функция $x = g(y)$, область определения которой D_g совпадает с E_f, а множество значений E_g – с D_f, называется функцией обратной к функции $y = f(x)$.*

Обозначается функция, обратная к $y = f(x)$ так: $x = f^{-1}(y)$.

Это обозначение позволяет определить два равенства:

$$\forall\, x \in D_f \;\; f^{-1}(f(x)) = x \text{ и } \forall\, y \in E_f \;\; f\left(f^{-1}y\right) = y.$$

Если $f(x) = x$, то $y = x$. Поэтому $f(x) = x$ – функция, обратная к себе. То есть при изображении на декартовой плоскости прямая $y = x$ служит *зеркалом*, в котором отражаются друг в друга взаимно обратные функции. Так на рисунке (8.21) видно, что взаимно обратные функции $y = 2x$ $y = \dfrac{x}{2}$ симметрично расположены относительно оси симметрии $y = x$.

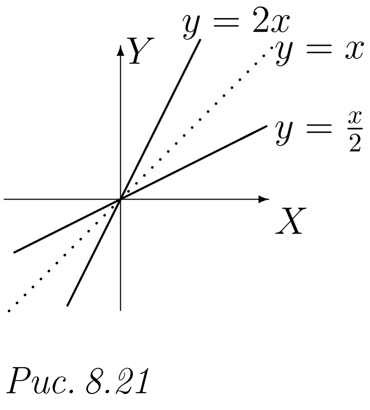


Рис. 8.21

Чтобы определить для данной функции $y = f(x)$ обратную, нужно:
1. Решить уравнение $y = f(x)$ относительно x.
2. Обозначить его решение x как y, а y обозначить через x. Например, чтобы найти функцию, обратную к функции $y = 2x$, нужно найти x из уравнения функции: $x = \dfrac{y}{2}$. Поменяв обозначения переменных величин местами: $y = \dfrac{x}{2}$, мы получаем функцию $y = \dfrac{x}{2}$, обратную[1] к функции $y = 2x$.

ЛЕКЦИЯ 9.

§ 9.1. Понятие бесконечно малой функции

Определение 9.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке*[1] x_o, если **для любого заранее заданного положительного числа** ε можно найти такую выколотую окрестность этой точки, **во всех точках которой** значения функции по абсолютной величине $|\alpha(x)|$ будут оставаться меньше ε.

Замечание 9.1. Если для каждого, каким бы малым оно не было, выбранного положительного числа ε подбирать симметричную выколотую (см. 8.8) окрестность точки с центром в x_o и радиусом $\delta = \delta(\varepsilon)$, то данное определение можно переписать так: функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* x_o, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_o)\, |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

С геометрической точки зрения данное определение означает, что часть графика функции $\alpha(x)$ вблизи точки x_o будет заключена в полосе $(-\varepsilon; \varepsilon)$:

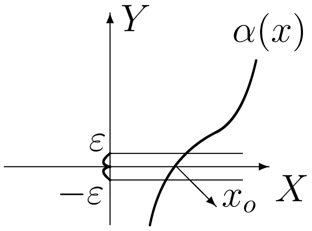


Рис. 9.1

Из определения бесконечно малой функции следует, что если функция вблизи точки x_o – постоянна, то она может быть бесконечно малой только в том случае, когда эта постоянная равна нулю. Функция $\alpha(x) \equiv 0$ есть бесконечно малая. В чём различие между бесконечно малой величиной и постоянной малой величиной? Представьте, что на льдине лежит монета. Льдина попадает в теплое течение и начинает таять. Размеры монеты малы, но постоянны. Льдина при таянии уменьшается и, наконец, вся растаивает в некоторый момент времени T_o. Размер тающей льдины, как функция времени T будет той самой бесконечно малой величиной вблизи момента T_o.

Примерами бесконечно малых функций в точке $x_o = 0$ являются степенные функции $y = x^n$ $(n > 0)$ (см., например, (8.12)-(8.13), (8.15)-(8.16)), а также тригонометрические функции: $y = \sin x$ в точках $x_o = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ (см. (8.19)), и $y = \cos x$ в точках $x_o = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ (см. (8.20)).

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций.

Свойство 9.1. *Сумма двух бесконечно малых в точке функций есть бесконечно малая функция в этой точке.*

[1] На самом деле не только в точке, а во всех точках окрестности, которую можно найти для каждого положительного числа ε, о котором говорится в определении.

Допустим, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые функции в точке x_o, а ε – некоторое положительное число. Согласно определению (9.1) найдем такую окрестность $U(x_o)$, в которой для всех x из этой окрестности

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно свойству модуля, известному из курса школьной математики[1]:

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\alpha(x) + \beta(x)$ бесконечно малая функция.

Свойство 9.2. *Произведение бесконечно малой в точке функции на функцию ограниченную есть бесконечно малая функция в этой точке.*

Пусть $f(x)$ – ограниченная функция: $|f(x)| < M$, а $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_o. Так как для любого положительного числа ε можно подобрать окрестность $U(x_o)$, в которой для любого $x \in U(x_o)$ $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, то получаем[2]:

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Из этого свойства вытекает

Свойство 9.3. *Произведение двух бесконечно малых в точке функций есть бесконечно малая функция в этой точке.*

В дальнейшем нам понадобятся знания о поведении функций в бесконечности, поэтому введём определения, аналогичные определениям (8.6) и (9.1).

Определение 9.2. Пусть M – некоторое положительное число. Тогда *M-окрестностью бесконечности* называется множество действительных чисел x таких, что

$$x \in (-\infty; -M) \cup (M; \infty).$$

Обозначим это множество через $U_M(\infty)$.

Определение 9.3. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в бесконечности, если* **для любого заранее заданного положительного числа** ε *можно найти такую* M*–окрестность бесконечности* $U_M(\infty)$, **во всех точках которой** *значения функции по абсолютной величине* $|\alpha(x)|$ *будут оставаться меньше* ε.

