

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Т Е Н Е Н С О

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
С ПРИМЕНЕНИЕМ *Mathcad 14.0***

*Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия*

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2010

УДК 539.3 (075)
ББК 30.121
К44

Рецензенты:

Кафедра «Строительная механика»
Дальневосточного государственного университета путей сообщения
(кандидат технических наук, доцент Л. П. Миронов)
Директор ООО «Научно-производственная компания РЕЗИС»
Кандидат технических наук, доцент Н. А. Рыбак

Научный редактор
кандидат технических наук, доцент Л. М. Иванников

Тен Ен Со

К44 -Решение задач теории упругости с применением *Mathcad14.0* : учеб.
пособие. Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2010. 75 с.
ISBN 978-5-7389-0877-4

Учебное пособие разработано на кафедре механики деформируемого твердого тела для оказания помощи студентам, обучающимся по программе магистра в направлении строительных специальностей, при изучении курса теории упругости.

Даны необходимые сведения о напряженном состоянии в точке тела, плоской задаче теории упругости в декартовых и полярных координатах в частности, и о напряженном состоянии упругой полуплоскости. Приведены примеры определения напряженного состояния в точке тела, решения плоской задачи теории упругости в полиномах и тригонометрических рядах, определения напряженного состояния в упругой полуплоскости при действии на границе сосредоточенных сил и распределенных нагрузок. Все решения поставленных задач выполняются в символьном виде при помощи программного обеспечения *Mathcad 14.0*, а затем выполняются расчеты при различных исходных данных на ЭВМ.

УДК 539.3(075)

ББК 30.121

ISBN 978-5-7389-0877-4

© Тен Ен Со, 2010
© Тихоокеанский государственный
университет, 2010

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие разработано с целью оказания методической помощи студентам, обучающимся по программе магистра, при решении задач теории упругости по следующим разделам: напряженное состояние в точке тела, решение плоской задачи теории упругости в полиномах и в тригонометрических рядах, исследование напряженного состояния в упругой полуплоскости при действии на границе сосредоточенных сил и распределенных нагрузок. В связи с появлением удобного и простого в реализации программного средства для решения инженерных задач *Mathcad* стало возможным достаточно просто реализовать сложные расчеты и научные исследования на ЭВМ. *Mathcad* стал едва ли не самым популярным математическим образовательным программным обеспечением, позволяющим с минимальной затратой времени решать сложные задачи. Большим преимуществом программного обеспечения *Mathcad* является возможность решения различных задач в символьной форме. Особенно это важно при решении задач теории упругости.

В связи с этим при разработке предлагаемого здесь учебного пособия большое внимание уделено применению *Mathcad* при решении различных задач теории упругости. Все рассматриваемые здесь задачи заканчиваются составлением *Mathcad*-программы и выполнением при помощи этой программы учебно-исследовательской работы. Применение ЭВМ в инженерных расчетах позволяет получить достаточно широкую информацию о напряженном состоянии конструкций. Возможность численной реализации при различных соотношениях размеров конструкции позволяет оценить, какую погрешность дает теория сопротивления материалов, основанная на применении гипотезы плоских сечений, при расчете конструкций.

В приложениях приведены примеры *Mathcad*-программ решения различных задач теории упругости. При этом студенту достаточно скорректировать программы, приведенные в приложении, в соответствии с граничными условиями конкретной задачи. Отметим, что корректировка программ невозможна без хорошего знания теории и программного обеспечения *Mathcad*.

1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

1.1. Напряжения на наклонных площадках

Через любую точку тела, находящегося в напряженном состоянии, можно провести бесчисленное множество различно направленных площадок. Каждой площадке соответствует свое напряжение, конкретное по величине и направлению. Однако во многих случаях напряженное состояние в точке тела удобнее представить при помощи напряжений, действующих на площадках, перпендикулярных к осям координат x , y и z . В общем случае напряженное состояние в точке определяется девятью компонентами напряжений – тремя нормальными и шестью касательными напряжениями (рис.1.1).

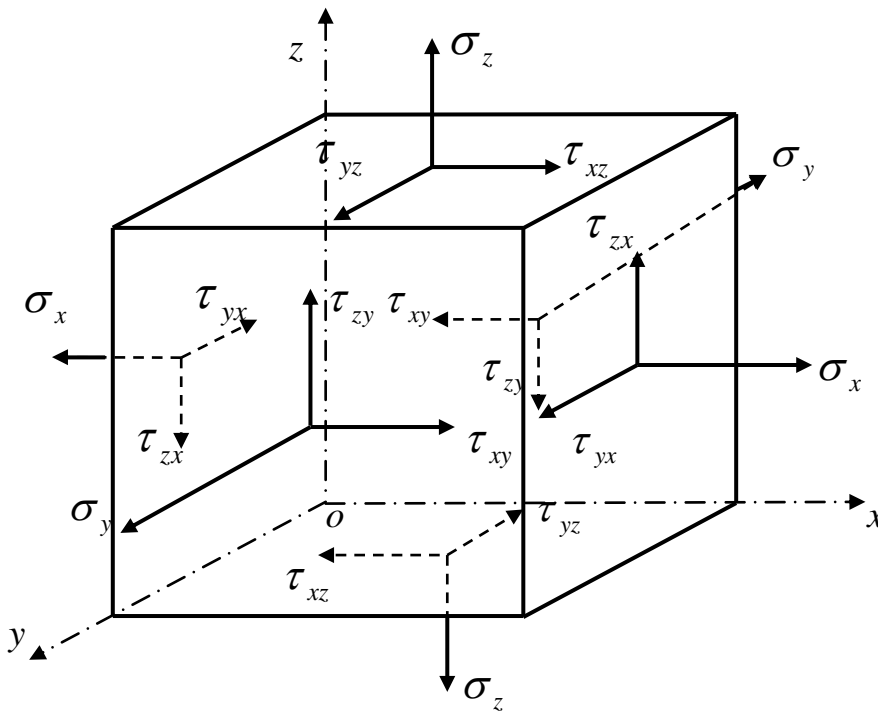


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показаны положительные напряжения. Отметим, что на видимых гранях направления положительных напряжений совпадают с положительными направлениями координатных осей. Закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, - \quad (1.1)$$

позволяет определять напряженное состояние в точке тела при помощи только шести компонентов напряжений – трех нормальных и трех касательных напряжений.

Рассмотрим наклонную площадку с внешней нормалью ν (рис. 1.2). Косинусы углов между координатными осями и нормалью ν обозначим через

$$l = \cos(x, \nu); \quad m = \cos(y, \nu); \quad n = \cos(z, \nu),$$

где l, m, n называются направляющими косинусами.

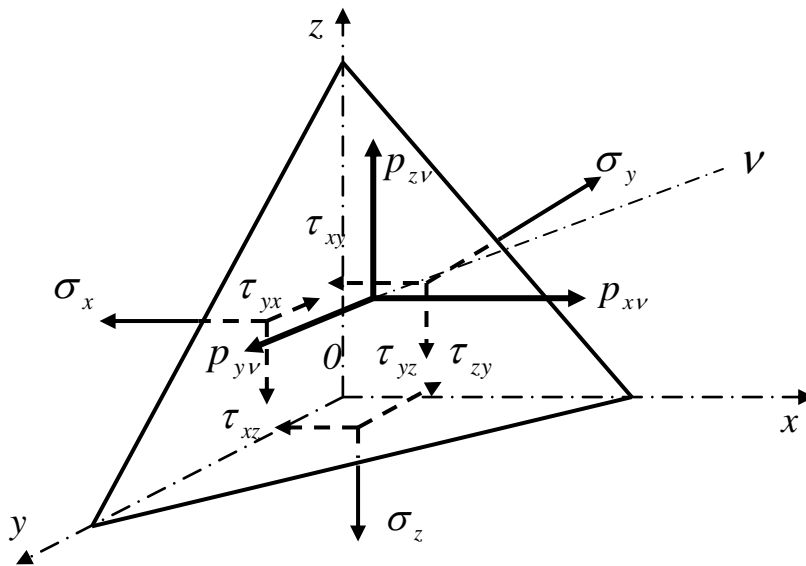


Рис. 1.2

Тогда проекции напряжений, действующих на наклонной площадке, будут равны:

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Если элемент, показанный на рис. 1.2, вырезан у поверхности тела (то есть наклонная площадка является частью поверхности тела), то p_{xv}, p_{yv} и p_{zv} будут проекциями внешних нагрузок на координатные оси. В этом случае условия (1.2) превращаются в граничные условия (в условия на поверхности).

Нормальные напряжения на наклонной площадке определяются как

$$\sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n. \quad (1.3)$$

Результирующие полные напряжения равны геометрической сумме составляющих (1.2):

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \quad (1.4)$$

Касательные напряжения на наклонной площадке равны:

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}. \quad (1.5)$$

1.2. Главные напряжения и главные площадки

Из формул (1.2) видно, что при изменении ориентации нормали к наклонной площадке, следовательно, и направляющих косинусов, изменяются и величины проекций напряжений на координатные оси p_{xv}, p_{yv} и p_{zv} . Тогда на основании формул (1.2)–(1.5) можно предположить, что существуют такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения. Площадки, на которых нормальные напряжения достигают экстремальных значений, а касательные напряжения обращаются в ноль, называются главными. А экстремальные напряжения, возникающие на них, называются главными напряжениями. Для определения главных напряжений в формулах (1.2) примем соотношения

$$\sigma \cdot l = p_{xv}; \quad \sigma \cdot m = p_{yv}; \quad \sigma \cdot n = p_{zv},$$

где σ – главное напряжение.

Подставим эти соотношения в уравнения (1.2). Тогда получим систему однородных уравнений для определения главных напряжений и главных площадок:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.7)$$

Однородная система уравнений (1.6) не допускает тривиального решения $l = m = n = 0$, так как оно противоречит известному из аналитической геометрии условию (1.7). Нетривиальное решение возможно, если определитель, составленный из коэффициентов при l, m, n , равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.8)$$

Раскрыв этот определитель, получим кубическое уравнение для определения главных напряжений:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (1.9)$$

где I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора напряжений, не зависящие от ориентации площадок, равные:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Корни уравнения (1.9) действительны, так как определитель (1.8) является симметричным в силу парности касательных напряжений. Путем решения кубического уравнения (1.9) определяются три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам можно определить из уравнений (1.6) и (1.7), поочередно приняв

$$\sigma = \sigma_1; \quad \sigma = \sigma_2 \quad \text{è} \quad \sigma = \sigma_3.$$

Практически удобнее сначала определить соотношения между направляющими косинусами. Для этого все члены уравнений (1.6) разделим на n , а уравнения (1.7) на n^2 :

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \frac{l}{n} + \tau_{xy} \frac{m}{n} + \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{yx} \frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} + \tau_{yz} = 0; \\ \tau_{zx} \frac{l}{n} + \tau_{zy} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}. \quad (1.12)$$

Из трех уравнений (1.11) только два являются независимыми. Следовательно, при определении положения главных площадок используем только 2 уравнения системы (1.11), например, первые два и уравнение (1.12). Тогда третье уравнение системы (1.11) используется для контроля правильности решения.

Более подробные сведения о напряженном состоянии в точке тела можно получить в [1, 2, 3].

1.3. Пример исследования напряженного состояния в точке тела

Задано напряженное состояние в точке шестью компонентами напряжений, действующими на площадках, перпендикулярных осям координат:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 50 \text{ МПа} \quad , \quad \sigma_y = 20 \text{ МПа} \quad , \quad \sigma_z = 30 \text{ МПа} \quad , \quad \tau_{xy} = 10 \text{ МПа} \quad , \\ \tau_{yz} = 40 \text{ МПа} \quad , \quad \tau_{zx} = 20 \text{ МПа} \quad . \end{aligned}$$

Требуется:

1. Определить нормальные и касательные напряжения σ_ν и τ_ν на площадках с внешней нормалью, имеющей следующие направляющие косинусы:

$$l = m = n = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

2. Определить инварианты тензора напряжений I_1, I_2, I_3 .

3. Определить главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
4. Определить направляющие косинусы главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
5. Графически показать направления главных напряжений.

Решение данной задачи реализовано в виде *Mathcad*-программы «Напряженное состояние» и приведено на сайте кафедры механики деформируемого твердого тела (МДТТ) института архитектуры и строительства (ИАиС) Тихоокеанского государственного университета (Напряженное состояние : *Mathcad*-программа : [сайт МДТТ]. [Хабаровск, 2009]. URL: <http://mdtt.khstu.ru>).

Корни кубического уравнения (1.9), являющиеся главными напряжениями, определяются при помощи оператора:

$$\sigma^3 - 100\sigma^2 + 1000\sigma + 45000 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float,6} \longrightarrow \end{array} \right.$$

Здесь оператором *float, 6* задается точность решения уравнения. Направления главных напряжений определяются при помощи системы уравнений (1.11) и уравнения (1.12). Система алгебраических уравнений решается при помощи вычислительного блока:

Given
Система алгебраических уравнений
Find(\bar{x}, \bar{y}), *float,6* \longrightarrow

где $\bar{x} = \frac{l}{n}, \quad \bar{y} = \frac{m}{n}$.

При этом необходимо предварительно задаться начальными значениями \bar{x}, \bar{y} , так как система уравнений решается итерационным методом. Между левыми и правыми частями алгебраических уравнений должны быть поставлены булевы операторы равенства (набирается комбинацией клавиш **Ctrl+=** либо выбором на панели *Boolean* булевы операторы). С программным обеспечением *Mathcad* можно ознакомиться в [5, 6].

Для определения направляющих косинусов вектора σ_1 необходимо подставить в первые 2 уравнения системы (1.11) $\sigma = \sigma_1$. Путем решения системы из двух уравнений определяются отношения l/n и m/n . Подставив

их в уравнение (1.12), получим и значение n , а затем l и m . Отложив значения l , m и n по осям координат x , y и z соответственно, находим направление первого главного напряжения. На рис. 1.3 показано направление вектора напряжений σ_1 .

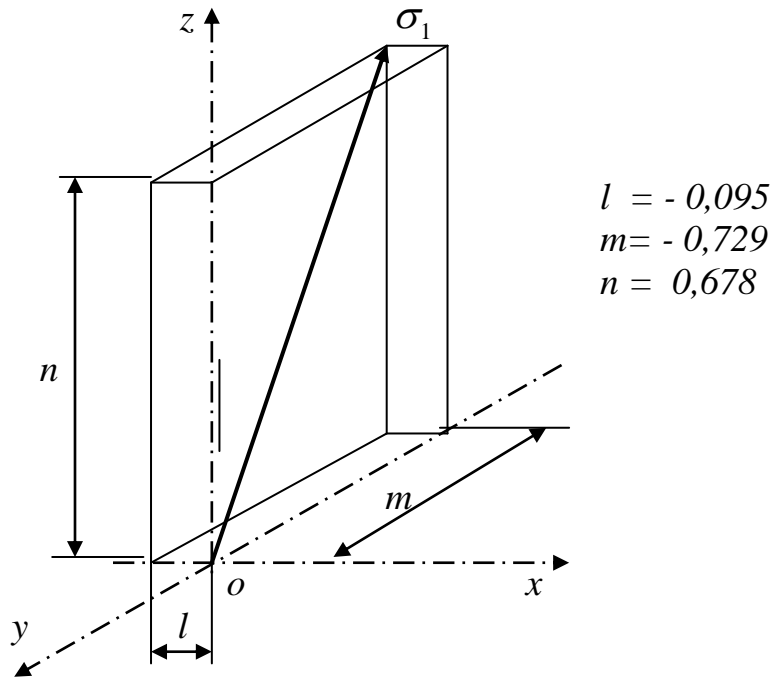


Рис. 1.3

Аналогично находим направления главных напряжений σ_2 и σ_3 , приняв поочередно $\sigma = \sigma_2$ и $\sigma = \sigma_3$. Отложив полученные значения направляющих косинусов l , m и n по осям координат x , y и z строим вектор главных напряжений σ_2 , а затем и σ_3 .

2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Основные уравнения плоской задачи

Основные уравнения плоской задачи теории упругости имеют вид:

а) дифференциальные уравнения равновесия Навье

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

б) геометрические уравнения Коши

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \end{cases} \quad (2.2)$$

в) уравнение неразрывности деформаций Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

или в напряжениях (Леви)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0; \quad (2.4)$$

г) физические уравнения Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \quad (2.5)$$

или в обратной форме

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x; \\ \sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y; \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)};$$

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь

X, Y – объемные силы;

u, v – перемещения в направлениях осей координат x, y ;

ε, γ – линейная и угловая деформация.

p_{xv}, p_{yv} – проекции внешних нагрузок на оси координат (направления положительных нагрузок совпадают с положительными направлениями осей координат);

l, m – косинусы углов между осями координат и внешней нормалью v (направляющие косинусы). Положительные углы α и β отсчитываются от координатных осей x и y против часовой стрелки (рис. 2.1);

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напряжения, возникающие у контура плоского тела.

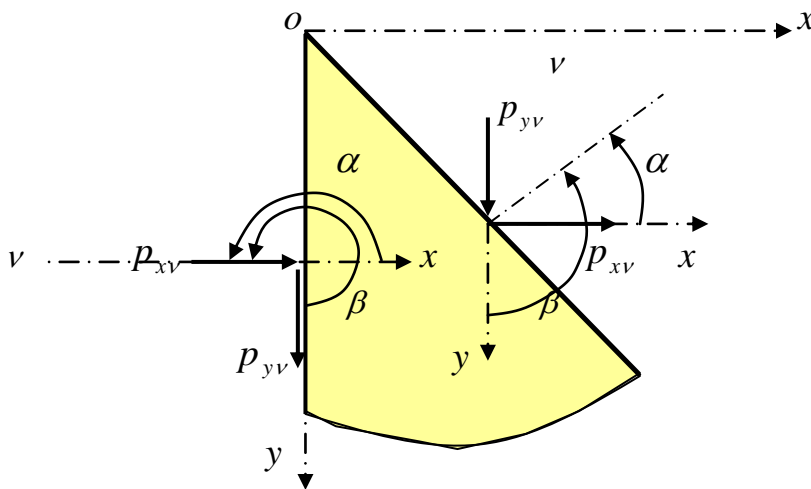


Рис. 2.1

Существуют два основных способа решения задач теории упругости: решение в перемещениях и решение в напряжениях.

Если задача решается в перемещениях, то необходимо геометрические уравнения (2.2) подставить в физические уравнения (2.6), а затем полученное выражение подставить в уравнения равновесия (2.1). Тогда получим систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно перемещений u и v . Решение полученной системы, подчиненное граничным условиям (2.7), записанным также в перемещениях, и является решением задачи в перемещениях. Деформации и напряжения определяем при помощи уравнений (2.2) и (2.6).

Если задача решается в напряжениях, то необходимо решать систему из трех дифференциальных уравнений: двух уравнений равновесия (2.1) и уравнения неразрывности деформаций в напряжениях (2.4). Решение этой системы уравнений, подчиненное граничным условиям (2.7), и является решением задачи.

2.2. Условия на контуре

Для плоской задачи теории упругости условия на контуре (граничные условия) имеют вид (2.7).

