

---

**Министерство образования Российской Федерации  
Хабаровский государственный технический университет**

## **МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Методические указания и варианты заданий  
по выполнению лабораторных работ № 3-4  
для студентов строительных специальностей**

**Хабаровск  
Издательство ХГТУ  
2000**

УДК 539.3

Метод конечных элементов: Методические указания и варианты заданий по выполнению лабораторных работ № 3-4 для студентов строительных специальностей / Сост. А. Д. Ловцов. — Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2000. — 11 с.

Работа выполнена на кафедре «Механика твердого деформируемого тела». В методических указаниях рассмотрена реализация алгоритма МКЭ для шарнирно-стержневых систем (ферм). Приведены примеры выполнения лабораторных работ по темам: «Расчет ферм на силовую нагрузку МКЭ», «Расчет ферм на кинематическую нагрузку МКЭ». Каждая лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Составитель: Ловцов А. Д., профессор кафедры «Механика твердого деформируемого тела», доктор технических наук, член диссертационного совета института архитектуры.

© Издательство Хабаровского государственного технического университета, 2000

**Целью** лабораторных работ является усвоение алгоритма МКЭ. Для достижения поставленной цели «вручную» решаются простейшие задачи, которые, тем не менее, позволяют проследить и освоить все основные этапы МКЭ.

**Используемые сокращения:**

ГВ - грузовой вектор;  
КЭ - конечный элемент;  
МЖ - матрица жесткости;  
СК - система координат;  
СЛАУ - система линейных алгебраических уравнений.

## 1. МКЭ. Краткие сведения

### 1.1. Общая схема программ МКЭ

МКЭ представляет собой численный метод решения задач, ориентированный на применение ЭВМ. Процедура МКЭ в самом общем виде включает в себя следующие этапы:

- 1) ввод исходных данных о конечно-элементной расчетной схеме конструкции;
- 2) цикл по элементам:
  - 2.1) формирование МЖ и ГВ элемента в глобальной СК;
    - 2.1.1) формирование МЖ и ГВ элемента в локальной СК  $z\nu$ ;
    - 2.1.2) формирование МЖ и ГВ элемента в глобальной СК  $xy$ ;
  - 2.2) размещение МЖ и ГВ элемента в глобальных МЖ и ГВ;
- 3) учет узловых сосредоточенных воздействий;
- 4) учет условий опирания;
- 5) решение СЛАУ;
- 6) получение результатов элементов;
- 7) вывод результатов счета.

Следует отметить, что выполнение п. 2.1 общего алгоритма МКЭ для ферм производится в два этапа. На первом этапе формируются МЖ и ГВ элемента в локальной системе координат  $z, \nu$ . Ось  $z$  - продольная ось стержня, ось  $\nu$  - поперечная ось стержня (на рис. 1, а показаны оси  $z$  и  $\nu$  для одного из элементов). На втором этапе для каждого элемента осуществляется переход от локальной СК  $z\nu$  к глобальной СК  $xy$ . Ось  $x$  - горизонтальная ось, ось  $y$  - вертикальная (рис 1, б).

Под КЭ понимается область (часть, элемент) конструкции конечных размеров, на которой определены узлы (на рис. 1, а числа подчеркнуты), узловые степени свободы (стрелочки, пронумерованные числами, выделенными жирным шрифтом) и соответствующие им функции формы.

Под конечно-элементной расчетной схемой понимается заданная конструкция, для которой произведены: разбиение на КЭ (рис 1, в); нумерация элементов (числа в рамке на рисунке); нумерация узлов (подчеркнутые числа); нумерация узловых степеней свободы (жирный шрифт).

### 1.2. Формирование матрицы жесткости и грузового вектора конечного элемента в локальной системе координат

КЭ фермы и правило знаков для перемещений  $u_1, u_2$ , усилий  $N_1, N_2$  и нагрузки  $q$  в локальной СК  $z\nu$  изображены на рис. 2.