[1]Для любых двух слагаемых модуль суммы не больше суммы модулей: $\forall a, b \ |a+b| \le |a| + |b|$.

[2]Для любых двух чисел модуль произведения равен произведению модулей: $\forall a, b \ |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

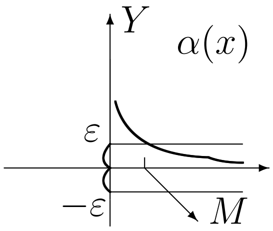


Рис. 9.2

Геометрический смысл данного определения означает, что часть графика функции $\alpha(x)$, попав в полосу $(-\varepsilon;\varepsilon)$ при большом удалении от начала координата, останется в ней навсегда. Следовательно, **если функция бесконечно мала на бесконечности, то её график имеет асимптоту** $y = 0$ (см. Рис. (9.2)).

Нетрудно доказать, что свойства (9.1)-(9.3) справедливы и для бесконечно малых в бесконечности.

Примерами бесконечно малых функций в бесконечности являются степенные функции $y = x^n$ при $n < 0$ (см., например, (8.14)), а также показательные функции $y = a^x$, когда их основание $0 < a < 1$ (см. (8.17)).

С понятием бесконечно малой функции связано одно из самых важных понятий математического анализа

§ 9.2. Понятие предела функции в точке

Определение 9.4. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_o, если функция $f(x)$ отличается от этого числа на бесконечно малую функцию в данной точке.

То есть, число A есть предел $f(x)$ в точке x_o, если $\boldsymbol{f(x) = A + \alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_o функция.

Обозначается предел следующим образом:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = A.$$

А читается это обозначение так:*предел функции* $f(x)$ *в точке* x_o *равен* A.

Замечание 9.2. Следует заметить (см. (9.1)), что в дальнейшем, при вычислении пределов предполагается, что хотя аргумент функции x стремится к x_o, но $\boldsymbol{x \neq x_o}$.

Рассмотрим свойства пределов, вытекающие из определения (9.4).

Свойство 9.4. *Если функция имеет в точке предел , то существует окрестность точки, в которой функция ограничена.*

Допустим, что $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$. Тогда по определению предела существует бесконечно малая функция $\alpha(x)$ такая, что $f(x) = A + \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то существует такая окрестность $\mathring{\mathrm{U}}(x_o)$, в которой[1] $|\alpha(x)| < 1$.

Следовательно,

$$|f(x)| = |A + \alpha(x)| \leq |A| + |\alpha(x)| < |A| + 1.$$

[1]Ведь по определению для любого положительного числа ε можно найти окрестность, в которой $|\alpha(x)| < \varepsilon$, а значит это можно сделать и при $\varepsilon = 1$.

То есть, существует окрестность точки x_o, в которой все значения функции меньше, чем $|A|+1$, а это и означает, что функция ограничена.

Свойство 9.5. *Предел константы равен самой константе.*

Предположим, что $f(x) \equiv c$. Тогда верно равенство $f(x) = c + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_o} c = c$.

Свойство 9.6. *Предел бесконечно малой функции в точке равен нулю.*

Пусть $f(x) = \alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_o. Тогда её можно представить в виде суммы: $f(x) = 0 + \alpha(x)$. Таким образом, согласно определению (9.4), $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$.

Свойство 9.7. *Предел суммы двух функций в данной точке равен сумме их пределов, если они существуют.*

Допустим, что

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_o} g(x) = B.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$, то существует бесконечно малая функция $\alpha(x)$ такая, что $f(x) = A + \alpha(x)$. Аналогично $g(x) = B + \beta(x)$. Следовательно,

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x).$$

В силу того, что сумма бесконечно малых функций $\alpha(x) + \beta(x)$ есть бесконечно малая функция (9.1), функция $f(x) + g(x)$ отличается от константы $A + B$ на бесконечно малую функцию. А значит по определению

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = A + B$$

или

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x).$$

Свойство 9.8. *Предел произведения двух функций в данной точке равен произведению их пределов, если они существуют.*

Пусть

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_o} g(x) = B.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) g(x)) = A \cdot B.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$. Аналогично $g(x) = B + \beta(x)$. Следовательно,

$$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = A \cdot B + A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

В силу того, что $A \cdot \beta(x)$, $B \cdot \alpha(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ есть бесконечно малые функции ((9.2)-(9.3)), функция $f(x)g(x)$ отличается от константы $A \cdot B$ на бесконечно малую функцию. А это означает, что

$$\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = A \cdot B$$

или

$$\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_o} f(x) \cdot \lim_{x \to x_o} g(x).$$

Если одну из функций-сомножителей принять за константу, то вытекает следствие, которое является одним из самых эксплуатируемых правил:

Следствие 9.1. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака предела*[1] .

Свойство 9.9. *Предел частного от деления двух функций в данной точке равен частному от деления их пределов, если они существуют (и предел знаменателя не равен нулю).*

Предположим, что

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_o} g(x) = B \ \ (B \neq 0).$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Как и в предыдущих двух свойствах, $f(x) = A + \alpha(x)$, а $g(x) = B + \beta(x)$.

Разделим почленно первое равенство на второе:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x} =$$

Далее, прибавим и вычтем дробь $\dfrac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} + \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x} - \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B^2 + B \cdot \beta(x)} =$$

$$\frac{A}{B} + (B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)) \frac{1}{B^2 + B \cdot \beta(x)}.$$

Так как множитель перед дробью $B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)$ бесконечно малая функция (как разность бесконечно малых функций), а дробь ограничена, то их произведение является бесконечно малой функцией.

[1]На практике это означает, что его **нужно** выносить из под знака предела.