У конструкций прямоугольной конфигурации грани либо горизонтальны, либо вертикальны. Углы между внешней нормалью и проекциями внешних нагрузок α и β будут кратными $\pi/2$. Следовательно, направляющие косинусы l и m будут равны -1 , 0 или $+1$. Это значительно упрощает составление граничных условий. Направляющие косинусы и связь внешних нагрузок p_{xv} и p_{yv} с напряжениями на контуре для всех четырех граней показаны на рис. 2.2. Этот рисунок дает наглядное представление связи между проекциями внешней нагрузки p_{xv} , p_{yv} и напряжениями на вертикальных и горизонтальных гранях плоского прямоугольного тела.

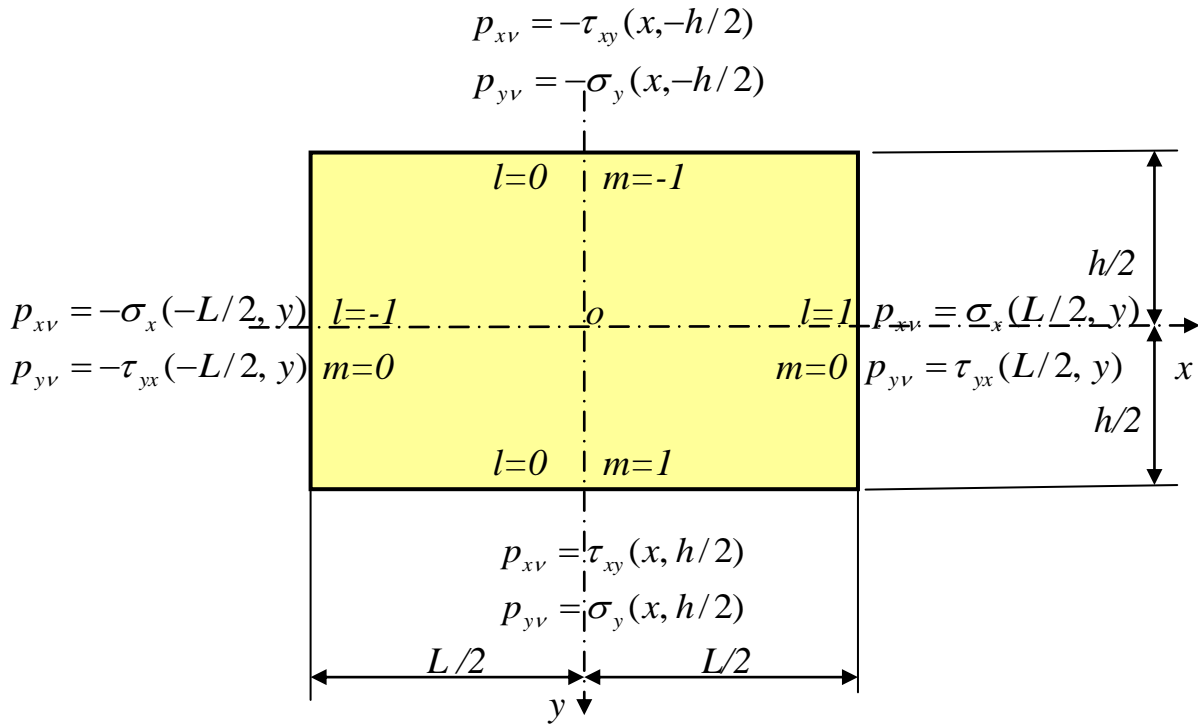


Рис. 2.2

Например, для задачи, представленной на рис. 2.3, имеем следующие граничные условия:

– верхняя грань ($y=-h/2$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\tau_{xy}(x, -h/2) = 0; \\ p_{yv} = -\sigma_y(x, -h/2) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

– нижняя грань ($y=h/2$):

$$\begin{cases} p_{xv} = \tau_{xy}(x, h/2) = 0; \\ p_{yv} = \sigma_y(x, h/2) = q(x), \end{cases} \quad (2.9)$$

– левая грань ($x=0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\sigma_x(0, y); \\ p_{yv} = -\tau_{xy}(0, y). \end{cases} \quad (2.10)$$

Направления положительных нагрузок $q(x)$ совпадают с направлениями осей координат. На правой грани мы заранее не знаем, по какому закону распределяются по высоте балки нормальные и касательные напряжения, следовательно, и не можем составить точные граничные условия.

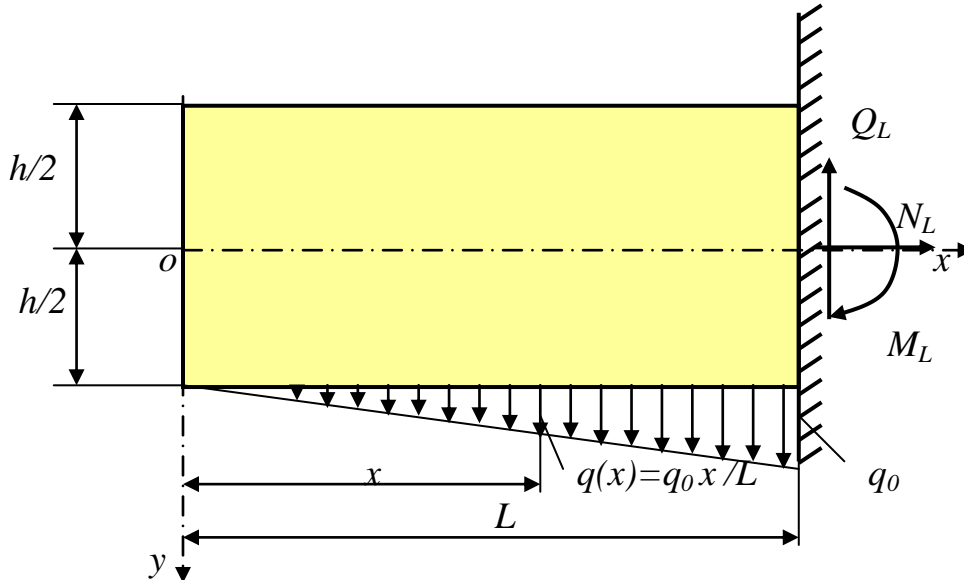


Рис. 2.3

2.3. Решение плоской задачи теории упругости при помощи функции напряжений

Некоторые плоские задачи теории упругости удобно решать с помощью функции напряжений $\varphi(x, y)$ (функции Эри). Если принять следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}; \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

то уравнения равновесия (2.1) будут удовлетворены автоматически. Если подставим выражения (2.11) в уравнение неразрывности деформаций

3. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИ УПРУГОСТИ В ПОЛИНОМАХ

Задана консольная балка-стенка с объемным весом γ , нагруженная треугольной нагрузкой, как показано на рис. 2.3 (гл. 2).

Исходные данные: $h = 2$ м, $L = 4$ м, $\gamma = 10$ кН/м³, $q_0 = 20$ кН/м, $b = 1$ м.

Предлагается полином шестого порядка, специально подобранный для данной задачи:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & A_1 x^3 y^3 + A_2 x y^5 + A_3 y^5 + A_4 x^2 y^3 + A_5 x y^3 + A_6 x^3 y + A_7 x^3 + \\ & + A_8 y^3 + A_9 x^2 y + A_{10} x y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Требуется:

1. Установить, при каких соотношениях коэффициентов полинома предложенная функция (3.1) удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.12).
2. Найти выражения нормальных и касательных напряжений.
3. Из граничных условий данной задачи определить коэффициенты полинома (3.1).
4. Записать выражения для напряжений с учетом найденных коэффициентов полинома и исходных данных задачи.
5. Проверить, соответствуют ли полученные выражения для напряжений граничным условиям задачи.
6. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечениях $x=0, 1, 2, 3, 4$ м.

Полином (3.1) может быть решением поставленной задачи, если он удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.12) и всем граничным условиям. Подставим полином (3.1) в бигармоническое уравнение (2.12). Тогда получим

$$72A_1 xy + 24A_4 y + 120A_2 xy + 120A_3 y = 0.$$

Или

$$(72A_1 + 120A_2)xy + (120A_3 + 24A_4)y = 0.$$

Так как это условие должно удовлетворяться при любых независимых переменных x и y , то получим

$$\begin{cases} 9A_1 + 15A_2 = 0; \\ 5A_3 + A_4 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Только при выполнении условий (3.2) полином (3.1) может быть решением плоской задачи теории упругости.

Найдем выражения для напряжений при помощи формул (2.11):

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 6A_1 x^3 y + 20A_2 x y^3 + 20A_3 y^3 + 6A_4 x^2 y + 6A_5 x y + 6A_8 y; \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = 6A_1 x y^3 + 2A_4 y^3 + 6A_6 x y + 6A_7 x + 2A_9 y; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \gamma x = -9A_1 x^2 y^2 - 5A_2 y^4 - 6A_4 x y^2 - 3A_5 y^2 - 3A_6 x^2 - \\ - 2A_9 x - \gamma x - A_{10}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Запишем граничные условия рассматриваемой задачи. Эти условия уже записаны в общем виде (2.8), (2.9) и (2.10):

верхняя грань ($y = -h/2$):

$$\begin{aligned} p_{xv} = -\tau_{xy}(x, -h/2) &= \left(\frac{9h^2}{4} A_1 + 3A_6 \right) x^2 + \left(\frac{3h^2}{2} A_4 + 2A_9 + \gamma \right) x + \\ &+ \left(\frac{5h^4}{16} A_2 + \frac{3h^2}{4} A_5 + A_{10} \right) = 0; \\ p_{yv} = -\sigma_y(x, -h/2) &= \left(\frac{3h^3}{4} A_1 + 3hA_6 - 6A_7 \right) x - \left(\frac{h^3}{4} A_4 + hA_9 \right) = 0. \end{aligned}$$

Эти граничные условия должны удовлетворяться при любых x . А это возможно, если выражения в скобках будут равны нулю:

$$\begin{cases} \left(\frac{9h^2}{4} A_1 + 3A_6 \right) = 0 \\ \left(\frac{3h^2}{2} A_4 + 2A_9 + \gamma \right) = 0 \\ \left(\frac{5h^4}{16} A_2 + \frac{3h^2}{4} A_5 + A_{10} \right) = 0; \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{3h^3}{4} A_1 + 3hA_6 - 6A_7 \right) = 0 \\ \left(\frac{h^3}{4} A_4 + hA_9 \right) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Рассмотрим нижнюю грань ($y=h/2$):

$$\begin{aligned} p_{xv} = \tau_{xy}(x, h/2) &= -\left(\frac{9h^2}{4} A_1 + 3A_6 \right) x^2 - \left(\frac{3h^2}{2} A_4 + 2A_9 + \gamma \right) x - \\ &\quad - \left(\frac{5h^4}{16} A_2 + \frac{3h^2}{4} A_5 + A_{10} \right) = 0; \\ p_{yv} = \sigma_y(x, h/2) &= \left(\frac{3h^3}{4} A_1 + 3hA_6 + 6A_7 \right) x + \left(\frac{h^3}{4} A_4 + hA_9 \right) = \frac{q_0 x}{L}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения мы получим такую же систему, как (3.4), поэтому ее опускаем. Из второго уравнения получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{3h^3}{4} A_1 + 3hA_6 + 6A_7 \right) = \frac{q_0}{L}; \\ \left(\frac{h^3}{4} A_4 + hA_9 \right) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

На левой грани точно подчинить решение (3.1) граничным условиям задачи сложно. Следовательно, ограничимся лишь граничными условиями в интегральном смысле (2.13), то есть

$$\begin{aligned} N_0 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, y) dy = - \int_{-h/2}^{h/2} (20A_3 y^3 + 6A_8 y) dy = 0; \\ M_0 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, y) y dy = - \int_{-h/2}^{h/2} (20A_3 y^3 + 6A_8 y) y dy = \\ &= - \frac{h^5}{4} A_3 - \frac{h^3}{2} A_8 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(0, y) dy = - \int_{-h/2}^{h/2} (5A_2 y^4 + 3A_5 y^2 + A_{10}) dy = \\
&= - \left(\frac{h^5}{16} A_2 + \frac{h^3}{4} A_5 + h A_{10} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \frac{h^5}{4} A_3 + \frac{h^3}{2} A_8 = 0; \\ \frac{h^5}{16} A_2 + \frac{h^3}{4} A_5 + h A_{10} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Запишем условие для произвольного сечения. В сечении на расстоянии x от начала координат внутренние усилия будут равны (вспомним курс сопротивления материалов):

$$\begin{cases} M(x) = -\frac{\gamma h}{2} x^2 - \frac{q_0}{6L} x^3; \\ Q(x) = -\gamma h x - \frac{q_0}{2L} x^2. \end{cases} \quad (3.8)$$

С другой стороны, внутренние силы можно определять как интегралы вида

$$\begin{cases} M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y) y dy = \frac{h^3}{4} [2A_1 x^3 + 2A_4 x^2 + (h^2 A_2 + 2A_5)x + (h^2 A_3 + 2A_8)]; \\ Q(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y) dy = -\frac{h}{16} [(48A_6 + 12h^2 A_1)x^2 + (8h^2 A_4 + 32A_9 + 16\gamma)x + \\ + (h^4 A_2 + 4h^2 A_5 + 16A_{10})]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Приравняв правые части формул (3.8) и (3.9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{h^3}{2} A_1 x^3 &= -\frac{q_0}{6L} x^3; \\
\frac{h^3}{2} A_4 x^2 &= -\frac{\gamma h}{2} x^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^3}{4}(h^2 A_2 + 2A_5)x = 0; \\
& \frac{h^3}{4}(h^2 A_3 + 2A_8) = 0; \\
& \frac{h^3}{4}(h^2 A_3 + 2A_8) = 0; \\
& -\frac{h}{16}(48A_6 + h^2 A_1)x^2 = -\frac{q_0}{2L}x^2; \\
& -\frac{h}{16}(8h^2 A_4 + 32A_9 + 16\gamma)x = -\gamma hx; \\
& -\frac{h}{16}(h^4 A_2 + 4h^2 A_5 + 16A_{10}) = 0.
\end{aligned}$$

Так как эти условия должны удовлетворяться при любых x , то окончательно получим

$$\left\{ \begin{array}{l} h^3 A_1 = -\frac{q_0}{3L}; \\ \frac{h^3}{2} A_4 = -\frac{\gamma h}{2}; \\ h^2 A_2 + 2A_5 = 0; \\ h^2 A_3 + 2A_8 = 0; \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3h^3}{4} A_1 + 3hA_6 \right) = \frac{q_0}{2L}; \\ \left(\frac{h^3}{2} A_4 + 2hA_9 + \gamma h \right) = \gamma h; \\ \frac{h^5}{16} A_2 + \frac{h^3}{4} A_5 + hA_{10} = 0. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Системы уравнений (3.2), (3.4) – (3.7), (3.10) и (3.11) распадаются на 4 независимые системы, что, в принципе, упрощает решение задачи. Путем решения четырех независимых систем уравнений получим

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{q_0}{3Lh^3}, & A_2 = \frac{q_0}{5Lh^3}, & A_3 = \frac{\gamma}{5h^2}, & A_4 = -\frac{\gamma}{h^2}, & A_5 = -\frac{q_0}{10Lh}, \\ A_6 = \frac{q_0}{4Lh}, & A_7 = \frac{q_0}{12L}, & A_8 = -\frac{\gamma}{10}, & A_9 = \frac{\gamma}{4}, & A_{10} = \frac{hq_0}{80L}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Подставим полученные коэффициенты (3.12) в формулы для напряжений (3.3). Тогда получим

$$\begin{cases} \sigma_x = q_0 \left(-\frac{2}{Lh^3} x^3 y + \frac{4}{Lh^3} xy^3 - \frac{3}{5Lh} xy \right) + \gamma \left(-\frac{6}{h^2} x^2 y + \frac{4}{h^2} y^3 - \frac{3}{5} y \right); \\ \sigma_y = q_0 \left(-\frac{2}{Lh^3} xy^3 + \frac{3}{2Lh} xy + \frac{1}{2L} \right) + \gamma \left(-\frac{2}{h^2} y^3 + \frac{1}{2} y \right); \\ \tau_{xy} = -q_0 \left(\frac{y^4}{Lh^3} - \frac{3}{Lh^3} x^2 y^2 - \frac{3}{10Lh} y^2 + \frac{4}{3Lh} x^2 + \frac{h}{80L} \right) - \\ - \gamma \left(-\frac{6}{h^2} xy^2 + \frac{3}{2} x \right). \end{cases} \quad (3.13)$$

С учетом заданных исходных данных формулы для определения нормальных и касательных напряжений (3.13) окончательно примут вид

$$\begin{cases} \sigma_x = 2,5xy^3 - 1,25x^3y + 10y^3 - 15x^2y - 1,5xy - 6y; \\ \sigma_y = -1,25xy^3 - 5y^3 + 3,75xy + 5y + 2,5x; \\ \tau_{xy} = 1,875x^2y^2 - 0,625y^4 + 15xy^2 - 1,875x^2 + 0,75y^2 - 15x - 0,125. \end{cases} \quad (3.14)$$

Проверим, удовлетворяет ли полученное решение (3.14) всем граничным условиям задачи:

верхняя грань ($y=-l$):

$$\sigma_y(x, -1) = 1,25x + 5 - 3,75x - 5 + 2,5x = 0;$$

$$\tau_{xy}(x, -1) = 1,875x^2 - 0,625 + 15x - 1,875x^2 + 0,75 - 15x - 0,125 = 0,$$

нижняя грань ($y=l$):

$$\sigma_y(x, 1) = -1,25x - 5 + 3,75x + 5 + 2,5x = 5x;$$

$$\tau_{xy}(x, 1) = 1,875x^2 - 0,625 + 15x - 1,875x^2 + 0,75 - 15x - 0,125 = 0,$$

левая грань ($x=0$):

$$N_0 = \int_{-1}^1 \sigma_x(0, y) dy = \int_{-1}^1 (10y^3 - 6y) dy = 0;$$

$$M_0 = \int_{-1}^1 \sigma_x(0, y) y dy = \int_{-1}^1 (+10y^3 - 6y) y dy = 0;$$

$$Q_0 = \int_{-1}^1 \tau_{xy}(0, y) dy = \int_{-1}^1 (-0,625y^4 + 0,75y^2 - 0,125) dy = 0,$$

правая грань ($x=L$):

$$N_L = \int_{-1}^1 \sigma_x(L, y) dy = \int_{-1}^1 (2,5Ly^3 - 1,25L^3y + 10y^3 - 15L^2y - 1,5Ly - 6y) dy = 0;$$

$$M_L = \int_{-1}^1 \sigma_x(L, y) y dy = \int_{-1}^1 (2,5Ly^3 - 1,25L^3y + 10y^3 - 15L^2y - 1,5Ly - 6y) y dy =$$

$$= -213,33;$$

$$Q_L = \int_{-1}^1 \tau_{xy}(L, y) dy = \int_{-1}^1 (1,875L^2y^2 - 0,625y^4 + 15Ly^2 - 1,875L^2 + 0,75y^2 -$$

$$-15L - 0,125) dy = -120,$$

где N_L, M_L, Q_L – продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила у заделки, равные реакциям опоры (см. рис. 2.3).

По полученным выражениям для напряжений (3.14) можно найти напряжения в любом сечении. Все вычисления ниже будут выполнены в *Mathcad*.

Для сравнения найдем выражения для напряжений в соответствии с теорией сопротивления материалов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x, \max} = \frac{M_{x, \max}}{W_x} = \frac{(q_0 + 3\gamma)l^2}{h^2}; \\ \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy, \max} = \frac{Q_{y, \max} S_x^{\dot{i} \dot{n}}}{b I_x} = \frac{3}{4} \frac{(q_0 + 2\gamma)l}{h}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Для сравнения в таблице приведены результаты вычислений по формулам теории упругости (3.14) и сопротивления материалов (3.15).