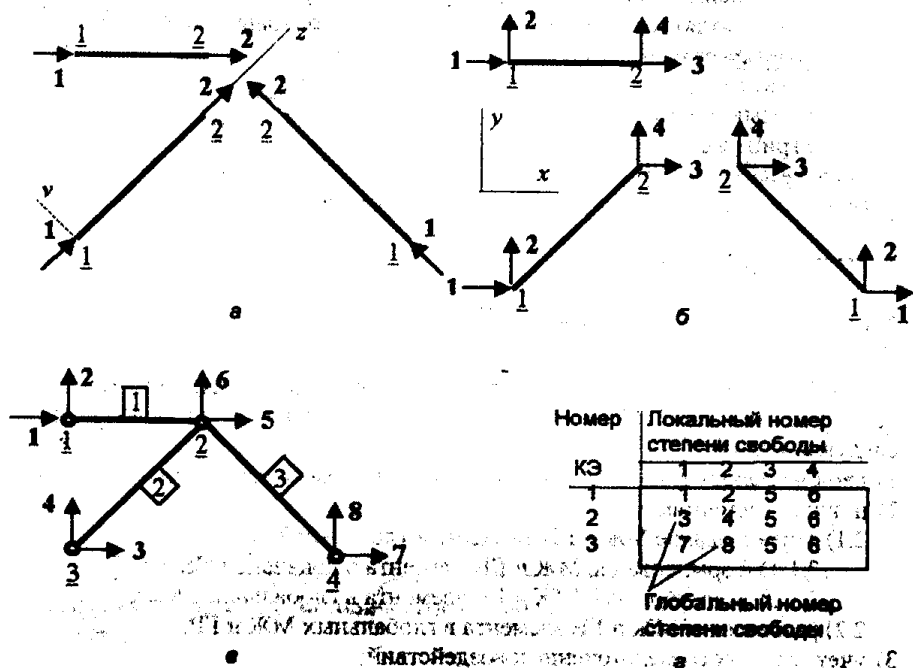


Рис. 1. Конечно-элементная аппроксимация области:  
 а - локальная нумерация узлов и узловых степеней свободы в локальной СК;  
 б - локальная нумерация узлов и узловых степеней свободы в глобальной СК;  
 в - глобальная нумерация элементов, узлов и узловых степеней свободы в глобальной СК; г - матрица индексов

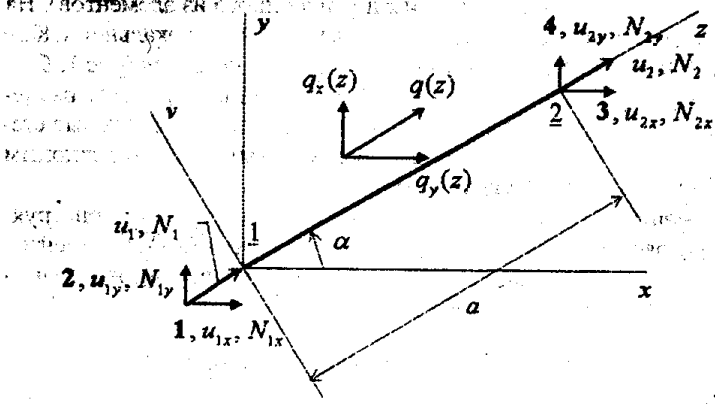


Рис. 2. Правило знаков усилий и перемещений ферменного элемента в локальной и глобальной системах координат

МЖ  $[k^{(e)}]$  и ГВ  $\bar{f}^{(e)}$  растянутого/сжатого КЭ получены в методических указаниях по выполнению лабораторных работ № 1-2 (см. литературу настоящих указаний) и в случае постоянной жесткости  $EA$  равны:

$$[k^{(e)}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}^{(e)} = \frac{qa}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $q$  – интенсивность равномерно распределенной вдоль продольной оси стержня нагрузки;  $a$  – длина элемента.

### 1.3. Формирование матрицы жесткости и грузового вектора конечного элемента в глобальной системе координат

На рис. 2 для элемента фермы также показано правило знаков перемещений  $u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}$ , усилий  $N_{1x}, N_{1y}, N_{2x}, N_{2y}$  и нагрузки  $q_x, q_y$  в глобальной СК. Кроме того, показано положительное направление угла поворота  $\alpha$  локальной СК относительно глобальной СК.