Следовательно, функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ отличается от константы $\dfrac{A}{B}$ на бесконечно малую функцию. Поэтому

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

или

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o}g(x)}.$$

Сформулируем без доказательства в виде свойства *теорему о замене переменной для пределов*:

Свойство 9.10. *Если существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=y_o$ *и* $\lim\limits_{y\to y_o}g(y)=A$ *и, кроме этого существует окрестность* $\mathring{U}(x_o)$, *для всех точек которой* $f(x)\neq y_o$, *тогда в точке* x_o *существует предел сложной функции* $y=g(f(x))$ *такой, что*

$$\lim_{x\to x_o}g(f(x))=\lim_{y\to y_o}g(y)=A.$$

9.2.1. Понятие предела функции в бесконечности

При изучении процессов в технике и экономике часто воникает желание узнать, как ведёт себя этот процесс во времени и в пространстве при условии, что время является будущим, а пространство удалённым. Зная функцию, которая описывает данный процесс во времени или в пространстве, можно заставить аргумент (который и описывает это время или пространство) заставить его стремится в бесконечность. И, используя (9.3), по аналогии с определением (9.4) можно дать следующее

Определение 9.5. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *в бесконечности*, если в бесконечности функция $f(x)$ отличается от этого числа на бесконечно малую функцию.

То есть, число A есть предел $f(x)$ в бесконечности, если $\boldsymbol{f(x)=A+\alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая в бесконечности функция.

Обозначается предел следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

И читается так: *предел функции* $f(x)$ *в бесконечности равен* A.

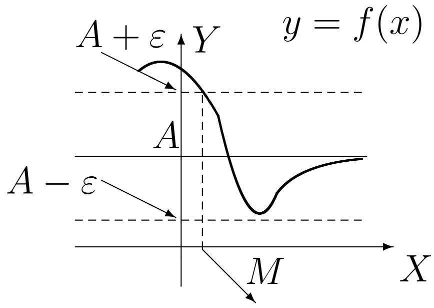


Рис. 9.3

Геометрический смысл того, что функция имеет конечный предел на бесконечности, состоит в том, что график такой функции имеет горизонтальную асимптоту $y = A$. Следовательно, *чтобы найти горизонтальную асимптоту графика функции, нужно вычислить предел функции в бесконечности.*

Ранее (9.2), мы определили $M-$окрестность бесконечности как множество точек на оси OX. Если определить аналогичную $N-$окрестность бесконечности на оси OY:

$$U_N(\infty) = \{y \in OY : y \in (-\infty; -N) \cup (N; \infty),$$

то можно будет говорить о функциях, имеющих бесконечный предел.

9.2.2. Понятие бесконечно большой функции

Определение 9.6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией в точке x_o*, если для любого положительного числа N можно найти выколотую окрестность точки x_o такую, что для всех её точек x значения функции $f(x)$ будут находиться в $N-$окрестности бесконечности.

Или, если подбирать симметричную $\delta-$окрестность точки, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией в точке x_o*, если

$$\forall\, N > 0\ \exists\, \delta = \delta(N) > 0\colon \forall\ x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta(x_o) \Rightarrow f(x) \in U_N(\infty).$$

Короче это записывают так:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \infty.$$

В школьной математике примерами[1] бесконечно большой функции в окрестности точки $x_o = 0$ являются все степенные функции $y = x^n$ при $n < 0$ (см. (8.14)) , а также логарифмические функции $y = \log_a x$ (см. (8.18)).

Аналогично выглядит

Определение 9.7. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией в бесконечности*, если для любого положительного числа N можно найти $M-$окрестность бесконечности такую, что для всех её точек x значения функции $f(x)$ будут находиться в $N-$окрестности бесконечности.

Или в символьной форме:

$$\forall\, N > 0\ \exists\, M = M(N) > 0\colon \forall\ x \in U_M(\infty) \Rightarrow f(x) \in U_N(\infty), .$$

[1] В повести «Колесо времени» А.И. Куприн посвятил тангенсу, как бесконечно большой функции в $x_o = \dfrac{\pi}{2}$, восторженную мини-оду.

которая эквивалентна такой записи:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Примерами бесконечно большой функции в бесконечности служат все степенные функции $y = x^n$ при $n > 0$ (см. (8.12)-(8.13), (8.15)-(8.16)), показательные функции $y = a^x$ (см. (8.17)), а также логарифмические функции $y = \log_a x$ (см. (8.18)).

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями в одной точке (или в бесконечности) существует связь, выраженная в следующих теоремах.

Теорема 9.1. (О связи бесконечно больших и бесконечно малых функций в точке и в бесконечности) *Если в точке x_o (в бесконечности) функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ в этой точке (в бесконечности) будет бесконечно большой.*

Теорема 9.2. *Если в точке x_o (в бесконечности) функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ в этой точке (в бесконечности) будет бесконечно малой.*

Докажем первую из этих теорем. Так как функция $\alpha(x)$ является в точке x_o бесконечно малой, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти выколотую окрестность $\mathring{\mathrm{U}}(x_o)$, для всех точек которой $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Следовательно, в этой окрестности

$$|f(x)| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как ε – любое положительное число, то, выбирая его сколь угодно малым, мы можем сделать число $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ сколь угодно большим. При таком выборе значения функции $f(x)$ для точек из найденной $\mathring{\mathrm{U}}(x_o)$ окажутся в N–окрестности бесконечности. Что и доказывает истинность теоремы.

Аналогичным образом можно доказать и следующую теорему.

Эти теоремы позволяют сформулировать два правила *арифметики пределов*, которые мы используем в дальнейшем при вычислении пределов.