Напряжения, кН/м ²	По теории упругости	По теории сопротивления материалов
$\sigma_{x, \max}$	312	320
$\sigma_{y, \max}$	20	0
$\tau_{xy, \max}$	90	90

Решение этой задачи реализовано в виде *Mathcad*-программы «Решение в полиномах» и представлено на сайте кафедры МДТТ (Решение в полиномах : *Mathcad*-программа : [сайт МДТТ]. [Хабаровск, 2009]. URL: <http://mdtt.khstu.ru>).

Большое преимущество программного обеспечения *Mathcad* заключается в возможности выполнения математических преобразований, включая интегрирование, дифференцирование, решение систем алгебраических уравнений и др., а также различного рода вычисления, в символьном виде.

При “ручном” решении задачи в символьном виде есть большая вероятность допустить ошибки при преобразовании выражений, при интегрировании и т. д., от чего мы защищены при использовании *Mathcad*.

Задается функция напряжений в виде неполного полинома шестого порядка. Устанавливается, при каких условиях удовлетворяется бигармоническое уравнение. Граничные условия на верхней и нижней гранях удовлетворяются точно, а на боковых – интегрально (2.13). Из граничных условий на верхней и нижней гранях получаем систему алгебраических уравнений. Путем решения системы уравнений получим все 10 коэффициентов полинома. Система уравнений решается при помощи вычислительного блока

Given

Система алгебраических уравнений

Find($A_1, A_2, A_3, \dots, A_i$) →

как показано в п. 1.3.

Подставим полученные коэффициенты в формулы для напряжений в символьной форме. Тогда получим окончательные выражения для опреде-

ления нормальных и касательных напряжений как в общем виде, так и с учетом заданных исходных данных.

Чтобы построить эпюры нормальных и касательных напряжений необходимо:

- задаться интервалом, в пределах которого изменяется аргумент (в нашем случае y), и шагом аргумента (например, $y:=-1,-0.99..1$). Заметим, что в рассматриваемом здесь программном обеспечении *Mathcad* задается не сам шаг аргумента, а следующее значение аргумента $-0,99$, что соответствует шагу, равному $0,01$;
- установить курсор на то место, где надо построить график;
- на математической панели щелкнуть мышью на кнопке Graph Toolbar – X-Y Plot (плоский график);
- на появившемся шаблоне плоского графика ввести на оси абсцисс имя аргумента, на оси ординат – имя функции (можно наоборот) и щелкнуть мышью вне шаблона.

При этом желательно задаться шагом определения функции и диапазоном значений аргумента. Желательно также задаться и диапазоном значений функции, чтобы график был построен в разумном масштабе. Можно также на одном шаблоне построить несколько графиков. В этом случае по оси ординат необходимо откладывать значение функции. При построении графика можно задаться толщиной, цветом и видом линий. Для этого необходимо подвести курсор на шаблон графика и щелкнуть дважды левой кнопкой мыши. Тогда на экране появится окно, в котором можно задаться желаемыми параметрами кривых графика.

Для получения таблиц числовых значений аргумента и вычисляемых функций необходимо снова задаться шагом аргумента и интервалом вычисления функций (надо иметь в виду, что при построении графиков необходимо задаться достаточно мелким шагом, чтобы получить плавные кривые), например

$$y:=-1,-0.8..1$$

$$y= \quad \quad \sigma_x(2, y) = \quad \quad \sigma_y(2, y) = \quad \quad \tau(2, y) =$$

Эта запись в программе дает команду вычислить функции $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau(x, y)$ в сечении $x = 2$ при значениях аргумента $y = -1, -0,8, -0,6, -0,4, \dots, 1$.

В текстовой области программ внесено большое количество комментариев, необходимых для быстрого ознакомления с программой. Подробнее с программным обеспечением *Mathcad* можно ознакомиться в [5,6].

4. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

4.1. Представление решения плоской задачи теории упругости в тригонометрических рядах Фурье

Метод решения плоской задачи в полиномах имеет один существенный недостаток – функция внешней нагрузки должна быть непрерывной по всей длине балки-стенки. Если к балке-стенке будет приложена сосредоточенная сила или произвольная распределенная нагрузка только на определенном участке балки, то решение задачи в полиномах станет невозможным, так как функция внешней нагрузки в этих случаях будет иметь разрыв и, следовательно, невозможно будет подчинить решение граничным условиям на длинных (горизонтальных) гранях. В таких случаях функция напряжений представляется в тригонометрических рядах Фурье:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(\alpha_n x), \quad (4.1)$$

где Y_n – произвольная функция, зависящая только от y ; α_n – величина, равная:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (4.2)$$

где n – целое число; L – длина балки-стенки.

Подставим решение (4.1) в бигармоническое уравнение (2.12). Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \alpha_n^4 Y_n \right) \sin(\alpha_n x) = 0.$$

Так как x является независимой переменной, то это условие может быть удовлетворено только при

$$\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \alpha_n^4 Y_n = 0. \quad (4.3)$$

Интеграл однородного дифференциального уравнения (4.3) имеет вид

$$Y_n = A_n ch(\alpha_n y) + B_n sh(\alpha_n y) + C_n y ch(\alpha_n y) + D_n y sh(\alpha_n y), \quad (4.4)$$

где A_n , B_n , C_n и D_n – произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на нижней и верхней гранях балки.

Напряжения определяются по формулам (2.11) путем подстановки в них функции (4.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \sin(\alpha_n x); \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n \sin(\alpha_n x); \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \cos(\alpha_n x). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

В формулах (4.5) не учтено влияние собственного веса и сил инерции. Решение в виде (4.1) впервые было предложено Файлоном. Производные, входящие в формулы (4.5), равны:

$$\begin{aligned} \frac{dY_n}{dy} &= A_n \alpha_n sh u + B_n \alpha_n chu + C_n (chu + u sh u) + D_n (sh u + u chu); \\ \frac{d^2 Y_n}{dy^2} &= A_n \alpha_n^2 chu + B_n \alpha_n^2 sh u + C_n \alpha_n (2 chu + u chu) + \\ &+ D_n \alpha_n (2 chu + u sh u), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $u = \alpha_n y$. (4.7)

Аналогичное решение в тригонометрических рядах по косинусам было предложено Рибьером:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\alpha_n x). \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(\alpha_n x); \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n \cos(\alpha_n x); \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \sin(\alpha_n x). \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.2. Подбор функции напряжений

Функция напряжений подбирается в зависимости от условий на боковых гранях балки. Так как граничные условия (2.7) записаны в напряжениях, то при записи граничных условий необходимо использовать формулы (4.5) или (4.9). При выборе того или иного решения поставленной задачи прежде всего следует позаботиться, чтобы были удовлетворены условия на боковых гранях по сдвигающим усилиям P_{yV} потому, что подобрать функцию напряжений, удовлетворяющую условиям по нормальному усилию P_{xV} , значительно проще.

Рассмотрим процедуру подбора функции напряжений на конкретных примерах. На рис. 4.1 показана балка, нагруженная распределенной нагрузкой. Реакции на боковых гранях R_1 и R_2 создают сдвигающие усилия, действующие на этих гранях. Предположим, что условия равновесия соблюдаются.

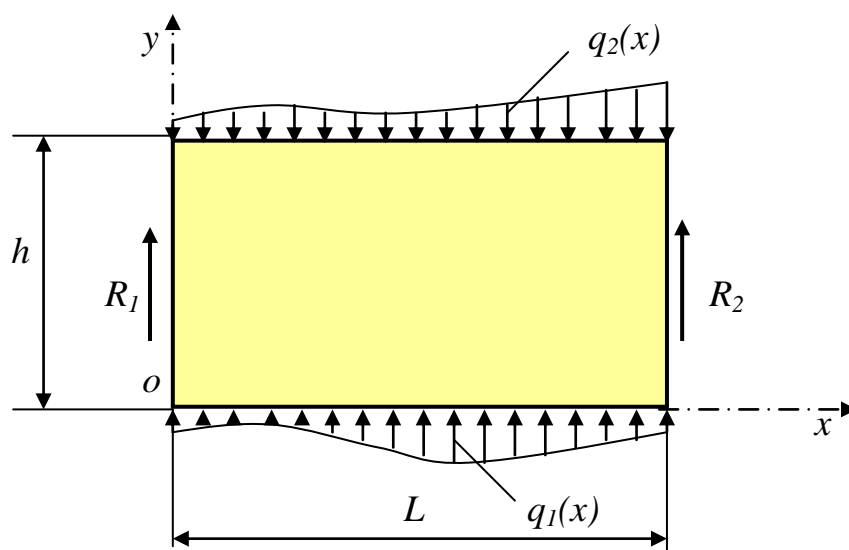


Рис. 4.1

Выберем систему координат, как показано на рис. 4.1. На боковых гранях имеем следующие граничные условия:

левая грань ($x = 0$, $l = -1$, $m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\sigma_x(0, y) = 0; \\ \int_0^h p_{yv} dy = \int_0^h -\tau_{xy}(0, y) dy = R_1, \end{cases} \quad (4.10)$$

правая грань ($x = L$, $l = 1$, $m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x(L, y) = 0; \\ \int_0^h p_{xv} dy = \int_0^h \tau_{xy}(L, y) dy = R_2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Эти условия могут быть удовлетворены, если принять решение в рядах по синусам (4.1), в чем нетрудно убедиться путем подстановки выражений для напряжений (4.5) в условия (4.10) и (4.11).

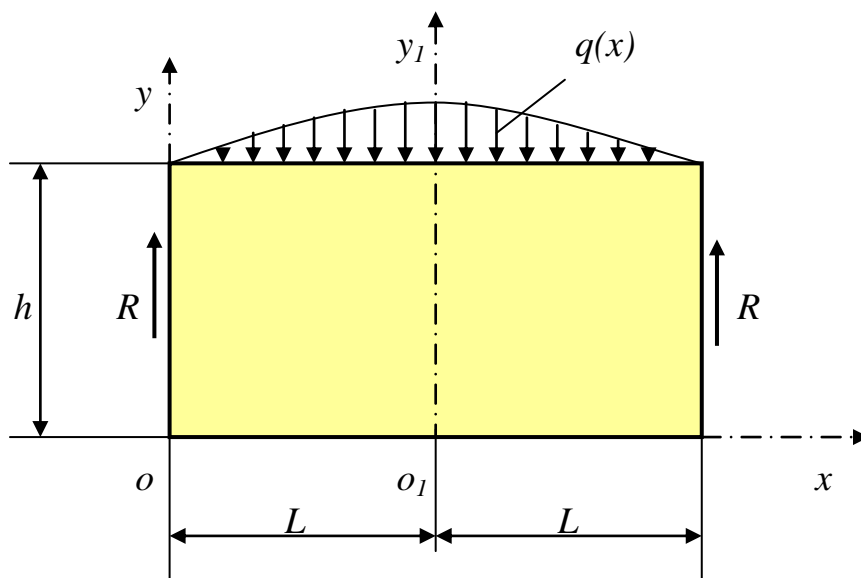


Рис. 4.2

Если внешняя нагрузка симметрична относительно оси y_1 (см. рис. 4.2), то имеются 2 варианта решения. Если выбрать оси координат так, как показано на рис. 4.1, то необходимо принять за основу решение Файлона, так как это дает возможность обратить в ноль нормальные усилия на боковых гранях. Если принять систему координат $x_1o_1y_1$, как показано на рис. 4.2, то будет очевидным, что нормальные напряжения распределяются симметрично относительно оси y_1 (то есть нормальные напряжения будут четными функциями), а касательные

напряжения – кососимметрично (то есть будут нечетными функциями). Такому закону распределения напряжений соответствует решение Рибьера (4.8), что видно из выражений для напряжений (4.9). Однако напряжения (4.9) не соответствуют граничным условиям (4.10) и (4.11). В этом случае пришлось бы к решению для напряжений (4.9) добавить алгебраический полином, позволяющий подчинить решение заданным граничным условиям, что усложнило бы решение задачи. Следовательно, более предпочтительным будет решение Файлона.

Решение Рибьера удобно использовать при решении симметричной задачи (рис. 4.3), в которой боковые грани свободны от сдвигающих усилий, так как из третьей формулы (4.9) следует, что при $x = L$

$$\sin \alpha_n x = \sin n\pi = 0.$$

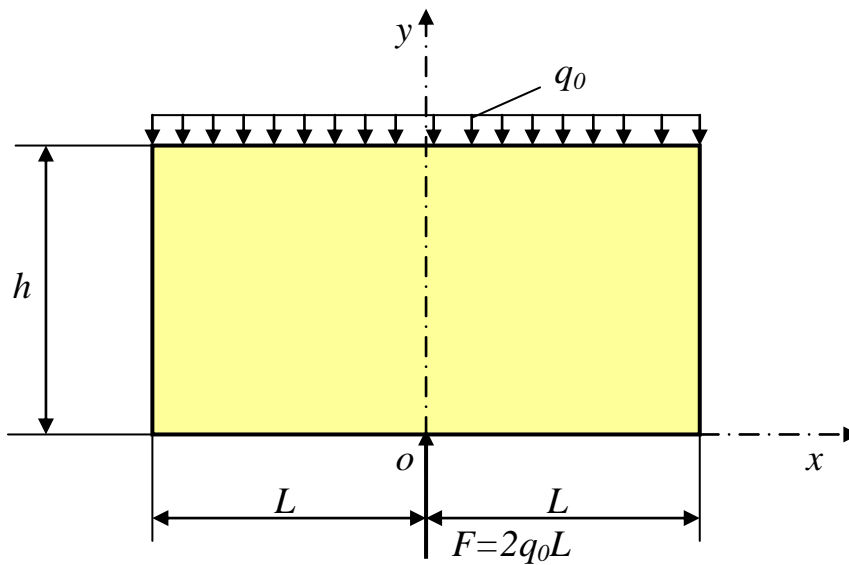


Рис. 4.3

Рассмотрим условия на боковых гранях:

левая грань ($x = -L, l = -1, m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\sigma_x(-L, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(-n\pi) \neq 0; \\ p_{yv} = -\tau_{xy}(-L, y) = -\sum \frac{dY_n}{dy} \sin(-n\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

правая грань ($x = L, l = 1, m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x(L, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(n\pi) \neq 0; \\ p_{yv} = \tau_{xy}(L, y) = \sum \frac{dY_n}{dy} \sin(n\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Из первых условий (4.12) и (3.43) следует, что на боковых гранях приложены какие-то нормальные внешние нагрузки. Для того чтобы избежать от этого фактора, необходимо к решению Рибьера (4.8) добавить алгебраический полином, являющийся функцией от y . Эту функцию можно легко установить при помощи теории сопротивления материалов, составив выражение для нормальных напряжений при чистом изгибе, чтобы не нарушить вторые условия (4.12) и (4.13):

$$\sigma_x = \mathring{A} \left(y - \frac{h}{2} \right), \quad (4.14)$$

где коэффициент E определяется из интегрального граничного условия на левой или правой грани:

$$M(x=L) = \int_0^h \sigma_x(L, y) y dy = 0. \quad (4.15)$$

Тогда к функции напряжений (4.8) необходимо добавить

$$\varphi(x, y) = \iint \sigma_x dy dy = \iint \mathring{A} \left(y - \frac{h}{2} \right) dy dy = \mathring{A} \left(\frac{y^3}{6} - \frac{h y^2}{4} \right). \quad (4.16)$$

Найти решение, точно удовлетворяющее всем граничным условиям на боковых гранях, очень сложно. Поэтому ограничимся приближенными граничными условиями в интегральном смысле. Если результирующие усилия на боковых гранях равны нулю, то есть

$$\begin{cases} N_L = \int_0^h \sigma_x(L, y) dy = 0; \\ M_L = \int_0^h \sigma_x(L, y) y dy = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

то согласно принципу Сен-Венана такие распределенные нормальные нагрузки, приложенные на торцах, могут оказать заметное влияние на напряженное состояние только вблизи торцов балки.

Кроме этого, для подчинения решения, представленного в тригонометрических рядах, граничным условиям на нижней и верхней гранях потребуется и внешнюю нагрузку разложить в ряд по косинусам.

Тригонометрический ряд по косинусам содержит константу. Поэтому к решению (4.8) добавим еще

$$\varphi(x, y) = \frac{G x^2}{2}. \quad (4.18)$$

Отметим, что добавление к решению функции одной переменной не нарушает условий на торцах по сдвигающим усилиям.

Тогда функция напряжений (4.8) окончательно примет вид

$$\varphi(x, y) = \frac{G x^2}{2} + A \left(\frac{y^3}{6} - \frac{h y^2}{4} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\alpha_n x). \quad (4.19)$$

Напряжения будут равны:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = E \left(y - \frac{h}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(\alpha_n x); \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = G - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n \cos(\alpha_n x); \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \sin(\alpha_n x). \end{cases} \quad (4.20)$$

4.3. Определение постоянных интегрирования

Постоянные интегрирования A_n, B_n, C_n, D_n , входящее в решение (4.4), определяются из граничных условий на нижней и верхней гранях балки-стенки (см. рис. 4.1):

нижняя грань ($y=0, l=0, m=-1$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\tau_{xy}(x, 0) = 0; \\ p_{yv} = -\sigma_y(x, 0) = q_1(x), \end{cases} \quad (4.21)$$

верхняя грань ($y = h, l = 0, m = 1$):

$$\begin{cases} p_{xv} = \tau_{xy}(x, h) = 0; \\ p_{yv} = \sigma_y(x, h) = -q_2(x). \end{cases} \quad (4.22)$$

Здесь полагается, что условия равновесия на рис. 4.1 соблюдаются. Так как выражения для напряжений в условиях (4.21) и (4.22) представляются в тригонометрических рядах, то и нагрузки, входящие в правые части граничных условий, необходимо разложить в ряд по синусам при использовании решения Файлона и в ряд по косинусам при использовании решения Рибьера.

4.4. Краткие сведения из теории рядов Фурье

Функция $q_0(x)$ разложима в интервале $[-L, L]$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$q(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\alpha_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\alpha_n x), \quad (4.23)$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L q_0(x) dx; \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L q_0(x) \cos(\alpha_n x) dx; \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L q_0(x) \sin(\alpha_n x) dx, \end{cases} \quad (4.24)$$

если она в интервале $[-L, L]$ кусочно-непрерывна и кусочно-дифференцируема, то есть разложима на конечное число частных интервалов, в пределах которых функция $q_0(x)$ непрерывна и имеет производные. При этом на концах частных интервалов функция должна принимать конечные значения и иметь односторонние производные. В дальнейшем под функцией $q(x)$ будем понимать функцию, аппроксимирующую заданную внешнюю нагрузку $q_0(x)$.

В зависимости от вида симметрии возможны упрощения. Если функция $q_0(x)$ четная (нагрузка симметричная), то есть $q_0(-x) = q_0(x)$, то функция нагрузки разлагается в ряд по косинусам:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L q_0(x) dx; \\ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0(x) \cos(\alpha_n x) dx; \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Если функция $q_0(x)$ нечетная (нагрузка кососимметричная), то есть $q_0(-x) = -q_0(x)$, то функция нагрузки разлагается в ряд по синусам:

$$\begin{cases} a_0 = 0; \\ a_n = 0; \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0(x) \sin(\alpha_n x) dx. \end{cases} \quad (4.26)$$

Рассмотрим пример аппроксимации внешней нагрузки при помощи ряда Фурье. На рис. 4.4 показана балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой длиной $L/2$ в середине балки-стенки. На торцах балки действуют силы $R = qL/4$, равные опорным реакциям.

