Цель работы. Изучить вращательное движение твердого тела с закрепленной осью вращения.

Задача. Проверить выполнимость основного закона динамики вращения для твердого тела с неподвижной осью вращения и проверить теорему Штейнера.

Приборы и принадлежности. Маятник Обербека, набор грузов, миллисекундомер, штангенциркуль.

1. Вращательные движения. Общие сведения

Важные законы механики связаны с понятиями момента силы и момента импульса. Рассмотрим эти понятия.

Пусть О – какая-либо точка, относительно которой рассматриваются момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют началом или полюсом. Обозначим буквой **r** радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы **F** (рис. 1). Моментом силы **F** относительно точки О называется векторное произведение радиуса-вектора **r** на вектор силы **F**:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]. \tag{1}$$

Модуль момента силы есть

$$M = rF\sin\alpha,$$

где α – угол между радиусом-вектором и вектором силы. Вектор М перпендикулярен векторам **r** и **F**.

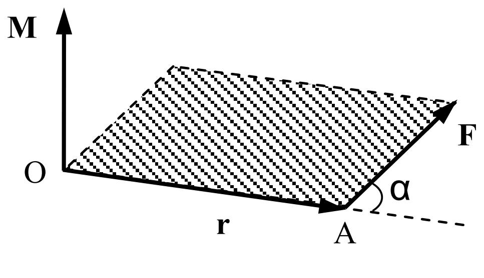


Рис. 1

Направление **M** совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от **r** к **F**. Численно момент силы равен площади параллелограмма, построенного на векторах **r** и **F**, как на сторонах (рис. 1).

Аналогично определяется момент импульса **L** материальной точки относительно полюса О. Так называется векторное произведение радиуса-вектора и вектора импульса:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]. \tag{2}$$

Выведем связь между этими моментами. Предположим, что начало О неподвижно. Дифференцируя выражение (2) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right].$$

Так как начало О неподвижно, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть скорость **v** материальной точки, связанная с ее импульсом выражением **p** = m**v**. Поэтому первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов. Второе слагаемое можно преобразовать с помощью второго закона Ньютона $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$. Тогда получится $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{rF}]$ или

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \tag{3}$$

Это уравнение называется уравнением моментов: *производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.*

Результат легко можно обобщить на систему материальных точек. Для этого надо просуммировать уравнение (3) по всем точкам. При этом третий закон Ньютона позволяет исключить моменты внутренних сил.

Получаем аналогичный результат:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внеш}}. \tag{4}$$

Значит, *производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно неподвижного начала равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.*

Если момент внешних сил относительно неподвижного начала равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени. Это есть *закон сохранения момента импульса*. Он, в частности, справедлив для замкнутой системы тел. Замкнутой системой материальных точек называется система, на которую не действуют внешние силы.

Применим уравнение моментов к вращательному движению. Пусть точка вращается по окружности радиуса **r** вокруг неподвижной оси. Тогда ее момент импульса направлен по оси вращения согласно правилу буравчика (правого винта) и модуль его есть mvr. Удобно выразить момент импульса через угловую скорость ω, используя связь $v = \omega r$. В результате $L = mr^2\omega$. Если вокруг оси O вращается система точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum_i m_i r_i^2 \omega$, где суммирование проводится по всем точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех точек системы можно вынести за знак суммы. Тогда получаем

$$L = J\omega, \tag{5}$$

где

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \tag{6}$$

Величина J, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется моментом инерции системы относительно этой оси. Уравнение (5) показывает, что *при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость*.

Важным частным случаем является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае момент инерции остается постоянным и уравнение (4), записанное в скалярном виде, выглядит так:

$$J\varepsilon = M. \tag{7}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на его угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно той же оси. Это уравнение выражает собой основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Из этого уравнения видно, что угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, прямо пропорционально результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси. Таким образом, момент инерции J тела является мерой его инертности при вращательном движении вокруг неподвижной оси. Неподвижная ось вращения может проходить как через центр масс тела (например, ось вращения маховика), так и вне его (например, ось вращения рычага).