Правило 9.1. Если c – некоторая константа, то

$$\left(\boldsymbol{\frac{c}{0}}\right) = \boldsymbol{\infty}.$$

Правило 9.2. Если c – некоторая константа, то

$$(\boldsymbol{\frac{c}{\infty}}) = \mathbf{0}.$$

Замечание 9.3. Следует заметить, что так как в определении бесконечно малой функции в точке x_o говорится о *выколотой окрестности* точки x_o то, когда $\boldsymbol{x \to x_o}$, $\boldsymbol{x \neq x_o}$. поэтому в правиле (9.1) знаменатель не равен нулю, а сам значок $\left(\dfrac{c}{0}\right)$ является обозначением стремления к нулю в знаменателе дроби, но ни в коем случае ни равенству знаменателя нулю. (Поэтому он и записывается в скобках, чтобы не восприниматься в буквальном смысле делением на нуль). То есть, в высшей математике, как и в школьной математике, **на нуль делить нельзя**.

Точно также и в правиле (9.2) знаменатель стремится к бесконечности, но в буквальном смысле совпадать с ней не может. И точно также наличие скобок при записи спасает от буквального понимания деления на бесконечность.

Задача 9.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x}$.

Решение. Подставим вместо переменной x предельное значение аргумента 0 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x}=\left(\dfrac{3}{0}\right)$. Так как 3 – константа, то согласно правилу (9.1) получаем ∞. Запись решения может выглядеть полностью так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty.$$

Задача 9.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3}{x}$.

Решение. Подставим вместо переменной x предельное значение аргумента ∞ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3}{x}=\left(\dfrac{3}{\infty}\right)$. Так как 3 – константа, то согласно правилу (9.2) получаем 0. Запись решения может выглядеть полностью так:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3}{x}=\left(\frac{3}{\infty}\right)=0.$$

9.2.3. Эквивалентность бесконечно больших функций

Бесконечно большие функции в окрестности точки или бесконечности можно сравнивать, если ввести

Определение 9.8. Две функции, бесконечно большие в точке (или в бесконечности) называются *эквивалентными бесконечно большими функциями*, если предел их отношения в данной точке (или в бесконечности) равен 1.

Введя значок эквивалентности $\sim$, напишем это так:

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to x_o \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)=\lim_{x\to x_o} g(x)=\infty \text{ и } \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

(или соответственно

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \text{ и } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.)$$

Задача 9.3. Доказать, что многочлены

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ \ (a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n})$$

и $Q_n(x) = b_n x^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ являются эквивалентными бесконечно большими функциями в бесконечности.

Решение. Очевидно, что пределы

$$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\infty} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\big) = \infty$$

и

$$\lim_{x\to\infty} Q_n(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty.$$

Следовательно, функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ являются бесконечно большими в бесконечности. Найдём предел их отношения.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = ?$$

Так как после подстановки вместо переменной x её предельного значения мы получаем так называемую *неопределённость типа бесконечность на бесконечность*, то применить свойство (9.9) о том, что предел частного равен частному пределов, мы не можем в силу того, что пределы числителя и знаменателя не являются числами, а стремятся к бесконечности. Поэтому нам придётся вспомнить школьную математику и, учитывая, что знаменатель не равен нулю, сначала поделить почленно числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_n x^n}{a_n x^n} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_o}{a_n x^n}\right) =$$

После сокращения дробей получим:

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_o}{a_n x^n}\right) =$$

Так как от неопределённости мы избавились, воспользуемся свойствами (9.7) о том, что предел суммы равен сумме пределов и следствием (9.1) о том, что константу можно вынести за знак предела:

$$= \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{a_n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} =$$

Используя то, что согласно (9.7) предел константы равен самой константе, и, снова подставив вместо переменной её предельное значение во все пределы, имеем:

$$= 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) + \frac{a_o}{a_n} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) =$$

В силу правила (9.2):

$$= 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot 0 + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot 0 + \frac{a_o}{a_n} \cdot 0 = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1.$$

Поэтому многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ эквивалентны в бесконечности.

Результат этой задачи позволяет сформулировать

Следствие 9.2. *Многочлены равных степеней с одинаковыми старшими коэффициентами эквивалентны в бесконечности.*

9.2.4. Неопределённость типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

При решении задачи (9.5) мы уже сталкивались с этим понятием, помешавшим применить свойства пределов. Но сумели его обойти, не разбираясь в том, что это такое.

В школьной математике алгебраические операции определены однозначно, поэтому такое явление как неопределённость в школе не встречается. Рассмотрим три предела, на примере которых с помощью одних и тех же бесконечно больших в бесконечности функций попробуем выяснить, почему неопределённость называется неопределённостью.

Допустим, что нам даны функции:

$$f(x) = x; \;\; g(x) = x^2; \;\; \varphi(x) = 2x^2.$$

Очевидно, что все они являются бесконечно большими в бесконечности, так как

$$\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} x^2 = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty.$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1}=2.$

В каждом из трёх пределов после подстановки предельного значения аргумента (∞) вместо самого аргумента функции мы получали одно и то же выражение – $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Но после стандартных преобразований из элементарной математики и с учетом соответствующих свойств и правил вычисления пределов мы имеем разные результаты. Именно по этой причине данная ситуация и получила название неопределённости. И когда она появляется, основной задачей является *раскрытие неопределённости* – то есть её устранение с помощью соответствующих преобразований из элементарной математики и рассмотренных выше свойств и правил.

Задача 9.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^4-8x^3+5x^2+8}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (∞) вместо аргумента x, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^4-8x^3+5x^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

На основании следствия (9.2) получаем возможность упростить числитель и знаменатель дроби с помощью функций, эквивалентных в бесконечности:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{3x^4}=\lim_{x\to\infty}2x=2\cdot\infty=\infty.$$

Таким образом, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^4-8x^3+5x^2+8}=\infty}$.

Найдем без комментариев ещё два аналогичных предела:

Задача 9.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^7-8x^3+5x^2+8}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^7-8x^3+5x^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{3x^7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0.$$

Следовательно, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^7-8x^3+5x^2+8}=0}$.