Решение этой задачи удобнее представлять в виде решения Файлона (ряда по синусам). Следовательно, при записи граничных условий на нижней и верхней гранях необходимо заданную внешнюю нагрузку разложить в ряд по синусам (4.23), (4.26):

$$\begin{cases} a_0 = 0; & a_n = 0; \\ b_n = \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} q_0(x) \sin(\alpha_n x) dx = -\frac{2q_0}{L\alpha_n} (\cos\alpha_n \frac{3L}{4} - \cos\alpha_n \frac{L}{4}) = \\ = -\frac{2q_0}{L\alpha_n} \left(\cos\left(\frac{\alpha_n L}{2} + \frac{\alpha_n L}{4}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_n L}{2} - \frac{\alpha_n L}{4}\right) \right) = \\ = \frac{4q_0}{L} [\sin(\alpha_n e) \cdot \sin(\alpha_n c)]. \end{cases} \quad (4.27)$$

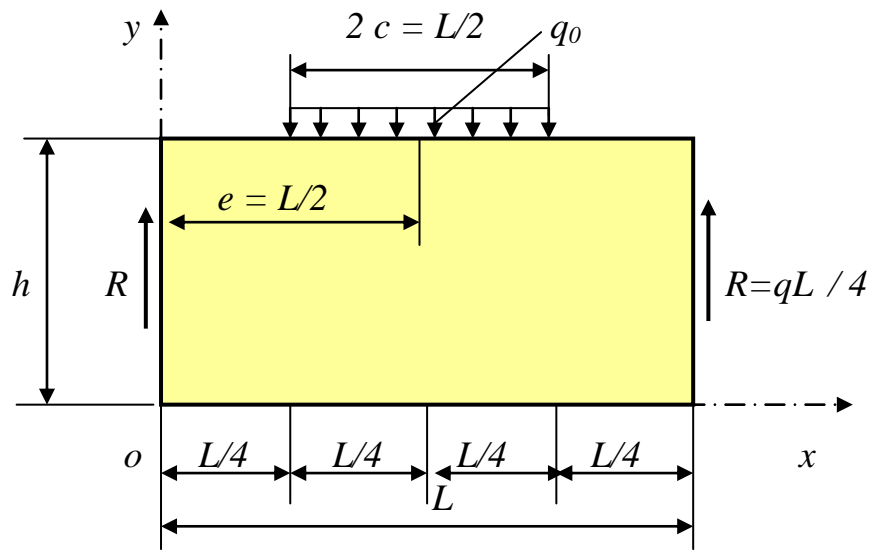


Рис. 4.4

С учетом полученных коэффициентов (4.27) ряд Фурье (4.23) примет вид

$$q(x) = \frac{4q_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \frac{\alpha_n L}{4} \sin \frac{\alpha_n L}{2} \sin(\alpha_n x). \quad (4.28)$$

С учетом принятого выше обозначения (4.2) окончательно получим:

$$q(x) = \frac{4q_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(\alpha_n x). \quad (4.29)$$

Аналогично можно получить аппроксимацию при других случаях нагружения балки (см. прил. 5). Более подробно с решением плоской задачи теории упругости в тригонометрических рядах можно ознакомиться в [8].

4.5. Примеры решения плоской задачи теории упругости в тригонометрических рядах

Пример 1. Для балки-стенки с нагрузкой, показанной на рис. 4.4, требуется найти выражения для нормальных и касательных напряжений и построить эпюры напряжений в сечениях $x = 0, L/8, L/4, 3L/8, L/2$. Решение

представить в тригонометрических рядах. Собственным весом балки пренебречь.

С учетом системы координат, показанной на рис. 4.4, примем за основу решение в тригонометрических рядах по синусам (решение Файлона):

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(\alpha_n x). \quad (4.30)$$

Тогда все граничные условия на торцах балки будут выполнены автоматически: левая грань ($x = 0, l = -1, m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\sigma_x(0, y) = 0; \\ \int_0^h p_{yv} dy = -\int_0^h \tau_{xy}(0, y) dy \neq 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Такие же уравнения получим при рассмотрении условия на правой грани ($x = L, l = 1, m = 0$):

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x(L, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \sin(\alpha_n L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \sin(n\pi) = 0; \\ \int_0^h p_{yv} dy = \int_0^h \tau_{xy}(L, y) dy = \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \cos(n\pi) dy \neq 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Ниже будет доказано, что интегралы (4.31) и (4.32) равны касательным усилиям на торцах или реакциям опор (см. рис. 4.4).

Напряжения определяем по формулам (4.5). Функции Y_n и ее производные Y_n' , Y_n'' , входящие в выражения (4.31) и (4.32), определяем по формулам (4.4) и (4.6).

Постоянные A_n, B_n, C_n, D_n определяем из граничных условий на нижней и верхней гранях (4.21) и (4.22):

нижняя грань ($y = 0, l = 0, m = -1$):

$$\begin{cases} p_{xv} = -\tau_{xy}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n(0)}{dy} \cos(\alpha_n x) = 0; \\ p_{yv} = -\sigma_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(0) \sin(\alpha_n x) = 0; \end{cases} \quad (4.33)$$

верхняя грань ($y = h, l = 0, m = 1$)

$$\begin{cases} p_{xv} = \tau_{xy}(x, h) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n(h)}{dy} \cos(\alpha_n x) = 0; \\ p_{yv} = \sigma_y(x, h) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(h) \sin(\alpha_n x) = -q(x). \end{cases} \quad (4.34)$$

Так как левая часть второго условия (4.34) представлена в тригонометрических рядах, то и заданную нагрузку (см. рис. 4.4) необходимо разложить в ряд по синусам. Для этого воспользуемся данными таблицы в прил. 5 (строка 7):

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{4q_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin(\alpha_n c) \sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x) = \\ &= \frac{4q_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(\alpha_n x). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Подставим ряд (4.35) в правую часть второго условия (4.34). Тогда получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(h) \sin(\alpha_n x) = -\frac{4q_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(\alpha_n x).$$

Это равенство должно удовлетворяться при любых x . Кроме этого, используем свойство: два ряда равны между собой, если каждый член одного ряда равен соответствующему члену другого ряда. Из последнего равенства получим

$$Y_n(h) = \frac{4q_0}{L} \frac{1}{\alpha_n^3} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Тогда граничные условия (4.33) и (4.34) превращаются в систему из четырех алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n, C_n и D_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_n(0) = 0; \\ \frac{dY_n(0)}{dy} = 0; \\ \frac{dY_n(h)}{dy} = 0; \\ Y_n(h) = \frac{4q_0}{L\alpha_n^3} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Подставим в уравнения (4.36) выражения (4.4) и (4.6). Тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = 0; \\ B_n \alpha_n + C_n = 0; \\ A_n \alpha_n sh \psi + B_n \alpha_n ch \psi + C(ch \psi + \psi sh \psi) + \\ + D_n \alpha_n (sh \psi + \psi ch \psi) = 0; \\ A_n ch \psi + B_n sh \psi + C_n h ch \psi + D_n h sh \psi = \frac{4q_0}{L\alpha_n^3} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2}; \end{array} \right. \quad (4.37)$$

где $\psi = \alpha_n h$.

Путем решения системы уравнений (4.37) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = 0; \\ B_n = \frac{4q_0 h \sin \frac{\pi n}{4} \sin \frac{\pi n}{2} (sh \psi + \psi ch \psi)}{\alpha_n^3 L (\psi^2 sh^2 \psi - \psi^2 ch^2 \psi + sh^2 \psi)}; \\ C_n = -\alpha_n B_n; \\ D_n = \frac{4q_0 h \sin \frac{\pi n}{4} \sin \frac{\pi n}{2} sh \psi}{\alpha_n L (\psi^2 sh^2 \psi - \psi^2 ch^2 \psi + sh^2 \psi)}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Формулы для определения нормальных и касательных напряжений (4.5) в развернутом виде запишутся как

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} [& B_n \alpha_n^2 sh u + C_n \alpha_n (2sh u + u ch u) + \\ & + D_n \alpha_n (2ch u + u sh u)] \sin(\alpha_n x); \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\sigma_y = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 [B_n shu + C_n y chu + D_n y shu] \cdot \sin(\alpha_n x); \quad (4.40)$$

$$\tau_{xy} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [B_n \alpha_n chu + C_n (chu + u shu) + D_n (shu + u chu)] \cos(\alpha_n x), \quad (4.41)$$

где $u = \alpha_n y$.

При помощи формул (4.39) – (4.41) с учетом постоянных (4.38) можно определить нормальные и касательные напряжения в любой точке и в любом сечении.

Определим касательные напряжения вблизи от торцевых сечений и проверим, создают ли в сумме эти напряжения реактивные силы на торцах:

левая грань ($x = 0, l = -1, m = 0$):

$$\int_0^h p_{yv} dy = -\int_0^h \tau_{xy} dy = \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \cos(\alpha_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [Y_n(h) - Y_n(0)].$$

Используем формулы (4.36) и преобразуем выражение в квадратных скобках:

$$\int_0^h p_{yv} dy = \frac{4q_0 L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Сумму определим приближенно на *Mathcad*:

$$\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4} \approx 0,617.$$

Точное значение суммы равно $\frac{\pi^2}{16}$.

Тогда

$$\int_0^h p_{xv} dy = \frac{4q_0 L}{\pi^2} \cdot 0,617 = \frac{q_0 L}{4}.$$

На правой грани ($x = L, l = 1, m = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^h p_{y_v} dy &= \int_0^h \tau_{xy}(L, y) dy = \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \cos(\alpha_n L) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [Y_n(h) - Y_n(0)] \cdot \cos n\pi = \frac{4q_0 L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4} \approx \\ &\approx \frac{4q_0 L}{\pi^2} (-0.617) = -\frac{q_0 L}{4}. \end{aligned}$$

Решение этой задачи реализовано в виде *Mathcad*-программы «Задача Файлона» и представлено на сайте кафедры МДТТ (Задача Файлона : *Mathcad*-программа: [сайтМДТТ]. [Хабаровск, 2009]. URL: <http://mdtt.khstu.ru>).

При решении задачи не ставилась цель максимально упростить промежуточные и окончательные выражения, так как при использовании ЭВМ это практически не привело бы к увеличению машинного времени. В программе имеется большое количество текстовых областей, в которых даны подробные объяснения выполняемых процедур. При упрощении выражений использовались операторы: «*collect, A*» (вынести за скобки множитель *A*) и «*simplify*» (упростить). Напряжения, записанные в виде ряда, определяются при помощи оператора цикла «*for*», а система алгебраических уравнений – при помощи блока «*Given*» – «*find(A,B,C,D)*».

Пример 2. Для балки, показанной на рис. 4.3, найти выражения для нормальных и касательных напряжений в тригонометрических рядах. Собственным весом балки пренебречь.

Выберем систему координат, как показано на рис. 4.3. При подборе функции напряжений $\varphi(x, y)$ в первую очередь обратим внимание на то, что на боковых гранях отсутствуют касательные усилия. Так как ось *y* является осью симметрии, то нормальные напряжения должны распределяться симметрично, а касательные напряжения – кососимметрично. Всем этим условиям отвечает решение в тригонометрических рядах по косинусам (решение Рибьера) (4.19):

$$\varphi(x, y) = \frac{G x^2}{2} + E \left(\frac{y^3}{6} - \frac{h y^2}{4} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\alpha_n x), \quad (4.42)$$

Напряжения определяем по формулам (4.20):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = E \left(y - \frac{h}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(\alpha_n x); \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = G - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n \cos(\alpha_n x); \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n}{dy} \sin(\alpha_n x).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Принцип подбора функции напряжений для рассматриваемой здесь задачи подробно рассмотрен в п. 4.2.

Запишем граничные условия на нижней и верхней гранях:
нижняя грань ($y = 0$, $l = 0$, $m = -l$):

$$\left\{ \begin{aligned} p_{xv} = -\tau_{xy}(x, 0) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n(0)}{dy} \sin(\alpha_n x) = 0; \\ p_{yv} = -\sigma_y(x, 0) &= -G + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(0) \cos(\alpha_n x) = q_1(x), \end{aligned} \right. \tag{4.44}$$

верхняя грань ($y = h$, $l = 0$, $m = l$):

$$\left\{ \begin{aligned} p_{xv} = \tau_{xy}(x, h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{dY_n(h)}{dy} \sin(\alpha_n x) = 0; \\ p_{yv} = \sigma_y(x, h) &= G - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(h) \cos(\alpha_n x) = -q_2(x), \end{aligned} \right. \tag{4.45}$$

где $q_1(x)$ и $q_2(x)$ – функции внешних нагрузок, действующих на нижней и верхней гранях балки-стенки.

Знак минус связан с тем, что направление нагрузки, приложенной к нижней грани, противоположно направлению оси y . Так как левая часть вторых условий (4.44) и (4.45) записана в тригонометрических рядах по косинусам, то и внешние нагрузки, приложенные к нижней и верхней граням, необходимо разложить в ряд по косинусам. Из прил. 5 (строка 5) находим для симметричных нагрузок:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(x) = \frac{F}{2L} + \frac{F}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) = q_0 + 2q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x); \\ q_2(x) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\alpha_n x); \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0 \cos(\alpha_n x) = 0. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Подставим разложения в ряд (4.46) в условия (4.44) и (4.45). Тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY_n(0)}{dy} = 0; \\ -G + \alpha_n^2 Y_n(0) = q_0 + 2q_0; \\ \frac{dY_n(h)}{dy} = 0; \\ G - \alpha_n^2 Y_n(h) = -q_0. \end{array} \right.$$

Отсюда имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY_n(0)}{dy} = 0; \\ Y_n(0) = \frac{2q_0}{\alpha_n^2}; \\ \frac{dY_n(h)}{dy} = 0; \\ Y_n(h) = 0, \end{array} \right. \quad (4.47)$$

$$G = -q_0. \quad (4.48)$$

Подставим в уравнения (4.47) выражения (4.4) и (4.6). Тогда получим систему алгебраических уравнений относительно A_n , B_n , C_n и D_n :

$$\begin{cases} A_n = \frac{2qh^2}{\psi^2}; \\ B_n \frac{\psi}{h} + C = 0; \\ A_n \frac{\psi}{h} sh\psi + B_n \frac{\psi}{h} ch\psi + C_n(ch\psi + \psi sh\psi) + D_n(sh\psi + \psi ch\psi); \\ A_n ch\psi + B_n sh\psi + C_n h ch\psi + D_n h sh\psi = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

где $\psi = \alpha_n h$. (4.50)

Путем решения системы уравнений (4.49) получим 4 n произвольных постоянных:

$$\begin{cases} A_n = \frac{2qh^2}{\psi^2}; \\ B_n = -\frac{2qh^2}{\psi^2} \frac{\beta}{\gamma}; \\ C_n = \frac{2qh}{\psi} \frac{\beta}{\gamma}; \\ D_n = -\frac{2qh}{\psi} \frac{sh^2\psi}{\gamma}, \end{cases} \quad (4.51)$$

где $\begin{cases} \beta = \psi + ch\psi ch\psi; \\ \gamma = sh^2\psi - \psi^2. \end{cases}$ (4.52)

Постоянную E в формуле (4.19) определяем из условия, что нормальные усилия (4.12), (4.13) не создают на торцах продольных сил и изгибающих моментов:

левая грань ($x = -L$, $l = -1$, $m = 0$):

$$\begin{aligned} N(x = -L) &= \int_0^{\delta} p_{xv} dy = \int_0^h -\sigma_x(-L, y) dy = \\ &= \int_0^h \left[E \left(y - \frac{h}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \cos(\alpha_n x) \right] dy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\frac{Eh^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [Y_n(h) - Y_n(0)].$$

С учетом зависимостей (4.47) получим

$$E = \frac{2qL^2}{h^3}. \quad (4.53)$$

Подставив формулы (4.48), (4.51) и (4.53) в выражения для напряжений (4.43), окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{2qL^2}{h^3} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \\ & + 2q \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta}{\gamma} shu + \left(1 + \frac{\beta}{\gamma} u \right) chu - \frac{sh^2\psi}{\gamma} (2chu + u shu) \right] \cos(\alpha_n x); \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\sigma_y = -q + 2q \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta}{\gamma} shu - \left(1 + \frac{\beta}{\gamma} u \right) chu + \frac{sh^2\psi}{\gamma} u shu \right] \cos(\alpha_n x); \quad (4.55)$$

$$\tau_{xy} = 2q \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\beta}{\gamma} u \right) shu - \frac{sh^2\psi}{\gamma} (shu + u chu) \right] \sin(\alpha_n x). \quad (4.56)$$

По формулам (4.54), (4.55) и (4.56) можно определить нормальные и касательные напряжения в любом сечении. Так как решение (4.54) – (4.56) получено путем подчинения его интегральным граничным условиям на торцах, то напряжения, определяемые при помощи полученных формул, будут достаточно точными лишь на участках, расположенных на некотором удалении от торцов балки. Данная задача реализована при помощи программного обеспечения *Mathcad* в виде *Mathcad*-программы «Задача Рибьера» (Задача Рибьера: *Mathcad*-программа : [сайт МДТТ]. [Хабаровск, 2009]. URL: <http://mdtt.khstu.ru>).

При численной реализации задачи необходимо помнить, что ряд сходится тем скорее, чем более гладкой является функция внешней нагрузки. Например, при действии сосредоточенной силы необходимо удержать достаточно большое количество членов ряда. При этом нельзя забывать о том, что в точке, где приложена сосредоточенная сила, ряд расходится и стремится к бесконечности.

5. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

5.1. Сжатие клина

Известно, что при действии на острие клина сосредоточенной силы (рис. 5.1) возникает (в полярной системе координат) линейное напряженное состояние:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \quad (5.1)$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0.$$

С учетом зависимостей

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad \cos \theta = \frac{y}{r} \quad (5.2)$$

и известных в сопротивлении материалов зависимостей

между напряжениями на горизонтальных (вертикальных) и наклонных площадках запишем формулы (5.1) в декартовых координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

В случае полуплоскости (рис. 5.2) $\alpha = \pi/2$ формулы (5.1) и (5.3) принимают вид

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \cos \theta \quad (5.4)$$

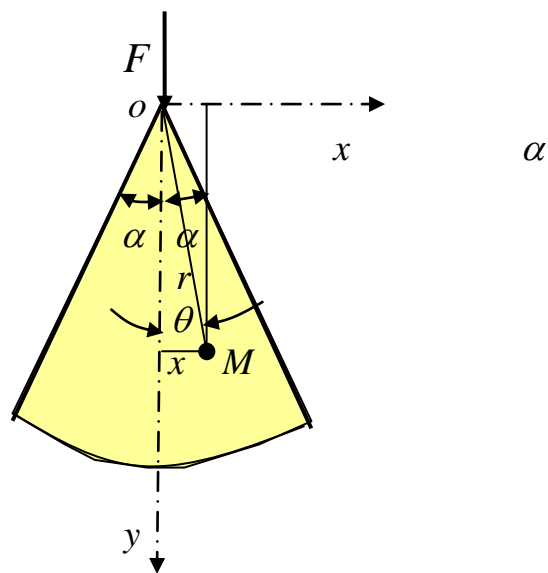


Рис. 5.1

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases} \quad (5.5)$$

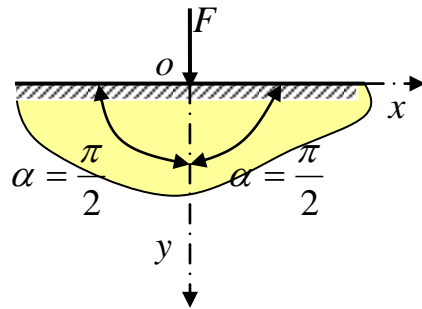


Рис. 5.2

Покажем, что на любой окружности, касающейся к границе полуплоскости в точке А (рис. 5.3), радиальные напряжения σ_r постоянны.