Для расчета фермы мы воспользовались КЭ лабораторной работы № 1. Учтем, однако, что локальная СК  $z, v$  элемента не совпадает с глобальной СК  $x, y$  фермы. Поэтому необходима операция, позволяющая сориентировать КЭ на плоскости (операция перехода от локальной СК к глобальной).

Итак, в локальной системе координат МЖ и ГВ КЭ определяются выражениями (1). Для МЖ и ГВ переход от локальной СК (повернутой относительно глобальной на угол  $\alpha$ ) к глобальной СК осуществляется по формулам:

$$[k^{(e)}] = [\Lambda][\hat{k}^{(e)}][\Lambda]^T; \quad \bar{f}^{(e)} = [\Lambda]\bar{\hat{f}}^{(e)}, \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $[\hat{k}^{(e)}], \bar{\hat{f}}^{(e)}$  – МЖ и ГВ элемента в локальной СК  $z, v$ , подсчитанные по формулам (1). С учетом (2) для КЭ с постоянной жесткостью  $EA$  имеем:

$$[k^{(e)}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}, \quad \bar{f}^{(e)} = \frac{qa}{2} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad (3)$$

### 1.4. Размещение матриц для элементов в глобальные матрицы (ансамблирование элементов)

МЖ и ГВ конечного элемента размещают с накоплением в глобальных МЖ  $[K]$  и ГВ  $\bar{F}$ , используя матрицу индексов (выделена рамкой на рис. 1, 2). Например, согласно матрице индексов и рис. 3, для второго КЭ: коэффициент  $k_{12}^{(2)}$  следует просуммировать с коэффициентом, стоящим в пересечении строки 3 и столбца 4 глобальной МЖ ( $K_{34} := K_{34} + k_{12}^{(2)}$ ); коэффициент  $f_1^{(2)}$  следует просуммировать с коэффициентом  $F_3$  глобального ГВ ( $F_3 := F_3 + f_1^{(2)}$ ).

Данная процедура осуществляется в цикле по всем элементам. По окончании цикла имеем СЛАУ

$$[K]\bar{U} = \bar{F}, \quad (4)$$

где  $\bar{U}$  – вектор неизвестных глобальных степеней свободы.

Локальные степени свободы	1	2	3	4		
Матрица жесткости конечного элемента	1	2	3	4	3	
	2	0.5	0.5	-0.5	-0.5	4
	3	0.5	0.5	-0.5	-0.5	5
	4	-0.5	-0.5	0.5	0.5	6
		-0.5	-0.5	0.5	0.5	
		3	4	5	6	Глобальные степени свободы

Рис. 3. Матрица жесткости второго КЭ при  $\alpha = \pi/4$ ,  $a = 1$ ,  $EA = 1$

### 1.5. Учет узловых сил

Если в узел по направлению  $i$ -й глобальной степени свободы приложено сосредоточенное усилие  $P$ , то в  $i$ -ю компоненту глобального ГВ следует добавить это усилие:  $F_i := F_i + P$ . Сила  $P > 0$ , если совпадает по направлению с глобальной степенью свободы.

### 1.6. Учет условий опирания

Если  $U_i$  - заданное перемещение опоры (равное или не равное нулю), то надо СЛАУ (4) преобразовать следующим образом:

- 1) все компоненты столбца  $i$  умножить на  $U_i$ ;
- 2) из грузового вектора вычесть полученный столбец и результат разместить в грузовом векторе;
- 3) обнулить  $i$ -ю строку и  $i$ -й столбец глобальной МК;
- 4) компоненту  $i$  главной диагонали (пересечение строки  $i$  и столбца  $i$ ) положить равной единице;
- 5) в глобальном ГВ положить  $i$ -ю компоненту равной заданному перемещению.

Описанная процедура повторяется для всех заданных перемещений. В случае  $U_i = 0$ , пп. 1 и 2 можно не выполнять.