Задача 9.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^5-8x^3+5x^2+8}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^5-8x^3+5x^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{3x^5}=\lim_{x\to\infty}2=2.$$

В результате имеем, что $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+2x^2-1}{3x^5-8x^3+5x^2+8}=2}$.

9.2.5. Неопределённость типа $\left(\frac{0}{0}\right)$

С помощью тех же функций $f(x)=x$; $g(x)=x^2$; $\varphi(x)=2x^2$, рассматривая их как бесконечно малые в точке $x_o=0$, можно убедиться, что при одной и той же ситуации $\left(\frac{0}{0}\right)$ аналогичные пределы приводят к различным результатам.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x=0.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1}=2.$

Различие этих результатов объясняет, почему ситуация $\left(\frac{0}{0}\right)$ также является неопределённостью[1]. Рассмотрим две задачи, позволяющие понять, как можно бороться с данной неопределённостью.

Задача 9.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (2), вместо самого аргумента x, выполним вычисления:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^2-7\cdot 2+2}{2^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Наличие нулей в числителе и знаменателе говорит о том, что один из корней числителя и знаменателя равен 2. Для знаменателя это очевидно после раскрытия разности квадратов: $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Для разложения

[1] В рассмотренных примерах $x\to 0$, но $x\neq 0$. Поэтому ещё раз подчёркиваем, что ни какого деления на нуль в этих примерах не происходит.

числителя на линейные множители нужно решить квадратное уравнение[1]. Зная его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$, можно разложить квадратный трёхчлен на множители и подставить в числитель:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{(x-2)(x+2)} =$$

Сократив в числителе и знаменателе разность $x-2$, избавимся от неопределённости:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3\cdot 2-1}{2+2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Следовательно, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4} = 1,25}$.

Задача 9.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (-1), вместо самого аргумента x, выполним вычисления:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1} = \frac{\sqrt{-1+5}-\sqrt{3-(-1)}}{-1+1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

В данном пределе наличие нулей в числителе и знаменателя объясняется присутствием двучлена $x+1$. Но если в знаменателе он виден, то в числителе его можно обнаружить только с помощью основного свойства дроби, умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю относительно формулы *разность квадратов*[2]:

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+5-(3-x)}{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{-1+5}+\sqrt{3-(-1)}} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

Таким образом, $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1} = 0,5}$.

[1] На самом деле уравнение можно не решать, так как, зная один корень $x_1 = 2$, можно с помощью теоремы Виета найти второй корень: $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$, где c – свободный член, а a – старший коэффициент квадратного трёхчлена. В нашем случае $x_1 x_2 = \dfrac{2}{3}$. Поэтому второй корень $x_2 = \dfrac{2}{3\cdot 2} = \dfrac{1}{3}$.

[2] Для формулы *разность квадратов* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ двучлены $a-b$ и $a+b$ являются сопряжёнными.

9.2.6. Эквивалентность функций, бесконечно малых в точке

Наряду с эквивалентностью бесконечно больших функций существует понятие эквивалентных бесконечно малых в данной точке функций.

Определение 9.9. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые в окрестности точки x_o, называются *эквивалентными бесконечно малыми в данной точке*, если предел их отношения в данной точке равен 1, то есть:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_o \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} \alpha(x) = \lim_{x\to x_o} \beta(x) = 0 \text{ и } \lim_{x\to x_o} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Для решения ряда задач нам понадобится

Таблица эквивалентности бесконечно малых в точке $x_o = 0$

при $x \to 0$	$e^x - 1 \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$ $\sin x \sim x$ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Доказательство эквивалентности бесконечно малых функций из этой таблицы в нашу программу не входит, но геометрический смысл этой эквивалентности очевиден: если рассмотреть графики функций, входящих в отношения в точке $x_o = 0$, то можно увидеть, что, чем меньше рассматриваемая окрестность нуля, тем труднее отличить поведение графиков этих функций от поведения прямой $y = x$.

Решим несколько задач с помощью таблицы.

Задача 9.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{8x}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (0), вместо самого аргумента x, выполним вычисления:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{8x} = \frac{\ln(1+4\cdot 0)}{8\cdot 0} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Из таблицы эквивалентности следует, что при $x \to 0$ $\ln(1+4x) \sim 4x$. Поэтому

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{8x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = 0,5.$$

То есть, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{8x} = 0,5}$.

Задача 9.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\left(e^{4x}-1\right)}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (0), вместо самого аргумента x, выполним вычисления:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 6x}{x\left(e^{4x}-1\right)}=\frac{\sin^2(6\cdot 0)}{0\cdot\left(e^{4\cdot 0}-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Из таблицы эквивалентности следует, что при $x\to 0$ $\sin^2 6x\sim(6x)^2$, а $e^{4x}-1\sim 4x$. Поэтому

$$=\lim_{x\to 0}\frac{36x^2}{x\cdot 4x}=\lim_{x\to 0}9=9.$$

Таким образом, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\left(e^{4x}-1\right)}=9}$.

Задача 9.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$.

Решение. Подставив предельное значение аргумента (0), вместо самого аргумента x, выполним вычисления:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1-\cos 3\cdot 0}{3\cdot 0^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Из таблицы эквивалентности следует, что при $x\to 0$ $1-\cos 3x\sim\dfrac{(3x)^2}{2}$. Следовательно,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=1,5.$$

В результате получаем: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}=1,5}$.

9.2.7. Приложение числа e к задаче о начислении процентов

В конце семнадцатого столетия швейцарский математик Иоганн Бернулли в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода показал, что процентный доход в случае сложного процента имеет предел[1]:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

[1]Как e его обозначил позднее Леонард Эйлер.