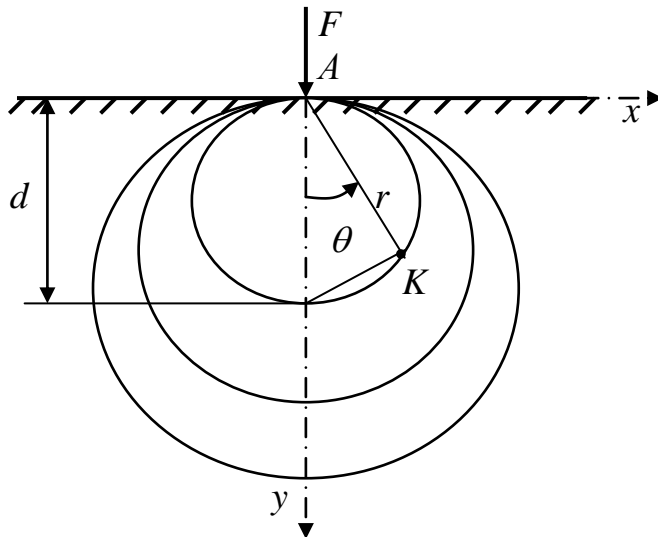


Рис. 5.3

Из рисунка имеем

$$r = d \cos \theta.$$

Тогда формула (5.4) примет вид

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d} = \text{const.}$$

Следовательно, в любой точке окружности радиальное напряжение имеет постоянное значение.

В случае, если к полуплоскости приложены n сосредоточенных сил F_i (рис. 5.4), то напряжения, вызываемые любой силой F_i , будут равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x_i} = -\frac{2F_i}{\pi} \frac{y^3}{(x_i^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_{y_i} = -\frac{2F_i}{\pi} \frac{x_i^2 y}{(x_i^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{x_i y_i} = -\frac{2F_i}{\pi} \frac{x_i y^2}{(x_i^2 + y^2)^2} \end{array} \right.$$

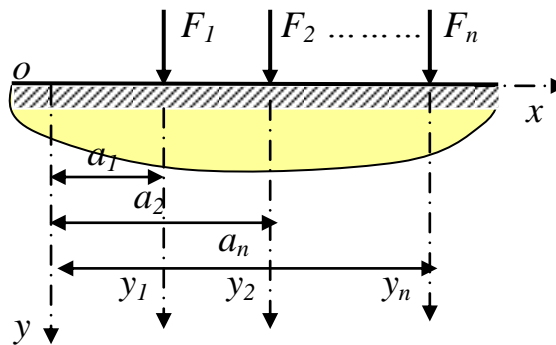


Рис. 5.4

Так как

$$x_i = x - a_i,$$

то нормальные и касательные напряжения, возникающие от всех сил F_i , будут равны:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{y^3}{[(x-a_i)^2 + y^2]^2}; \\ \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{(x-a_i)^2 y}{[(x-a_i)^2 + y^2]^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{(x-a_i)y^2}{[(x-a_i)^2 + y^2]^2}, \end{cases} \quad (5.6)$$

где a_i – координата силы F_i .

5.2. Изгиб клина

Рассмотрим задачу изгиба клина, когда вертикальная сила, приложенная к вершине (см. рис. 5.1) направлена горизонтально. При изгибе клина формулы для определения напряжений (5.1) в полярных координатах примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{r}; \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

При переходе к декартовым координатам с учетом формул

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

при $\alpha = \pi/2$ (случай упругой полуплоскости) имеем

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases} \quad (5.8)$$

При действии на полуплоскость n горизонтальных сил (рис. 5.5) по аналогии с предыдущей задачей (действие вертикальных сил на полуплоскость) будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{(x-b_i)y^2}{[(x-b_i)^2 + y^2]^2}; \\ \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{(x-b_i)^3}{[(x-b_i)^2 + y^2]^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n F_i \frac{(x-b_i)^2 y}{[(x-b_i)^2 + y^2]^2}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

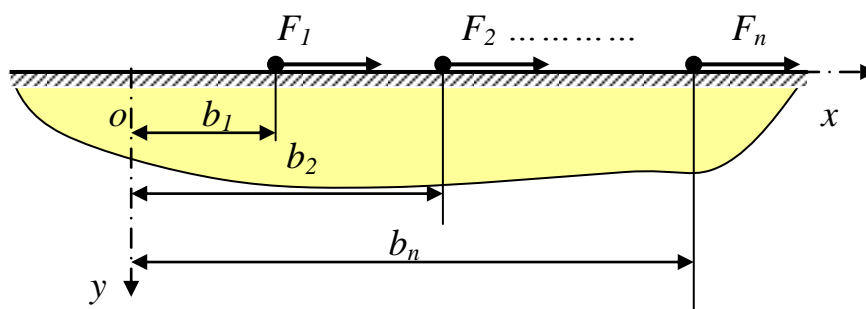


Рис. 5.5

5.3. Действие распределенной нагрузки на границе упругой полуплоскости

В случае действия распределенной нагрузки (рис. 5.6) можем использовать формулы (5.6) для сосредоточенных сил (при $n = 1$), предварительно представив распределенную нагрузку как множество бесконечно малых сосредоточенных сил, равных

$$dF = q(\bar{x})d\bar{x}.$$

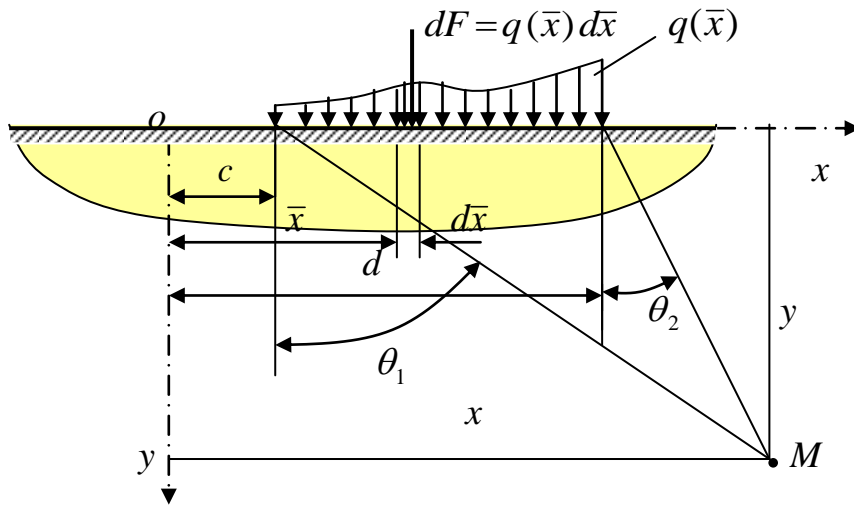


Рис. 5.6

Тогда напряжения, возникающие от бесконечно малой нагрузки dF , определяем по формулам (5.6) при $n = 1$, заменив a на \bar{x} :

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= -\frac{2q(\bar{x})d\bar{x}}{\pi} \frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}; \\ d\sigma_y &= -\frac{2q(\bar{x})d\bar{x}}{\pi} \frac{(x-\bar{x})^2 y}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}; \\ d\tau_{xy} &= -\frac{2q(\bar{x})d\bar{x}}{\pi} \frac{(x-\bar{x})y^2}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}. \end{aligned}$$

Напряжения, возникающие от всей нагрузки, определяем как интеграл этих выражений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \int_c^d -\frac{2q(\bar{x})}{\pi} \cdot \frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2} d\bar{x}; \\ \sigma_y = \int_c^d -\frac{2q(\bar{x})}{\pi} \cdot \frac{(x-\bar{x})^2 y}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2} d\bar{x}; \\ \tau_{xy} = \int_c^d -\frac{2q(\bar{x})}{\pi} \cdot \frac{(x-\bar{x})y^2}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2} d\bar{x}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Проинтегрировать выражения (5.10) достаточно сложно даже при $q(x)=q_0$. Для реализации задачи об определении поля напряжений в полуплоскости на

ЭВМ удобнее правую часть выражений (5.10) записать в полярных координатах и проинтегрировать, а затем полученное решение представить в декартовых координатах.

Формулы для определения напряжений при действии вертикальной силы в упругой полуплоскости получим, если в формулах (5.1) примем $\alpha = \pi/2$:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Напряжения в вертикальных и горизонтальных площадках можно определять при помощи формул сопротивления материалов при одноосном напряженном состоянии:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta; \\ \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta; \\ \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (5.12)$$

Тогда формулы (5.10), записанные в полярных координатах при помощи формул (5.11) и (5.12) при $q(\bar{x}) = q_0$, после интегрирования записываются так:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{q_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1]; \\ \sigma_y = \frac{q_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1]; \\ \tau_{xy} = \frac{q_0}{\pi} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1). \end{cases} \quad (5.13)$$

Из рис. 5.6 видно, что

$$\begin{cases} \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{x-c}{y}; \\ \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{x-d}{y}, \end{cases} \quad (5.14)$$

где c и d – координаты начала и конца распределенной нагрузки

(см. рис. 5.6).

Подставив выражения (5.14) в формулы (5.13) получим окончательные выражения для определения напряжений в полуплоскости, если к ее границе приложена вертикальная равномерно-распределенная нагрузка. Такой путь решения удобен при символьном решении задачи с использованием ЭВМ.

В случае действия к границе полуплоскости горизонтальной равномерно-распределенной нагрузки (рис. 5.7) аналогично получим

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{q_0}{\pi} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1); \\ \sigma_y = -\frac{q_0}{\pi} \left[(\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) + 2 \ln \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right]; \\ \tau_{xy} = \frac{q_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1]. \end{cases} \quad (5.15)$$

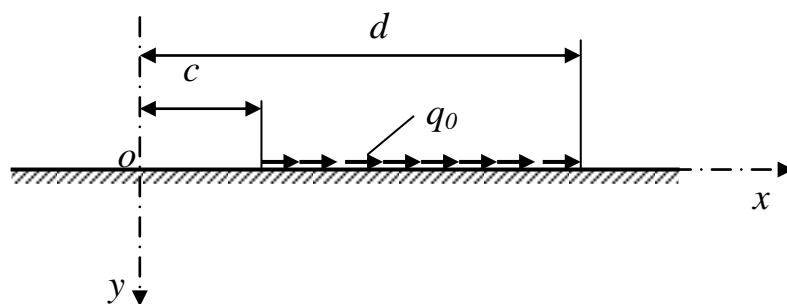


Рис. 5.7

Подставив формулы (5.14) в выражения (5.15), можно записать правую часть формул (5.15) в декартовых координатах. Более подробно с выводом формул (5.13) и (5.15) можно ознакомиться в [4].

При одновременном приложении к границе полуплоскости вертикальных и горизонтальных сосредоточенных сил, а также вертикальной и горизонтальной равномерно-распределенной нагрузки общее напряжение определяется как алгебраическая сумма напряжений, определяемых по формулам (5.6), (5.9), (5.13) и (5.15).

Дополнительные сведения по этой теме можно получить в [1, 2, 3, 4].

5.4. Пример определения поля напряжений в полуплоскости

К границе полуплоскости приложены три вертикальные сосредоточенные силы и равномерно-распределенная нагрузка, как показано на рис. 5.8.

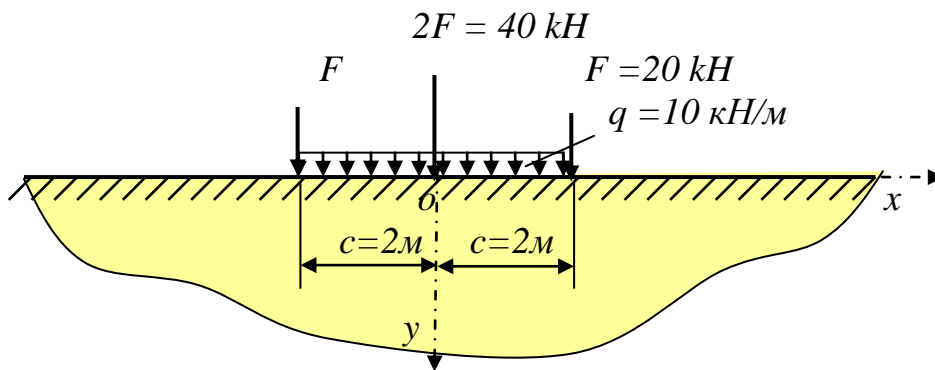


Рис. 5.8

Требуется:

1. Составить выражения нормальных и касательных напряжений для произвольной точки полупространства;
2. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечениях: $y = 1, 2, 3, 4$ и 5 м .

Так как формулы для определения напряжений достаточно громоздкие и для построения эпюр напряжений в пяти сечениях необходимо определить напряжения в большом количестве точек, то решение поставленной задачи выполним на ЭВМ при помощи программного обеспечения *Mathcad*.

Поставленная задача реализована в виде *Mathcad*-программы «Задача Фламана», с которой можно ознакомиться на сайте кафедры механики деформируемого твердого тела (МДТТ) института архитектуры и строительства (ИАиС) ТОГУ (Задача Фламана : *Mathcad*-программа : [сайт МДТТ]. [Хабаровск, 2009]. URL: <http://mdtt.khstu.ru>).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии рассмотрены лишь плоские задачи теории упругости, так как согласно учебному плану у магистров по направлению строительной специальности после изучения курса «Теория упругости» следует «Теория пластин и оболочек». Однако в пособии уделено большое внимание решению плоской задачи теории упругости с использованием программного обеспечения *Mathcad*. Специфика решения таких задач теории упругости, как исследование напряженного состояния в точке тела, решение плоской задачи теории упругости в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах Фурье, а также исследование поля напряжений в упругой полуплоскости, требует широкого применения математического аппарата, начиная с простых математических преобразований и кончая дифференцированием, интегрированием и решением системы алгебраических уравнений.

Все указанные выше процедуры необходимо выполнять в символьном виде, а затем получать численные результаты. Как раз программное обеспечение *Mathcad* и является одним из немногих программных обеспечений, позволяющих получать решение задач в символьном виде. Символьное решение задач значительно расширяет возможность научных исследований и способствует творческому отношению студентов к работе при анализе полученных решений.

Для активного привлечения студентов к учебно-исследовательской и научно-исследовательской работе в приложениях предложены задачи для самостоятельной работы по разделам: «Напряженное состояние в точке тела» (прил. 1), «Решение плоской задачи в полиномах» (прил. 2), «Решение плоской задачи в тригонометрических рядах» (прил. 3) и «Определение поля напряжений в упругой полуплоскости» (прил. 4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров А. В.* Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.
2. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль.– М. : Высш. шк., 1982. – 264 с.
3. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.
4. *Киселев В. А.* Плоская задача теории упругости / В. А. Киселев. – М. : Высш. шк., 1976. – 151 с.
5. *Макаров Е. Г.* Mathcad. Учебный курс / Е. Г. Макаров. – С.-Пб., 2009. – 381 с.
6. *Кирьянов Д. В.* Mathcad 14 / Д. В. Кирьянов. – С.-Пб., 2007. – 682 с.
7. Плоская задача теории упругости : метод. указ. / сост. Тен Ен Со, Г. С. Нечипорук. – Хабаровск : Изд-во Хабар. политехн. ин-та, 1979. – 45 с.
8. Методические указания к решению плоской задачи теории упругости в тригонометрических рядах / сост. Тен Ен Со. – Хабаровск : Изд-во Хабар. политехн. ин-та, 1979. – 43 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗАДАЧА № 1. Исследование напряженного состояния в точке

Напряженное состояние в точке задано девятью компонентами напряжений:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$. Требуется:

1. Определить проекции на координатные оси полных напряжений $p_{x\nu}, p_{y\nu}$ и $p_{z\nu}$, действующих на наклонной площадке;
2. Определить нормальные и касательные напряжения σ_ν, τ_ν , действующие на наклонной площадке;
3. Определить инварианты тензора напряжений;
4. Определить главные напряжения;
5. Определить положение нормалей к главным площадкам (направляющие косинусы нормалей к главным площадкам). На рисунке показать направления главных напряжений;
6. Проверить правильность определения направляющих косинусов нормалей к главным площадкам.

Исходные данные к задаче № 1

№ п/п	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа
1	80	60	160	100	60	80
2	100	120	80	50	100	60
3	90	90	120	60	70	100
4	-90	-100	-120	80	60	100
5	100	120	70	60	80	110
6	160	80	60	100	-90	-60
7	110	80	120	120	50	50
8	100	150	50	100	70	-90
9	150	70	80	-90	-80	60
10	-140	-60	-100	60	100	90
11	150	90	60	110	-50	-60
12	130	100	70	90	100	90
13	-70	-130	-110	120	60	80
14	120	110	150	-70	-80	70
15	-110	-70	-90	80	100	90
16	140	90	110	90	-110	-80
17	110	120	90	110	-50	-120
18	-140	-110	-120	120	70	110
19	-120	-140	-120	130	80	120
20	130	140	80	-140	-90	130

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЗАДАЧА № 2. Решение плоской задачи теории упругости в полиномах

Для балки, нагруженной заданной нагрузкой (в соответствии со схемами), предложена функция напряжений в виде полинома. Требуется:

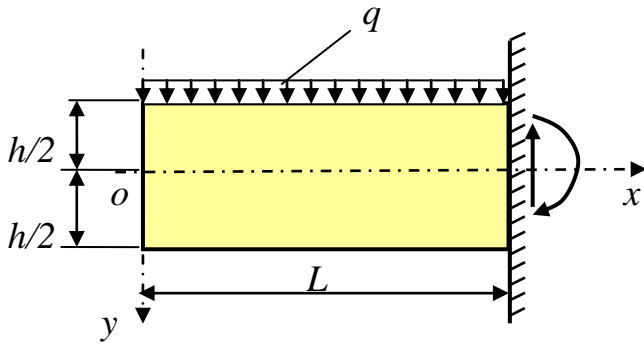
- 1) установить, при каких соотношениях между коэффициентами полинома удовлетворяется бигармоническое уравнение;
- 2) найти выражения для нормальных и касательных напряжений;
- 3) составить граничные условия (в общей символьной форме) для верхней, нижней, левой и правой граней (для симметричных задач вместо левой грани рассматривается условие на оси симметрии);
- 4) решить полученную систему уравнений, состоящую из граничных условий и условий, при которых удовлетворяется бигармоническое уравнение, в общем виде;
- 5) составить выражения для напряжений в общем виде с учетом полученных коэффициентов полинома;
- 6) найти выражения для напряжений с учетом своих исходных данных;
- 7) проверить, удовлетворяются ли все граничные условия;
- 8) построить эпюры нормальных и касательных напряжений для сечений: $x = 0, L/2, L$ или $x = 0, L/4, L/2$ (для симметричных задач – схемы 5–12).
- 9) исследовать, как влияет отношение h/L на деформацию поперечного сечения балки (кроме схемы № 22). Сделать количественную оценку расхождений решений сопротивления материалов от решения теории упругости. Решение задачи представить в виде *Mathcad*-программы в символьном виде и выполнить необходимые вычисления на ЭВМ при заданных исходных данных.