Известна теорема о переносе осей инерции (теорема Штейнера): момент инерции J тела относительно произвольной оси OO_1 равен сумме момента инерции J_c тела относительно оси $O'O'_1$, проведенной через центр масс тела C параллельно OO_1, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между этими осями (рис. 2):

$$J = J_c + md^2. \tag{8}$$

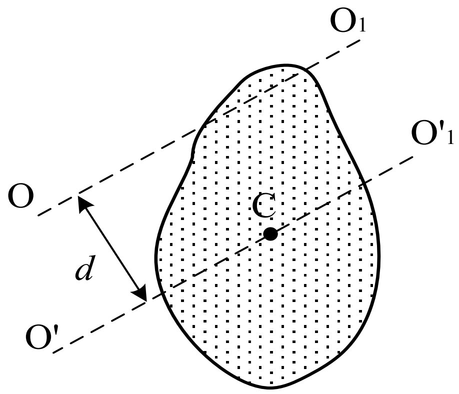


Рис. 2

2. Описание установки и метода измерений

Экспериментальная установка (рис. 3) представляет собой крестовину с четырьмя цилиндрическими грузами массой m_2 каждый, на шкив которой намотана нить с подвешенным грузом m_1. Груз массой m_1 падает с высоты h и, натягивая нить, приводит крестовину во вращение. Время падения измеряется электронным миллисекундомером, который является частью установки. Конструкция прибора позволяет изменять момент внешних сил и момент инерции системы. Момент внешних сил изменяется с изменением массы m_1 подвешенного к нити груза. Момент инерции можно изменять, перемещая грузы m_2 по стержням крестовины.

В работе проверяется выполнимость соотношений, следующих из основного уравнения динамики (7) вращения твердого тела с закрепленной осью.

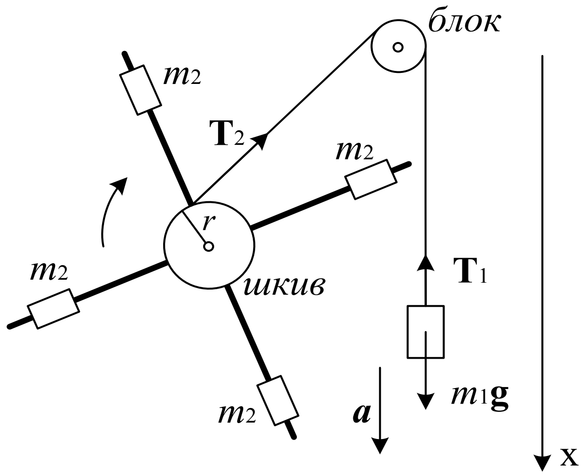


Рис. 3

Основное уравнение динамики вращательного движения для маятника Обербека:

$$M = J\varepsilon, \tag{9}$$

где M – момент силы натяжения нити; J – момент инерции крестовины вместе с подвижными грузами относительно оси вращения; ε – угловое ускорение вращающейся крестовины с цилиндрами.

Момент силы $\mathbf{T}_2$ натяжения нити

$$M = T_2 r, \tag{10}$$

где r – радиус шкива.

Ввиду того что массой блока и силой трения на оси можно пренебречь, сила натяжения нити по величине одинакова: $|\mathbf{T}_1| =| \mathbf{T}_2|$. Обозначим ее просто T. Эту силу натяжения T найдем из второго закона Ньютона для поступательного движения падающего груза:

$$m_1\mathbf{a} = \mathrm{m}_1\mathbf{g} + \mathbf{T}.$$

В проекции на ось x

$$m_1 a = m_1 g - T,$$

откуда получаем

$$T = m_1(g - a). \tag{11}$$

Подставляем полученное выражение в уравнение (10):

$$M = Tr = m_1(g - a)r. \tag{12}$$

Поскольку поступательное движение падающего груза равноускоренное без начальной скорости, то ускорение падающего груза можно определить через высоту h и время падения t:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (13)$$

С учетом этого выражение (12) принимает вид

$$M = \frac{m_1 d}{2}\left(g - \frac{2h}{t^2}\right), \qquad (14)$$

где для удобства использована непосредственно измеряемая величина d – диаметр шкива.

Угловое ускорение ε в выражении (9) можно определить через ускорение a падения груза:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2a}{d}.$$

С учетом уравнения (13) получим

$$\varepsilon = \frac{4h}{t^2 d}. \qquad (15)$$

При подстановке выражений (14), (15) в уравнение (9) получаем выражение для момента инерции маятника:

$$J = \frac{m_1(g - 2h/t^2)d^2 t^2}{8h}. \qquad (16)$$

Проверка теоремы Штейнера при различных моментах инерции J

С учетом теоремы Штейнера (8) и аддитивности момента инерции (момент инерции нескольких тел равен сумме их моментов инерции) можно выразить момент инерции крестовины с цилиндрами формулой

$$J = J_0 + 4J_{02} + 4m_2 l^2, \qquad (17)$$

где J_0 – момент инерции крестовины без цилиндров; J_{02} – момент инерции одного цилиндра относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через его центр масс; l – расстояние цилиндров от оси вращения; m_2 – масса каждого цилиндра.