Позднее было показано, что при замене целочисленной переменной n на действительную переменную x число e можно определить как:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{9.1}$$

Попробуем использовать открытие Бернулли. Предположим, что начальный вклад в банк равен S_o рублей. Ежегодная ставка банка составляет $p\%$. Задача состоит в определении суммы вклада S_t через t лет.

Каждый, имевший дело с банком, знает, что под понятием *сложные проценты* понимается процесс, при котором начисление процентов меняется от одного расчётного периода к другому за счёт начисления *процента на процент* по следующей формуле:

$$S_t = S_o \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

В финансовых расчётах начисление процентов на первоначальный капитал S_o может производиться так часто, что этот процесс можно рассматривать как непрерывный. Поэтому в этом случае используют *непрерывные проценты*. Суть которых заключается в том, что количество m периодов начислений стремится к бесконечности, а временной интервал между периодами – к нулю. Если таких периодов m, то процент начисления за $\frac{1}{m}$–ю часть года составляет $\frac{p\%}{m}$. Поэтому

$$S_t = \lim_{m \to \infty} \left(S_o \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mt}\right) = S_o \lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{pt}{100}} = S_o e^{\frac{pt}{100}}.$$

Таким образом, *формула непрерывных процентов* имеет вид:

$$S_t = S_o e^{\frac{pt}{100}}.$$

Замечание 9.4. Чтобы «подогнать» результат под (9.1), нужно чтобы в показателе скобки стояла величина, взаимно обратная второму слагаемому скобки, то есть $\frac{100m}{p}$. Так как m в показателе уже есть, то мы умножили и разделили одновременно показатель на $\frac{100}{p}$. А затем воспользовались свойством показательной функции: $a^{rs} = (a^r)^s$, оставив в скобке $\frac{100m}{p}$ в качестве r и вынеся из скобки $\frac{pt}{100}$ аналогично s.

Рассмотрим две задачи, связанные с техникой вычисления предела (9.1). Этот предел связан с неопределённостью типа (1^{∞}).

Задача 9.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$.

Решение. Если вместо переменной x подставить предельное значение аргумента, то можно увидеть, что содержимое скобки будет стремится к 1, а показатель – к бесконечности. То есть, мы получаем неопределённость типа (1^{∞}). Но так как произведение $\dfrac{4}{x}\cdot 2x \neq 1$, то, применяя преобразования, аналогичные преобразованиям из комментария (9.4):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot\frac{4}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{4\cdot 2x}{x}}=e^{8},$$

получим: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}=e^{8}}$.

Задача 9.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{-x}$.

Решение. Чтобы понять, есть в данном случае неопределённость или нет, определим, куда стремится дробь в скобках.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Так как показатель стремится к $-\infty$, то мы имеем дело с неопределённостью типа $(1)^{\infty}$. Поэтому мы должны представить данную дробь в форме содержимого в скобках (9.1). Для этого разделим почленно числитель на знаменатель[1], предварительно прибавив и отняв в числителе число 2:

$$\frac{2x-1}{2x+2}=\frac{2x+2-2-1}{2x+2}=\frac{2x+2}{2x+2}+\frac{-3}{2x+2}=1-\frac{3}{2x+2}.$$

Таким образом, мы должны вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)^{-x}.$$

В силу того, что $-\dfrac{3}{2x+2}\cdot(-x)\neq 1$, умножим и разделим показатель

[1] Заметим, что это не единственный способ преобразования. Существуют и другие способы, например:

$$\frac{2x-1}{2x+2}=1+\frac{2x-1}{2x+2}-1=1+\frac{2x-1-2x-2}{2x+2}=1+\frac{-3}{2x+2}=1-\frac{3}{2x+2}.$$

на $\left(-\dfrac{2x+2}{3}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)^{-\frac{2x+2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2x+2}\right)\cdot(-x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)^{-\frac{2x+2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2x+2}\cdot(-x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x}{2x+2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3x}{2x+2}}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно[1], $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{-x}=e^{\frac{3}{2}}}$.

§ 9.3. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве

Как следует из комментария к задаче (9.13), её решение было получено с использованием понятия непрерывности функции, которое интуитивно выглядит очевидным. *Если провести карандаш по бумаге, не отрывая его грифель от бумаги, то получится непрерывная кривая*[2]. В силу того, что при помощи интуиции можно обнаружить явление, но доказать нельзя, введём следующее

Определение 9.10. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x_o из области её определения, если бесконечному малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*, то есть

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_o)=0.$$

Определение 9.11. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Задача 9.14. Доказать, что функция $f(x)=x^2$ непрерывна в области определения.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая прямая: $D_f=(-\infty;\infty)$. Пусть x_o – произвольная точка из D_f. Выберем некоторое приращение аргумента $\Delta x>0$. Точка $x=x_o+\Delta x$ также является точкой из D_f, поэтому $f(x)=(x_o+\Delta x)^2$. Рассмотрим приращение функции в точке x_o:

$$\Delta f(x_o)=(x_o+\Delta x)^2-x_o^2.$$

[1]В предпоследнем равенстве перестановка предела и экспоненты местами возможна по причине непрерывности экспоненты.

[2]К сожалению, данное утверждение не может служить формальным определением, так как неясно с формальной точки зрения, что означает *не отрывая карандаш от бумаги*. Как этот процесс можно проследить?

С помощью формулы «разность квадратов» вычислим предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0}\left((x_o+\Delta x)^2-x_o^2.\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x(2x_o+\Delta x)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(2x_o+\Delta x)=0\cdot 2x_o=0.$$

Следовательно, согласно определению (9.10), функция $f(x)=x^2$ непрерывна в точке x_o. А так как эта точка выбрана произвольно в D_f, то и в любой другой точке из D_f функция будет непрерывна. Поэтому она непрерывна во всей области определения, что вытекает из определения (9.11).