Далее решаем СЛАУ (4) и находим неизвестные перемещения. По известным узловым перемещениям определяем параметры НДС элементов.

## 2. Порядок выполнения лабораторных работ

- 1) вычертить заданную схему конструкции;
- 2) выбрать КЭ;
- 3) вычертить конечно-элементную расчетную схему конструкции;
- 4) произвести расчет конструкции согласно пп. 2+6 общего алгоритма МКЭ;
- 5) вычертить деформированную схему сооружения;
- 6) защитить лабораторную работу.

## 3. Лабораторная работа № 3. Расчет фермы на силовую нагрузку МКЭ

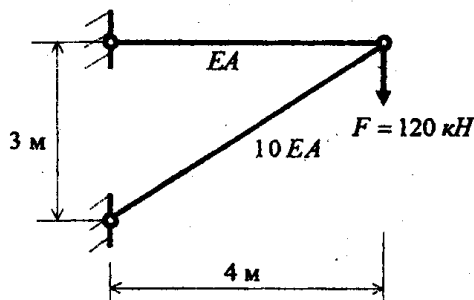
Правило знаков узловых перемещений, внутренних усилий и заданной нагрузки для элемента фермы показано на рис. 2.

Результаты КЭ определяются по формуле

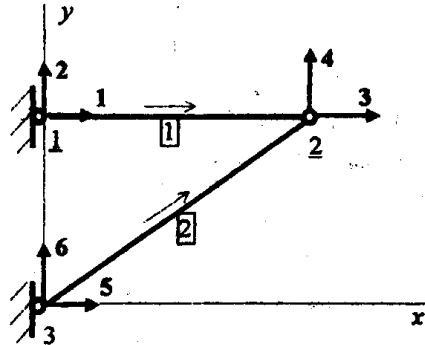
$$\begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [k^{(e)}] \Delta F \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(e)} \\ u_{1y}^{(e)} \\ u_{2x}^{(e)} \\ u_{2y}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

### Пример выполнения лабораторной работы

Заданная схема конструкции



Конечно-элементная расчетная схема



Кроме нумерации элементов, узлов и узловых степеней свободы, на конечно-элементной расчетной схеме показаны глобальная СК  $x, y$  и локальные СК каждого КЭ (стрелочками возле номера элемента, идущими от начала КЭ к его концу).

Формируем МЖ и ГВ в локальной СК согласно (1).

$$[k^{(1)}] = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \bar{f}^{(1)} = 0.$$

$$[k^{(2)}] = \frac{10EA}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{f}^{(2)} = 0.$$

Формируем МЖ и ГВ КЭ в глобальной СК согласно (2), (3).

Для первого КЭ  $\alpha = 0$ . Поэтому

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для второго КЭ  $\cos \alpha = 0.6$ ,  $\sin \alpha = 0.8$ . Поэтому

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.72 & 0.96 & -0.72 & -0.96 \\ 0.96 & 1.28 & -0.96 & -1.28 \\ -0.72 & -0.96 & 0.72 & 0.96 \\ -0.96 & -1.28 & 0.96 & 1.28 \end{bmatrix}$$

Матрица индексов

Номер элемента	Локальная степень свободы			
	$u_{1x}$	$u_{1y}$	$u_{2x}$	$u_{2y}$
1	1	2	3	4
2	5	6	3	4

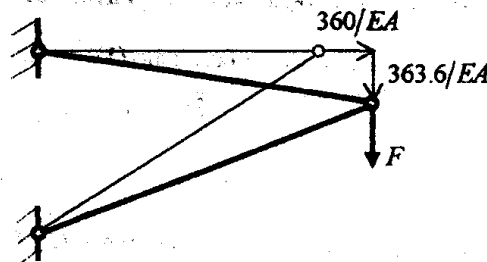
СЛАУ:

$$EA \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25+0.72 & 0+0.96 & -0.72 & -0.96 \\ 0 & 0 & 0+0.96 & 0+1.28 & -0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & -0.96 & 0.72 & 0.96 \\ 0 & 0 & -0.96 & -1.28 & 0.96 & 1.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \\ -120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Учтем условия опирания и решим систему уравнений:

$$EA \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 1.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \\ -120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 360 \\ -363.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