Таблица исходных данных к задаче № 2

№ п/п	$h, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$\gamma, \text{ кН/м}^2$	$q=q_0=q_1$ $q_2=2q_1,$ кН/м^2	$F, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$
1	2	2	10	10	10	10
2	4	4	20	20	20	20
3	6	6	30	30	30	30
4	2	4	40	30	40	40
5	4	6	20	10	10	20
6	6	8	40	20	30	30
7	4	8	30	20	20	40
8	4	5	30	40	20	10
9	2	3	40	40	10	20
10	6	10	20	30	30	10

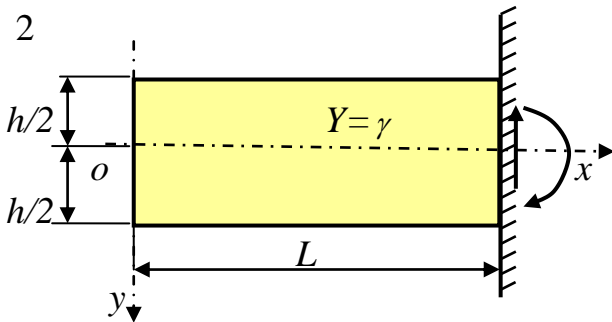
Схемы к задаче № 2

1



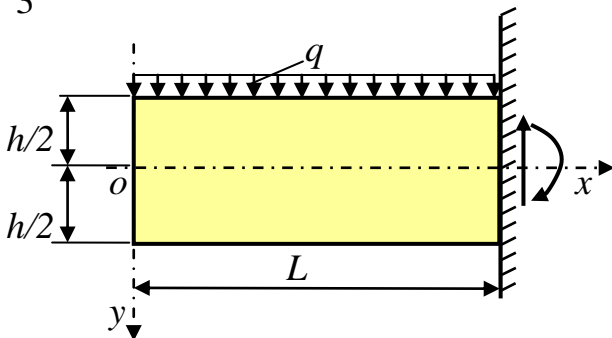
$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 x^2 y^3 + A_5 y^5$$

2



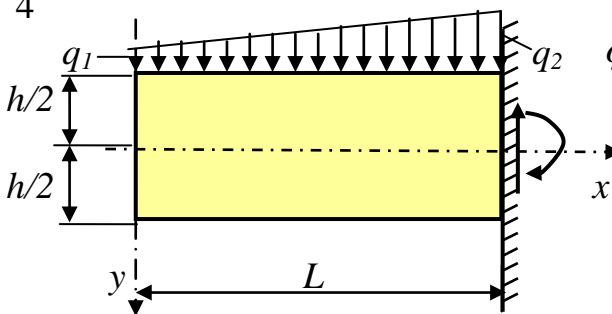
$$\varphi(x, y) = A_1 y^5 + A_2 x^2 y^3 + A_3 y^3 + A_4 x^2 y$$

3

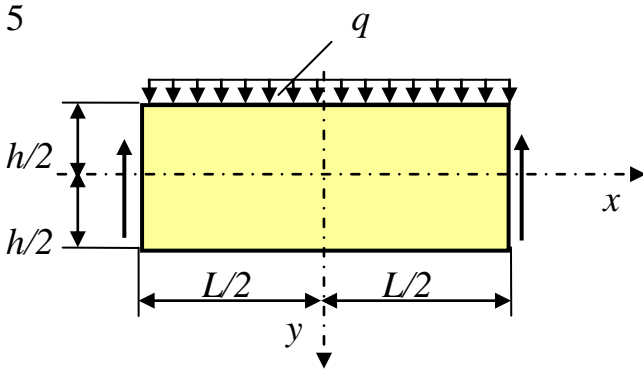


$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 x^2 y^3 + A_5 y^5$$

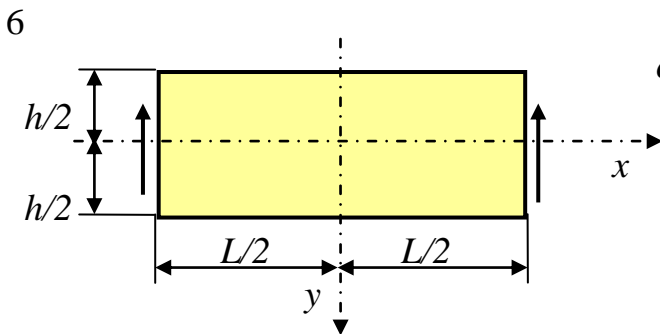
4



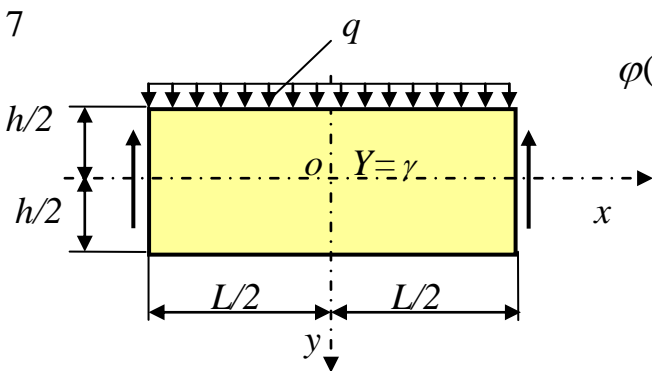
$$\varphi(x, y) = A_1 x y^5 + A_2 x^3 y^3 + A_3 x^2 y^3 + A_4 y^5 + A_5 x^3 y + A_6 x y^3 + A_7 x^3 + A_8 y^3 + A_9 x^2 y + A_{10} x^2 + A_{11} x y$$



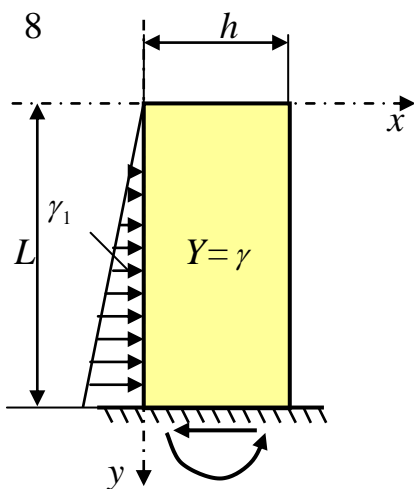
$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 y^3 + A_2 y^5 + A_3 x^2 y + A_4 y^3 + A_5 x^2$$



$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 y^3 + A_2 y^5 + A_3 x^2 y + A_4 y^3$$

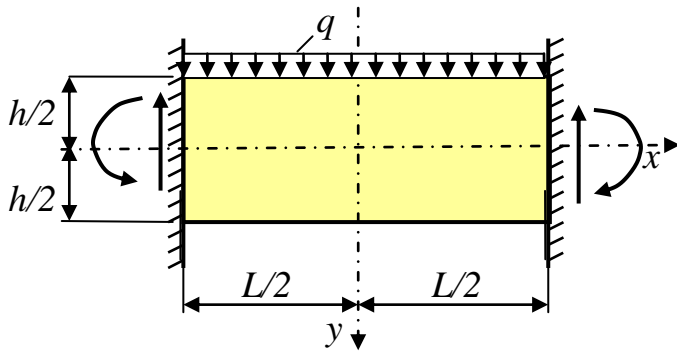


$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 y^3 + A_2 y^5 + A_3 x^2 y + A_4 y^3 + A_5 x^2$$



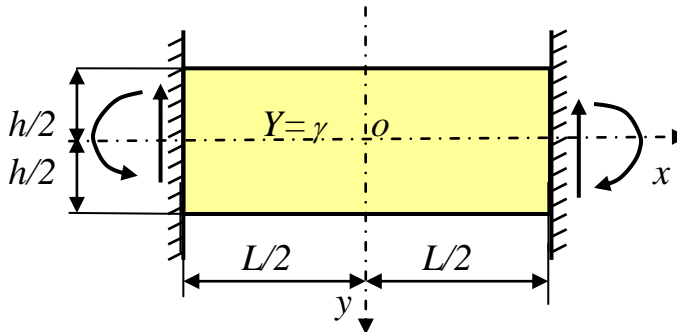
$$\varphi(x, y) = A_1 x^3 y^3 + A_2 x^5 y + A_3 x^2 y^3 + A_4 x^4 y + A_5 x^3 y + A_6 y^3 + A_7 x^2 y$$

9



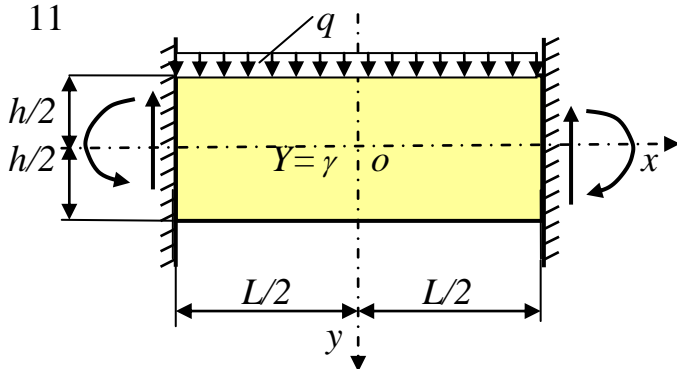
$$\varphi(x, y) = A_1 y^5 + A_2 x^2 y^3 + A_3 y^3 + A_4 x^2 y + A_5 x^2$$

10



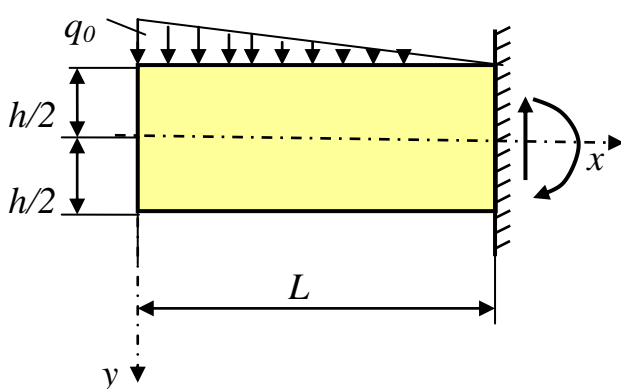
$$\varphi(x, y) = A_1 y^5 + A_2 x^2 y^3 + A_3 y^3 + A_4 x^2 y$$

11



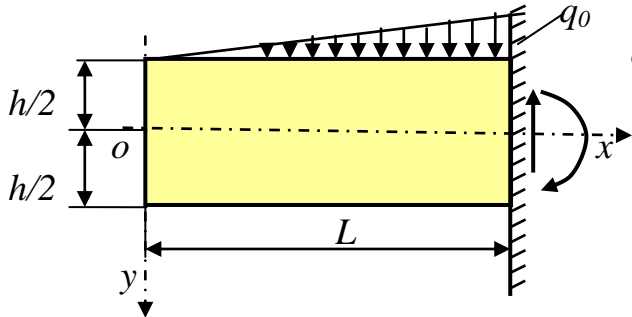
$$\varphi(x, y) = A_1 y^5 + A_2 x^2 y^3 + A_3 y^3 + A_4 x^2 y + A_5 x^2$$

12



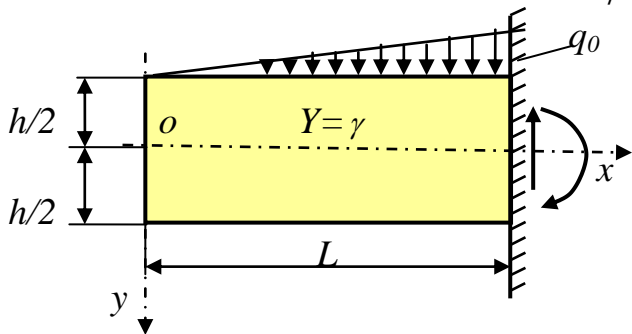
$$\varphi(x, y) = A_1 xy^5 + A_2 x^3 y^3 + A_3 x^2 y^3 + A_4 y^5 + A_5 x^3 y + A_6 xy^3 + A_7 x^3 + A_8 y^3 + A_9 x^2 y + A_{10} x^2 + A_{11} xy$$

13



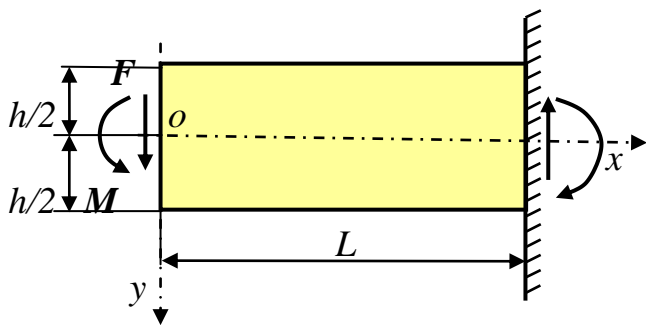
$$\varphi(x, y) = A_1 x^3 y^3 + A_2 xy^5 + A_3 xy^3 + A_4 x^3 y + A_5 x^3 + A_6 xy$$

14



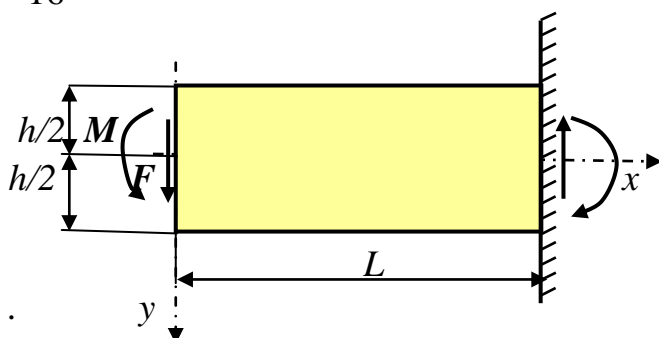
$$\varphi(x, y) = A_1 x^3 y^3 + A_2 xy^5 + A_3 y^5 + A_4 x^2 y^3 + A_5 xy^3 + A_6 x^3 y + A_7 x^3 + A_8 y^3 + A_9 x^2 y + A_{10} xy$$

15



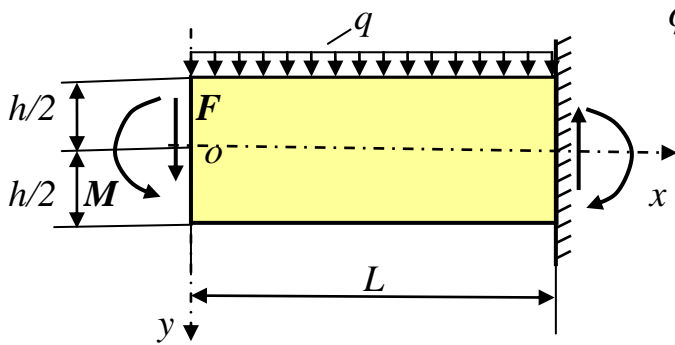
$$\varphi(x, y) = A_1 xy + A_2 y^3 + A_3 xy^3$$

16



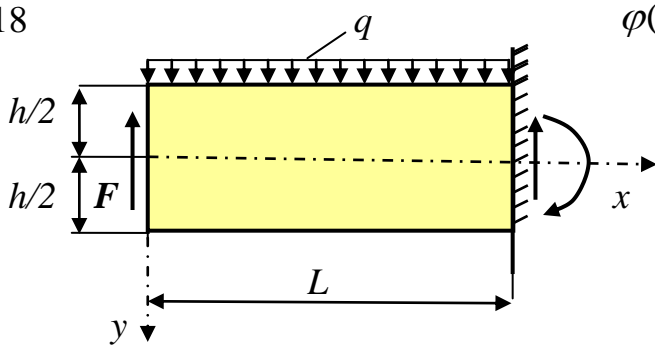
$$\varphi(x, y) = A_1 xy + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 xy^3 + A_5 x^2 y^3 + A_6 y^5$$

17



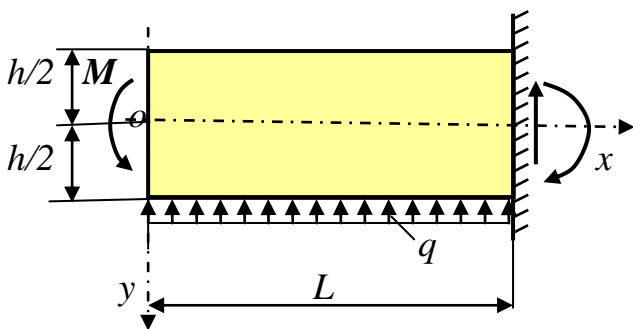
$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 x^2 y + A_4 y^3 + A_5 xy^3 + A_6 x^2 y^3 + A_7 y^5$$

18



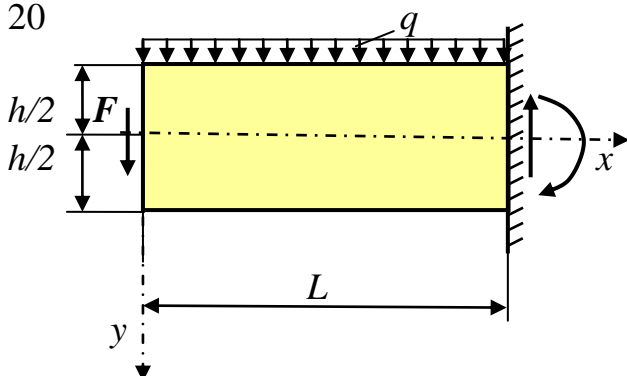
$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 x^2 y + A_4 y^3 + A_5 xy^3 + A_6 x^2 y^3 + A_7 y^5$$

19



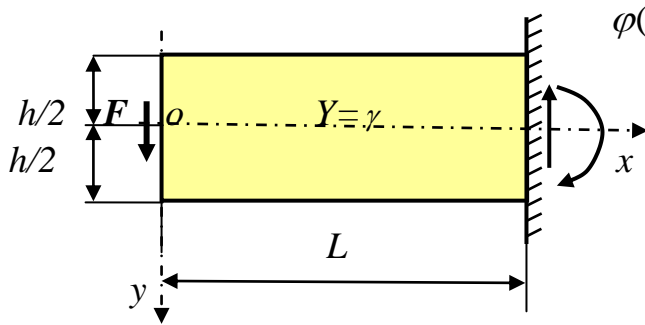
$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 x^2 y^3 + A_5 y^5$$

20



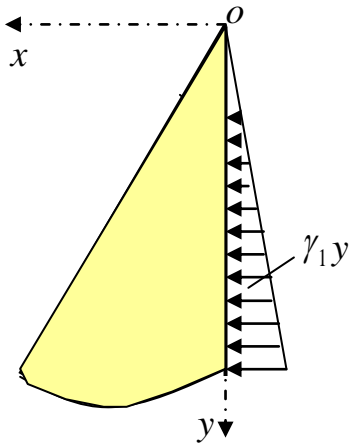
$$\varphi(x, y) = A_1 xy + A_2 x^2 + A_3 x^2 y + A_4 y^3 + A_5 xy^3 + A_6 x^2 y^3 + A_7 y^5$$