Подобным образом, с точностью до техники алгебраических преобразований и вычисления пределов в точке, можно доказать непрерывность каждой отдельной основной элементарной функции. А затем, с помощью доказанных выше свойств пределов доказать следующую теорему.

Теорема 9.3. О непрерывности элементарных функций *Любая элементарная функция является непрерывной в области определения.*

Из определения (9.10) вытекает второе определение непрерывности функции в точке:

Определение 9.12. *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_o\in D_f$, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке, то есть*

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o).$$

А из этого определения очевидно

Следствие 9.3.

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=f(\lim_{x\to x_o}x)=f(x_o).$$

То есть, *каждая непрерывная в точке функция перестановочна со своим пределом в этой точке.*

Именно это следствие и было использовано при вычислении предела в задаче (9.13).

§ 9.4. Геометрические приложения пределов. Асимптоты графика функции

Раннее, изучая асимптоты, мы дали определение асимптоты кривой (см. **??**). Это определение можно использовать при изучении асимптот графика функции. Далее, определив предел функции в бесконечности (см. стр.26), мы установили, что *если $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$, то график функции $y=f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=A$.*

Теперь нам осталось научиться находить вертикальные и наклонные[1] асимптоты графика функции.

Определение 9.13. Если функция является бесконечно большой в точке $x = a$, то есть, *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, *то прямая* $x = a$ *является вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$.

Замечание 9.5. Говоря о вертикальных асимптотах графика функции, следует сказать, что в зависимости от того, стремится аргумент функции x к точке a слева или справа, график может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от поведения функции. Так, например, гипербола, являясь графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$, при $x \to 0 + 0$ (читается: *x стремится к нулю справа*) стремится вверх (см. (см. 8.14), то есть в $+\infty$, а график функции $y = \ln x$ при точно таком же $x \to 0 + 0$ стремится вниз, то есть в $-\infty$ (см. 8.18).

Наклонные асимптоты. Предположим, что задана функция $y = f(x)$ и допустим, что её график имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Таким образом, задача о нахождении асимптоты сводится к задаче определения коэффициентов k и b в уравнении прямой.

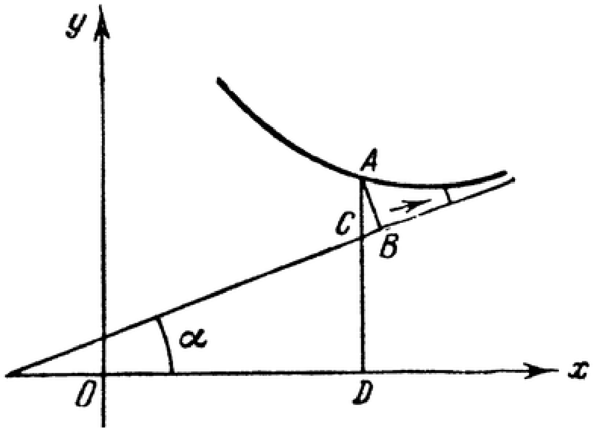


Рис. 9.4

Так как прямая $y = kx+b$ является асимптотой графика функции, то расстояние от точки A графика функции до этой прямой стремится к нулю, когда точка A (а значит и её абцисса x) уходит в бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty} AB = 0.$$

Если через α обозначить угол, образованный асимптотой с осью OX, то

$$AB = AC\cos\alpha.$$

Следовательно, AB и AC одновременно стремятся к нулю при x, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} AC = 0.$$

На рисунке (см. (9.4)) видно, что AC есть разность ординат AD и CD соответственно точки A, лежащей на графике, и точки C, лежащей на асимптоте:

$$AC = AD - CD = f(x) - (kx + b).$$

[1]Для которых горизонтальные асимптоты являются их частным случаем.

Поэтому, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Откуда следует, что

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Чтобы найти k, перепишем равенство $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ в ином виде:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Так как первый сомножитель $x\to\infty$ то, чтобы предел произведения был бы равен нулю, предел второго множителя должен равняться нулю, то есть:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

В силу того, что предел разности равен разности пределов, получаем:

$$\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$, находим

$$k=\frac{f(x)}{x}.$$

Таким образом, мы доказали, что для прямой $y=kx+b$, которая является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, коэффициенты определяются по формулам:

$$k=\frac{f(x)}{x};\ \ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{9.2}$$

Заметим, что верно и обратное утверждение: *Если числа k и b связаны соотношением*

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx),$$

то прямая $y=kx+b$ есть асимптота графика функции $y=f(x)$.

Рассмотрим несколько задач, в которых изучается поведение графика функции вблизи асимптот.

Задача 9.15. Исследовать с помощью пределов наличие асимптот графика функции $f(x)=\dfrac{9-2x}{3-x}$. Построить на основании иследования схематический график функции.

Решение. Найдём область определения $D_f=(-\infty;3)\cup(3;\infty)$. Исследуем вначале наличие вертикальных асимптот. Для этого найдём пределы функции в точке $x_o=3$ слева и справа.

$$\lim_{x\to3-0}\frac{9-2x}{3-x}=\frac{9-2\cdot(3-0)}{3-(3-0)}=\left(\frac{3}{+0}\right)=+\infty.$$

Замечание 9.6. Обратите внимание, что хотя $3-0$ только значок, показывающий, что x стремится к точке $x_o = 3$ слева (то есть, оставаясь меньше 3), но использование его как «числа» позволяет с помощью правил арифметики выяснить знак знаменателя дроби и в результате правильно определить направление функции.