Теперь нетрудно получить разность моментов инерции крестовины с цилиндрами при различных положениях цилиндров ℓ_1 и ℓ_2 на осях крестовины. Эта разность $J_2 - J_1$ должна удовлетворять соотношению

$$J_2 - J_1 = 4m_2\left(l_2^2 - l_1^2\right). \qquad (18)$$

3. Порядок выполнения работы

Выполнять задание нужно с неизменным максимальным значением массы m_1 подвешенного груза. Высота падения груза одна и та же – 35–40 см. Измерение времени проводится не менее пяти раз, в формулы подставляется его среднее значение. Крестовина без подвешенного груза должна находиться в безразличном равновесии. Диаметр шкива достаточно измерить один раз. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу.

Результаты измерений и вычислений

Расстояние до цилиндров, см	d, см	h, см	m, г	Измерения	t, с	Δt_i, с	J, кг·м^2
				1			
				2			
l_1 =				3			
				4			
				5			
				$\bar{t}$			
				$\Delta\bar{t}$			
				1			
				2			
l_2 =				3			
				4			
				5			
				$\bar{t}$			
				$\Delta\bar{t}$			

1. Закрепить подвижные цилиндры примерно на середине стержней крестовины, записав значение l_1 – расстояние до цилиндров от оси вращения в таблицу.
2. Штангенциркулем измерить диаметр d шкива.
3. Подвесить на нити груз m_1.
4. Произвести пять раз измерения времени падения груза.

5. Вычислить момент инерции крестовины по формуле (16).

6. Изменить момент инерции маятника, уменьшив расстояния подвижных цилиндров от оси вращения не больше чем на 2–3 см, записав значение этого расстояния l_2.

7. Измерить пять раз время падения груза при этом моменте инерции.

8. Вычислить по формуле (16) момент инерции для нового расстояния l_2 подвижных цилиндров от оси вращения. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу. Значение m_2 указано на цилиндре.

9. Проверить справедливость соотношения (18).

4. Контрольные вопросы и задания

1. Каков физический смысл момента инерции? От чего он зависит?

2. Какая система называется замкнутой?

3. При каком условии из основного уравнения динамики вращения $\frac{d}{dt}(J\omega) = M$ следует уравнение (7)?

4. Сформулировать теорему Штейнера.

5. Если радиус, на котором вращается материальная точка, изменить в α раз, то во сколько раз изменится ее момент инерции?

6. Как должна проходить ось, относительно которой рассматривается момент инерции тела, чтобы он был минимален?

7. Вывести уравнение моментов.

8. По кольцу растекается капля жидкости. Как при этом изменяется момент инерции жидкости относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр?

9. Вывести формулу (16).

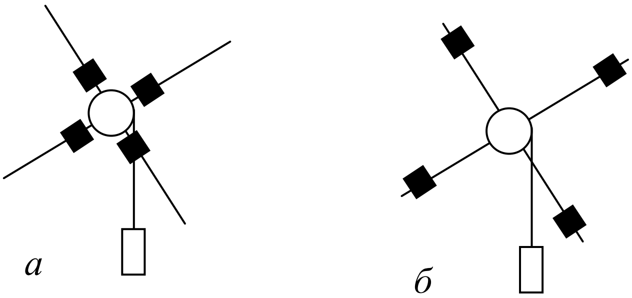
10. Пояснить формулу (17).

11. При каком условии выполняется соотношение $M_1\varepsilon_2 = M_2\varepsilon_1$?

12. Вывести соотношение (18).

13. Свинцовый цилиндр радиусом r и высотой 1/3 r расплавили и сделали шар. Как при этом изменился момент инерции? Момент инерции цилиндра вычисляется по формуле $J = mr^2/2$, а шара – $J = 2/5\ mr^2$.

14. В каком случае (*а* или *б*) груз, падая с одной и той же высоты, достигнет пола быстрее?



15. Объяснить причины, по которым найденная из опыта левая часть в соотношении (18) несколько отличается от правой.

Библиографический список

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2008. – Т. 1. – 432 с.
2. *Детлаф А. А.* Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2008. – 720 с.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Академия, 2006. – 560 с.

Оглавление

1. Вращательные движения. Общие сведения 3
2. Описание установки и метода измерений 6
3. Порядок выполнения работы 9
4. Контрольные вопросы и задания 10
Библиографический список 11