21



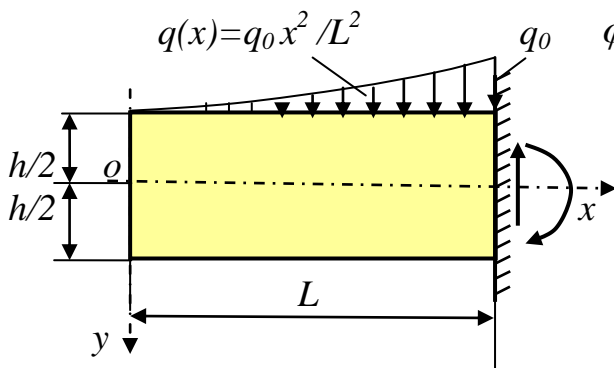
$$\varphi(x, y) = A_1 xy + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 xy^3 + A_5 x^2 y^3 + A_6 y^5$$

22



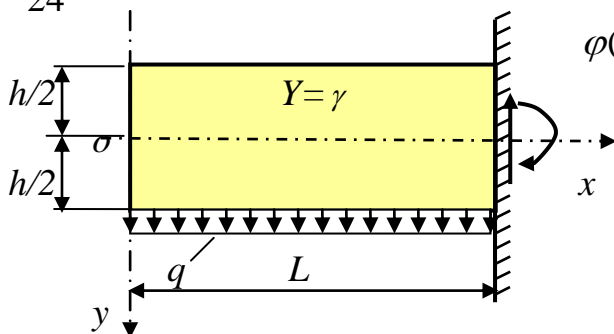
$$\varphi(x, y) = A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 xy^2 + A_4 y^3$$

23



$$\varphi(x, y) = A_1 y^7 + A_2 x^2 y^5 + A_3 x^4 y^3 + A_4 y^5 + A_5 x^2 y^3 + A_6 x^4 y + A_7 x^4 + A_8 y^4 + A_9 y^3 + A_{10} x^2 y + A_{11} y^2$$

24



$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x^2 y + A_3 y^3 + A_4 x^2 y^3 + A_5 y^5$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Задача № 3. Решение плоской задачи теории упругости
в тригонометрических рядах**

Для балки, показанной на схемах к задаче № 3, требуется:

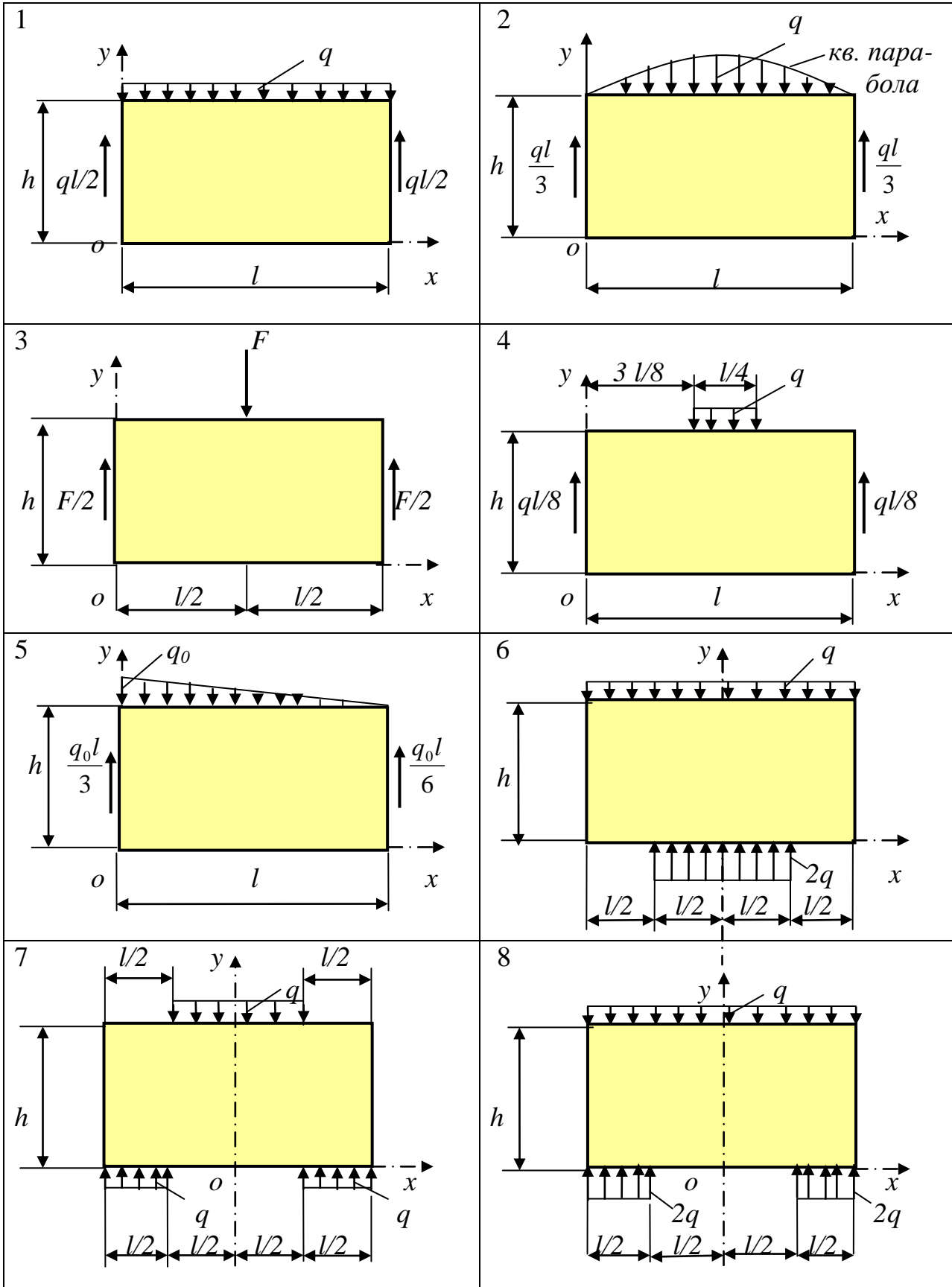
1. Подобрать функцию напряжений в тригонометрических рядах Фурье с учетом принятой системы координат;
2. Найти выражения для нормальных и касательных напряжений.
3. Проверить, удовлетворяет ли принятое решение граничным условиям на торцах балки.
4. Из граничных условий на нижней и верхней гранях определить коэффициенты функции $Y(y)$;
5. Путем подчинения решения граничным условиям на боковых гранях балки определить коэффициенты, принятые при уточнении решения в п. 3;
6. Найти окончательные выражения нормальных и касательных напряжений с учетом полученных коэффициентов;
7. Проверить, удовлетворяет ли полученное решение граничным условиям задачи;
8. Определить наибольшее нормальное напряжение σ_x при различных n , где n количество учитываемых при расчете членов ряда. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечениях $x = 0, 0,1l, 0,2l, 0,3l, 0,4l, 0,5l$ (для схем № 1–5) и в сечениях $x = 0, 0,2l, 0,4l, 0,6l, 0,8l, 1,0l$ (для схем № 6–8), а также эпюры напряжений σ_y в сечениях $y = 0, 0,2h, 0,4h, 0,6h, 0,8h, 1,0h$.

Решение реализовать в *Mathcad* в символьной форме и выполнить все необходимые вычисления на ЭВМ.

Исходные данные к задаче № 3

№ п/п	$L, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$q=q_0, \text{ кН/м}$	$F, \text{ кН}$
1	2	1	30	40
2	3	2	20	30
3	4	2	10	20
4	5	3	40	40
5	6	3	25	25
6	6	4	16	36

Схемы к задаче № 3



ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Задача № 4. Напряженное состояние в упругой полуплоскости

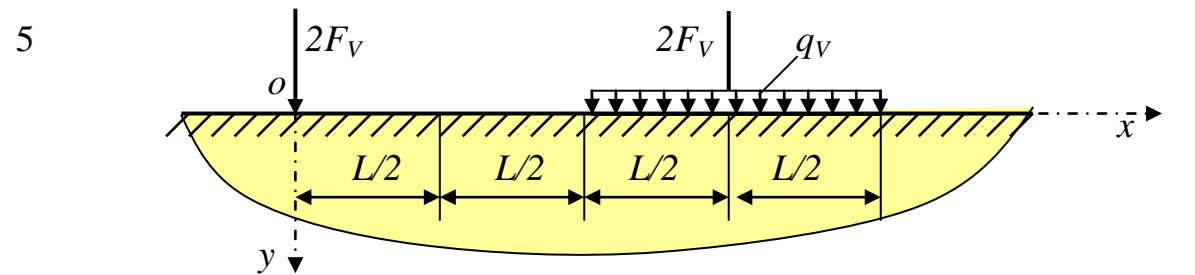
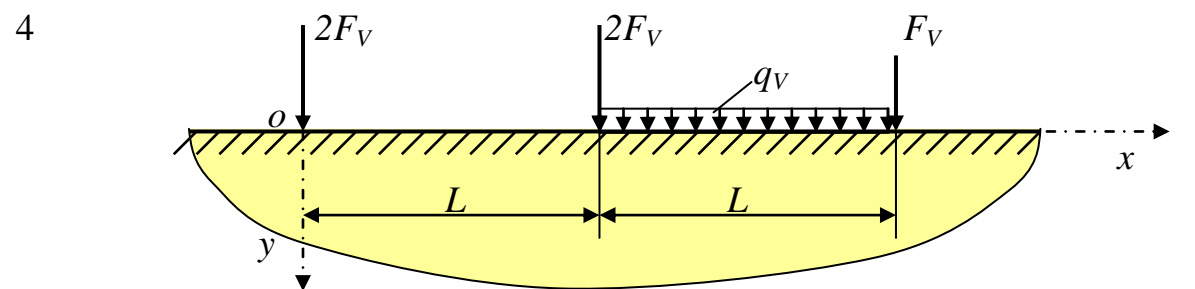
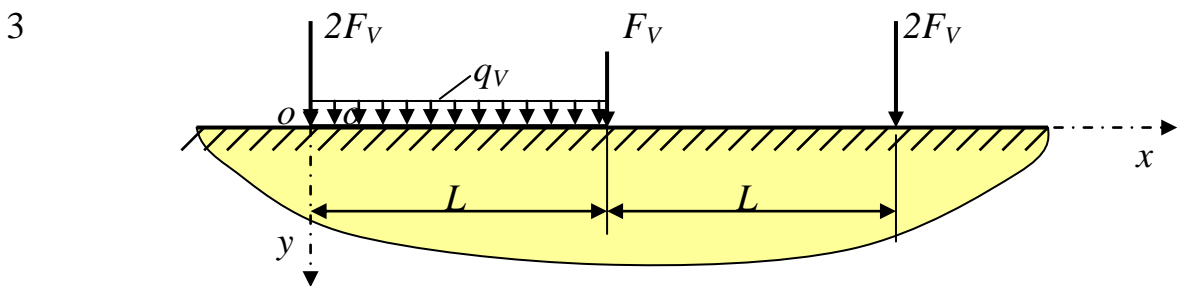
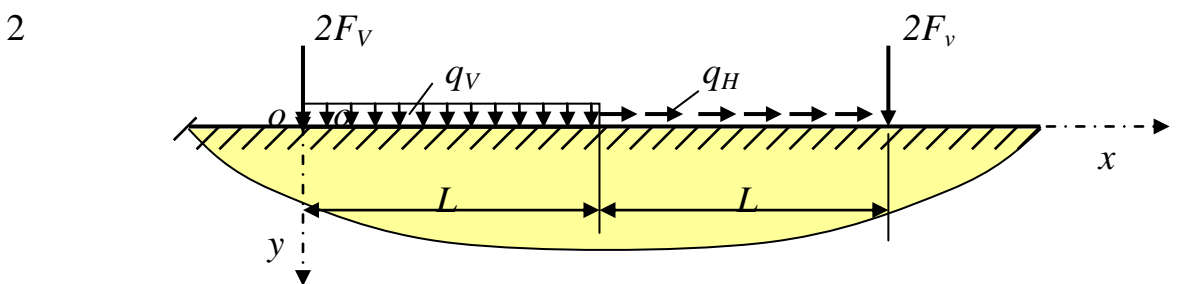
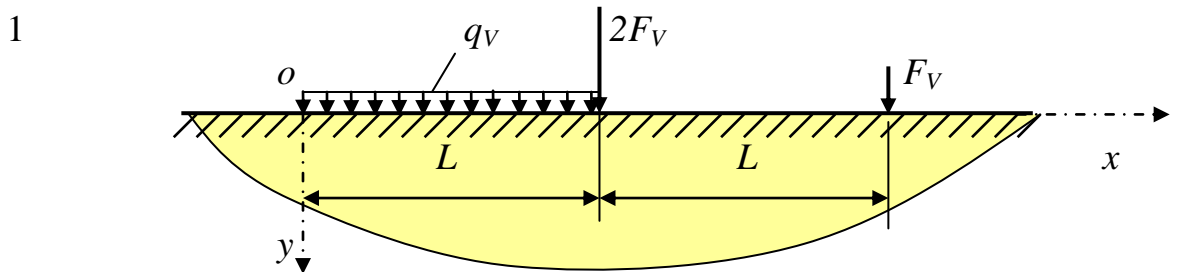
К границе полуплоскости приложены вертикальные (F_V), горизонтальные (F_H) сосредоточенные силы, а также вертикальные (q_V) и горизонтальные (q_H) равномерно распределенные нагрузки. Требуется построить эпюры нормальных (σ_x и σ_y) и касательных (τ_{xy}) напряжений в сечениях: $y = 1, 2, 3, 4, 5$ м на участке ($-2L \leq x \leq 4L$), а также в сечениях $x = -2L, -L, 0, 2L, 3L, 4L$ на участке ($0 \leq y \leq 6$ м).

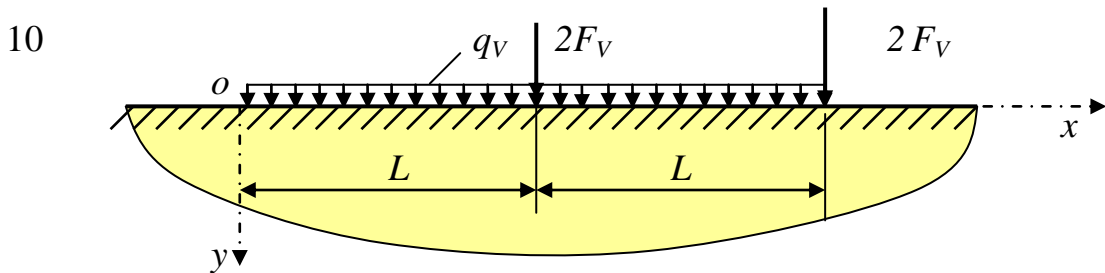
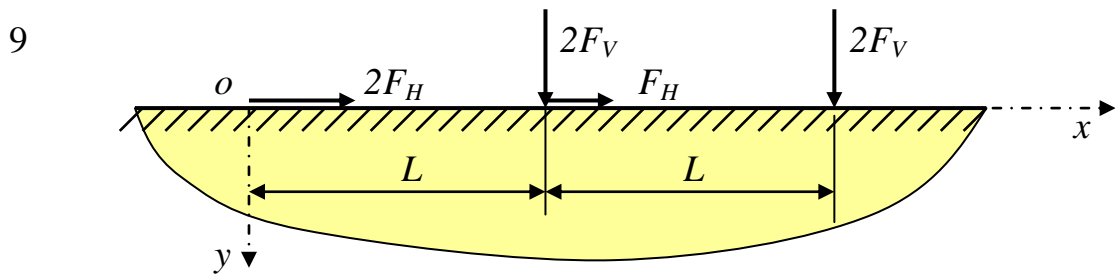
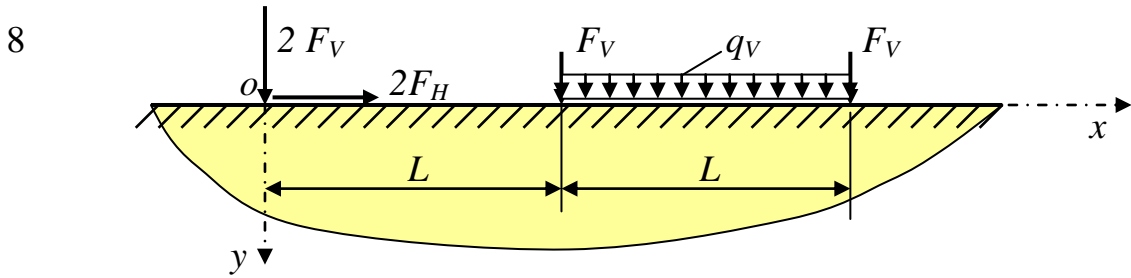
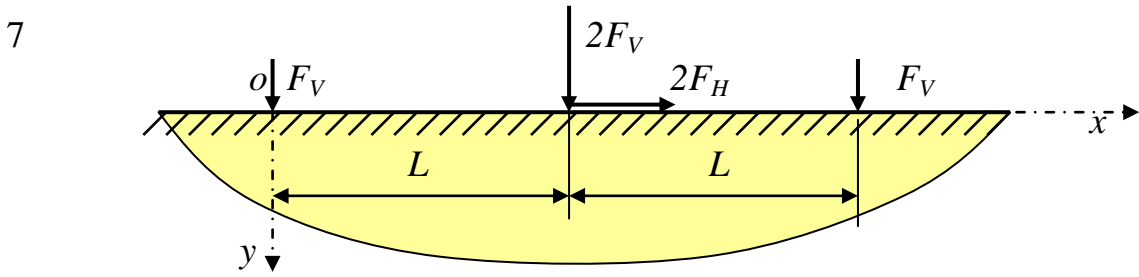
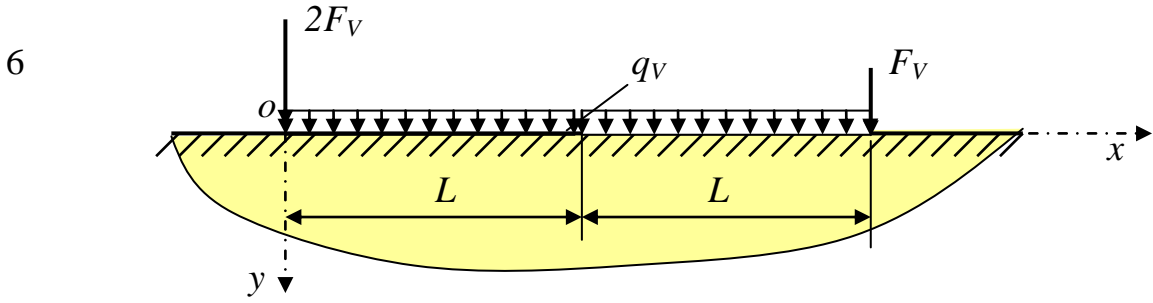
Решение поставленной задачи представить в *Mathcad* в символьной форме и выполнить необходимые вычисления на ЭВМ.