Согласно определению (9.13) прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой графика изучаемой функции. Аналогично вычислим предел в точке $x_o = 3$ справа:

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{9-2x}{3-x} = \frac{9-2\cdot(3+0)}{3-(3+0)} = \left(\frac{3}{-0}\right) = -\infty.$$

Зная левый и правый пределы в точке, мы можем представить схематически поведение графика функции в окрестности точки $x_o = 3$:

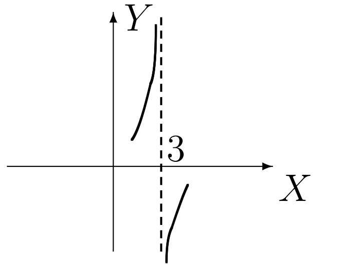


Рис. 9.5

Найдем пределы функции на границах области определения:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{9-2x}{3-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{-x} = 2.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{9-2x}{3-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{-x} = 2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$, то на основании условия на странице (26) можно сделать вывод о том, что прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой графика функции. Зная это, мы можем построить схематический график поведения функции в окрестности бесконечности:

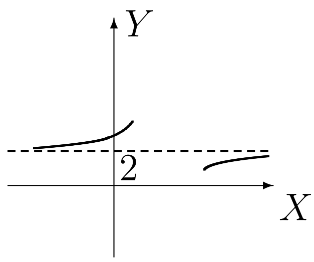


Рис. 9.6

Объединяя эти эскизы в один, получаем схематический чертеж функции[1] $f(x) = \dfrac{9-2x}{3-x}$:

[1]На самом деле это исследование не является полным, так как, не исследовав интервалы монотон-

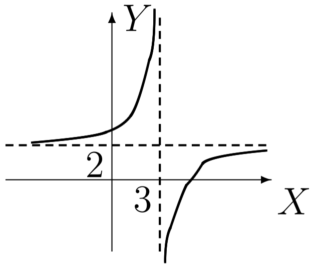


Рис. 9.7

Задача 9.16. Исследовать с помощью пределов наличие асимптот графика функции $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$. Построить на основании иследования схематический график функции.

Решение. Найдём область определения $D_g = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

Исследуем далее поведение функции на границах области определения:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Следовательно, при стремлении аргумента в $-\infty$ значения функции также стремятся в $-\infty$, что ради удобства восприятия зафиксируем на символьном эскизе:

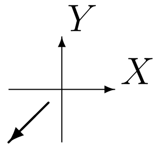


Рис. 9.8

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = \infty.$$

Таким образом, если аргумент стремится вправо, в $+\infty$, значения функции бегут вверх, в $+\infty$, что на эскизе выглядит так:

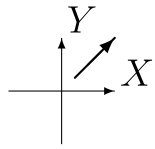


Рис. 9.9

Далее, изучим поведение функции в единственной точке, не попавшей в область определения функции.:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{1^2 - 2 \cdot (1 - 0)}{1 - 0 - 1} = \left(\frac{-1}{-0}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{1^2 - 2 \cdot (1 + 0)}{1 + 0 - 1} = \left(\frac{-1}{+0}\right) = -\infty.$$

Таким образом, мы знаем, что график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. При этом, слева от точки $x_o = 1$ он стремится вверх, а справа от этой точки он падает вниз:

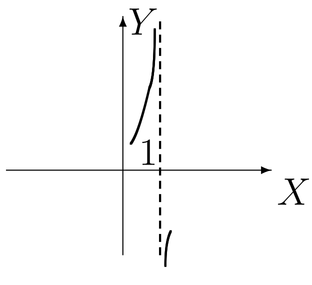


Рис. 9.10

ности функции и характер выпуклости графика на интервалах, нельзя сделать вывод о том, почему график прижимается к горизонтальной асимптоте именно таким образом. Исследование этих вопросов только с помощью приведённых раннее определений требует бошого объёма вычислений. Поэтому эти вопросы мы рассмотрим, познакомившись с дифференциальным исчислением.

[1]Если перенести на этот эскиз стрелки с эскизов (9.8) и (9.9), то можно без дальнейших исследований

Исследуем существование наклонных асимптот графика данной функции, используя формулы (9.2).

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x(x-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (g(x)-kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-(x^2-x)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} (\frac{-x)}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Следовательно, прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции и, собирая все эскизы воедино, получаем схематический график функции $g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$:

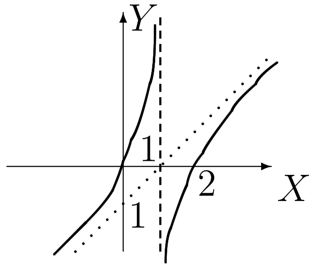


Рис. 9.11

В заключение рассмотрим без комментариев решение следующей задачи.

Задача 9.17. Исследовать с помощью пределов наличие асимптот графика функции $\varphi(x) = -\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$. Построить на основании иследования схематический график функции.

Решение. $D_\varphi = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x^2+4x+5}{x+2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to-\infty} x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2+4x+5}{x+2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to+\infty} x = -\infty.$$

Из приведённых вычислений следует, что прямая $x = -2$ – её вертикальная асимптота.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x^2+4x+5}{x(x+2)}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (g(x)-kx) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x^2+4x+5}{x+2} - (-x)\right) =$$

догадаться, что данная функция не имеет экстремумов, являясь монотонной в области определения.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - 4x - 5 + x^2 + 2x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-5}{x-1} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{x} = -2.$$

Следовательно, прямая $y = -x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции.

Анализируя проведённые расчёты, получаем[1] схематический график функции $\varphi(x) = -\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$

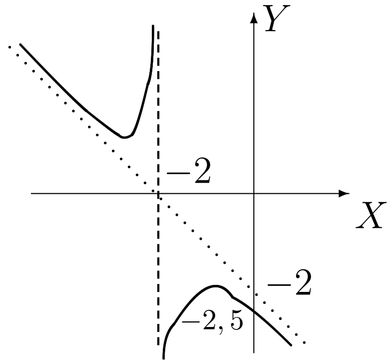


Рис. 9.12

[1]С помощью пределов мы получили общий вид графика, но доказать истинность этого вида, а также определить точки экстремума и самы экстремумы функции без дополнительных исследований невозможно.

© Бидерман В.И.