Исходные данные к задаче № 4

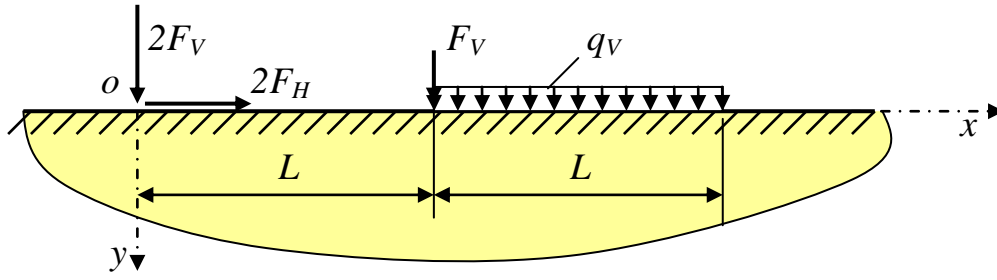
№ п/п	L , м	F_V , кН	F_H , кН	q_V , кН/м	q_H , кН/м
1	2	10	20	12	22
2	2.2	12	18	14	20
3	2.4	14	16	16	18
4	2.6	16	14	18	16
5	2.8	18	12	20	14
6	3.0	20	10	22	12
7	3.2	22	10	24	10
8	3.4	24	12	24	12
9	3.6	26	16	22	16
10	3.3	28	18	20	18

Схемы к задаче № 4

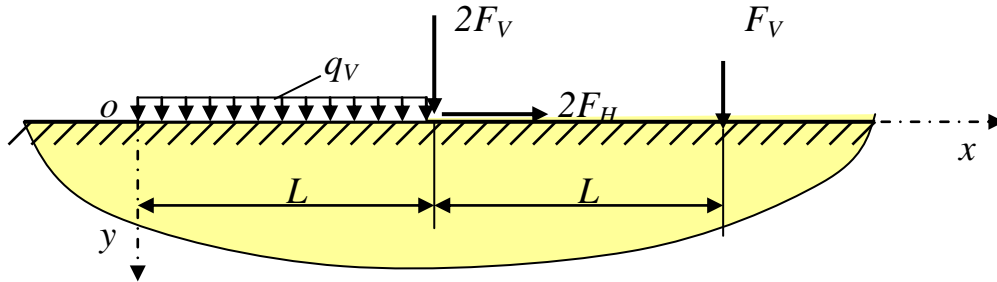




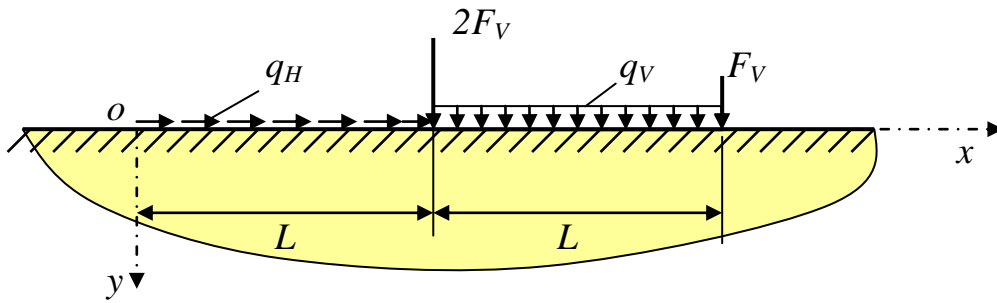
11



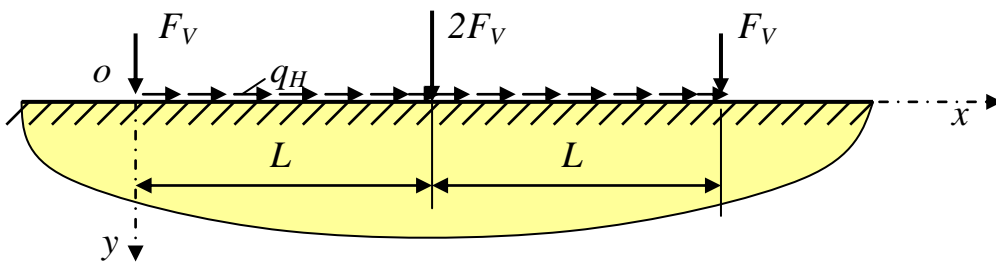
12



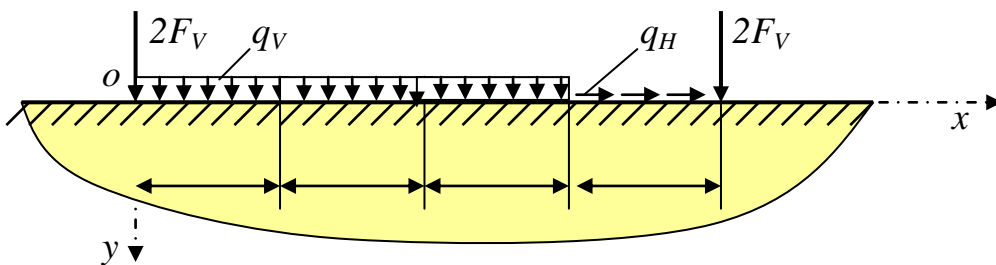
13



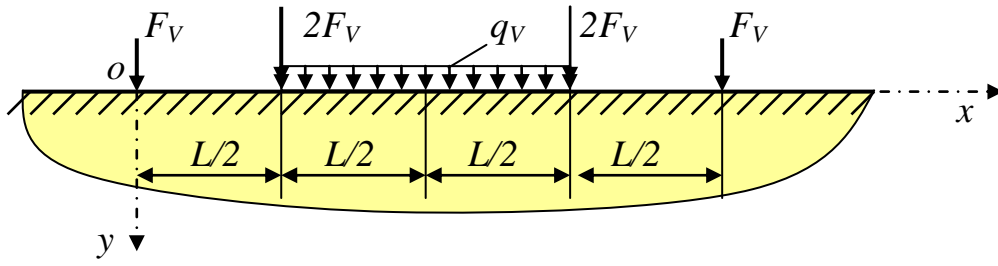
14



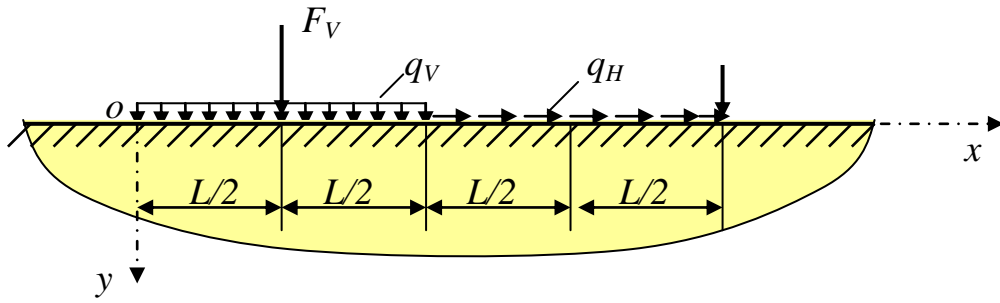
15



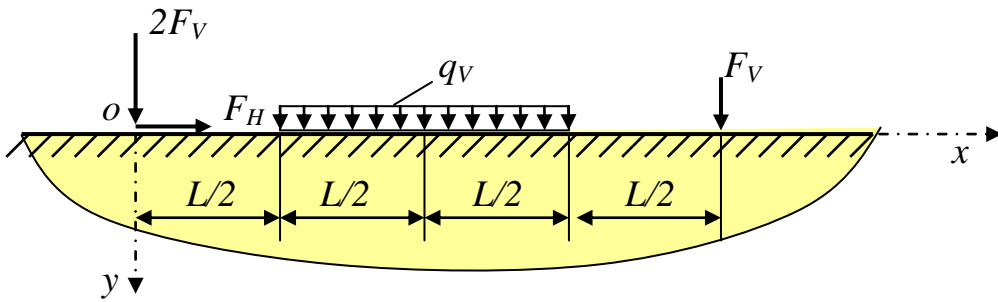
16



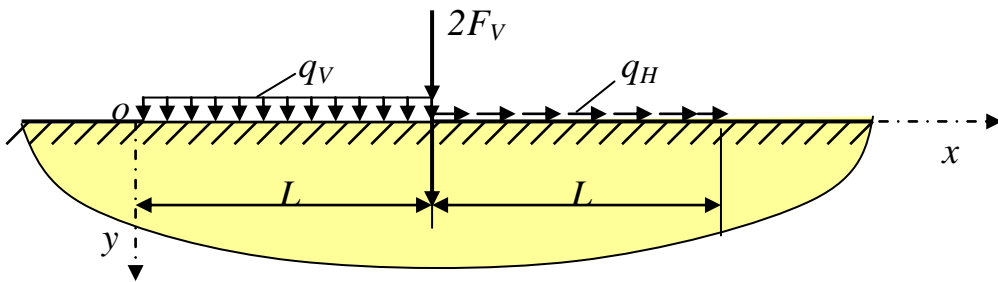
17



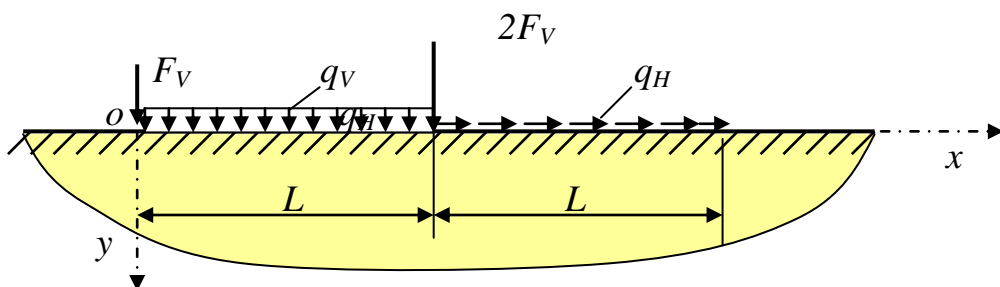
18



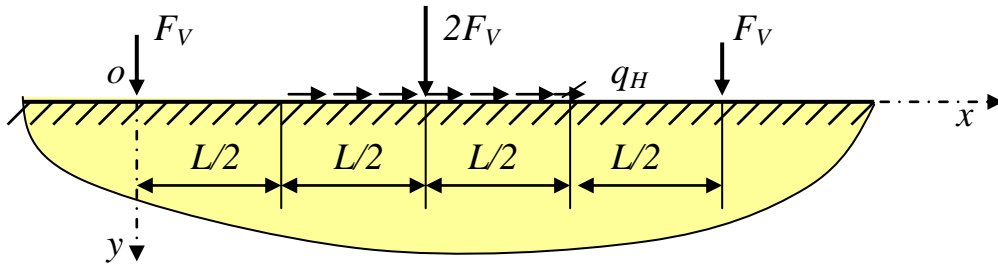
19



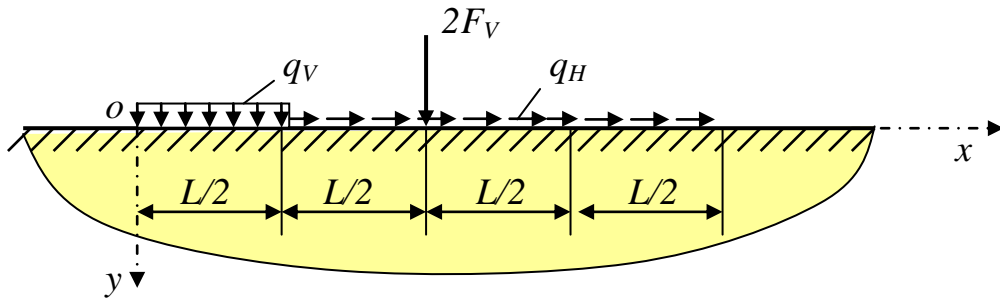
20



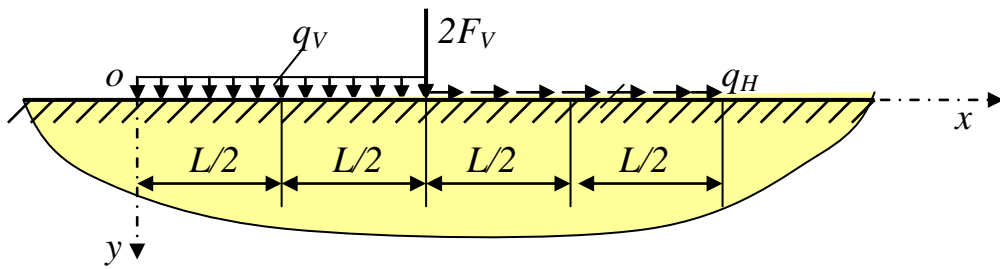
21



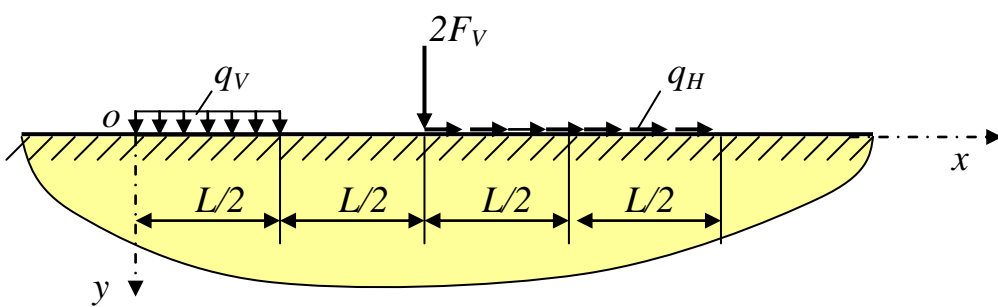
22



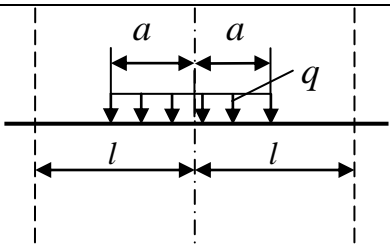
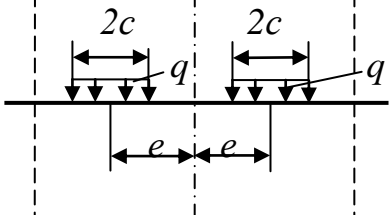
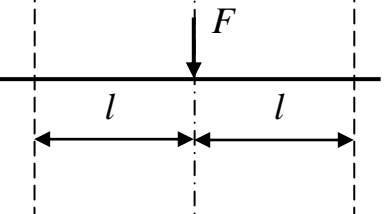
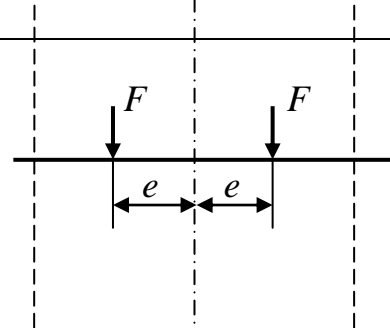
23



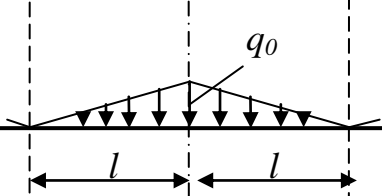
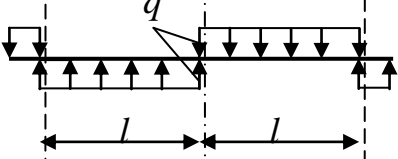
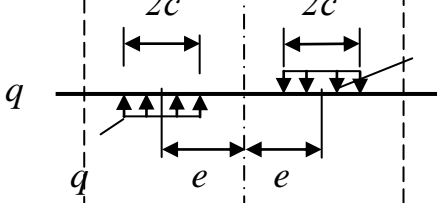
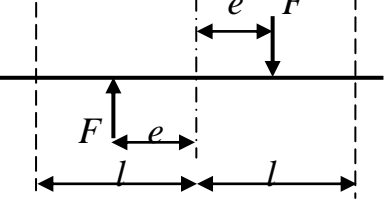
24



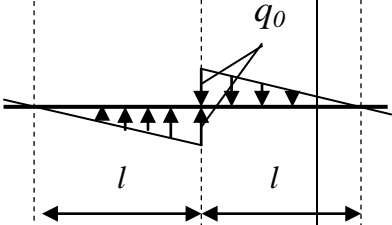
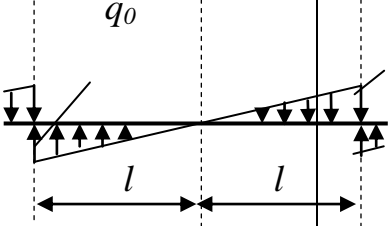
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

№ п/п	Вид нагрузки	Разложение в ряд Фурье	n
1	2	3	4
1		$q(x) = \frac{qa}{l} + \frac{2q}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n a \cdot \cos \alpha_n x, \quad \text{где}$ $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$	1, 2, 3, ...
2		$q(x) = \frac{2qc}{l} + \frac{4q}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n e \cdot \cos \alpha_n x$	1, 2, 3, ...
3		$q(x) = \frac{F}{2l} + \frac{F}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x$	1, 2, 3, ...
4		$q(x) = \frac{F}{l} + \frac{2F}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n e \cdot \cos \alpha_n x$	1, 3, 5, ...

Продолжение прил. 5

№ п/п	Вид нагрузки	Разложение в ряд Фурье	n
1	2	3	4
5		$q(x) = \frac{q_0}{2} + \frac{4q_0}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x$	1, 3, 5, ...
6		$q(x) = \frac{4q}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$	1, 3, 5, ...
7		$q(x) = \frac{4q}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \sin \alpha_n e \cdot \sin \alpha_n x$	1, 2, 3, ...
8		$q(x) = \frac{2F}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n e \cdot \sin \alpha_n x$	1, 2, 3, ...

Окончание прил. 5

№ п/п	Вид нагрузки	Разложение в ряд Фурье	n
1	2	3	4
9		$q(x) = \frac{2q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n x$	1, 2, 3, ...
10		$q(x) = \frac{2q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} (-1)^{n+1} \cos \alpha_n x$	1, 2, 3, ...

О г л а в л е н и е

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ.....	4
1.1. Напряжения на наклонных площадках.....	4
1.2. Главные напряжения и главные площадки.....	6
1.3. Пример исследования напряженного состояния в точке тела.....	8
2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	11
2.1. Основные уравнения плоской задачи теории упругости.....	11
2.2. Условия на контуре.....	13
2.3. Решение плоской задачи при помощи функции напряжений.....	15
3. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛИНОМАХ.....	17
4. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ.....	26
4.1. Представление решения плоской задачи теории упругости в тригонометрических рядах Фурье.....	26
4.2. Подбор функции напряжений.....	28
4.3. Определение постоянных интегрирования.....	32
4.4. Краткие сведения из теории тригонометрических рядов Фурье.....	33
4.5. Примеры решения плоских задач теории упругости в тригонометрических рядах.....	35
5. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.....	45
5.1. Сжатие клина.....	45
5.2. Изгиб клина.....	48
5.3. Действие распределенной нагрузки на границе упругой полуплоскости.....	49
5.4. Пример определения поля напряжений в полуплоскости	53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	54
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	55
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	56
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	57
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	64
ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....	66
ПРИЛОЖЕНИЕ 5.....	72

Учебное издание

Тен Ен Со

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
С ПРИМЕНЕНИЕМ *Mathcad14.0***

Учебное пособие

Главный редактор *Л. А. Суевалова*

Редактор *Т. Ф. Шейкина*

Компьютерная верстка *Тен Ен Со*

Подписано в печать . Формат 60x84 1/6.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 4,42. Тираж 150 экз. Заказ .

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного
университета. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.