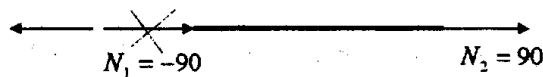
Деформированная схема сооружения



Определение результатов элементов

Для первого КЭ локальная и глобальная СК совпадают. Поэтому продольные силы на элементе удобно определить при помощи локальной МЖ.

$$\begin{Bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{Bmatrix} = [\hat{k}^{(1)}] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 360/EA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 90 \end{Bmatrix}$$

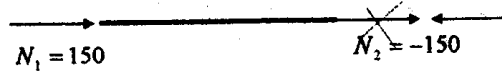


Следовательно, первый КЭ растянут продольной силой в 90 кН.

Продольные силы второго КЭ определяем при помощи локальной МЖ и матрицы перехода к глобальной СК.



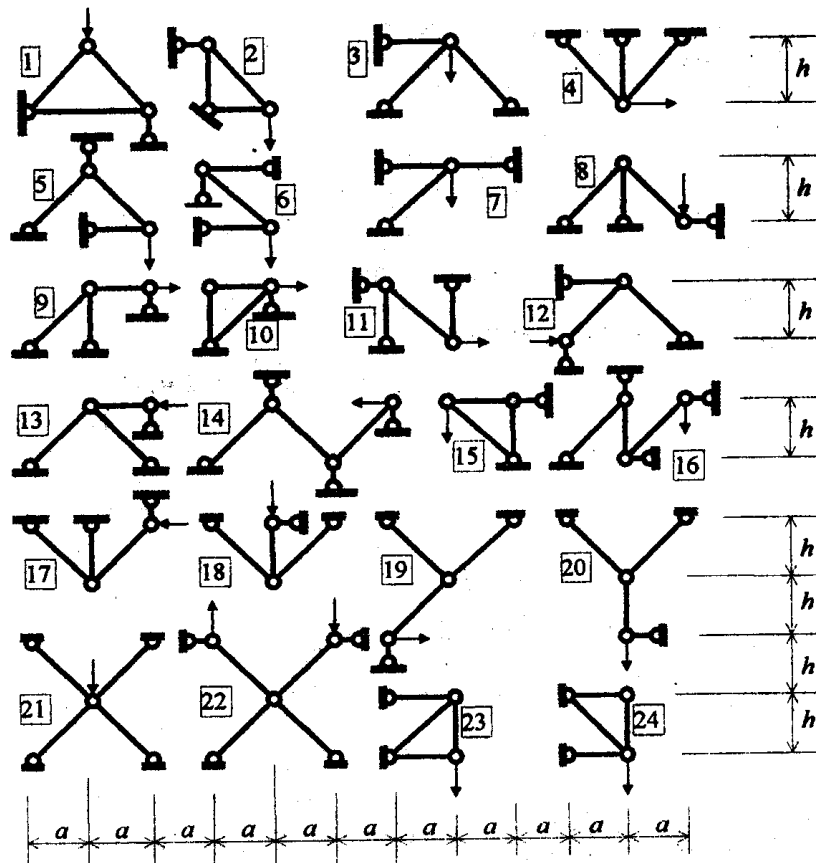
$$\begin{Bmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \end{Bmatrix} = [\hat{k}^{(2)}] \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 360/EA \\ -363.6/EA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 149.76 \\ -149.76 \end{Bmatrix}$$



Следовательно, второй КЭ сжат продольной силой в  $150кН$ .

### Варианты заданий для лабораторной работы № 3

Номер варианта заключен в рамку. Жесткость всех стержней одинакова. Линейные размеры  $a, h$ , величина силы  $P$  и жесткость  $EA$  задаются преподавателем.



#### 4. Лабораторная работа № 4. Расчет ферм на кинематическую нагрузку МКЭ

Лабораторная работа № 4 является продолжением работы № 3. Исходные данные взять из лабораторной работы № 3.

##### Пример выполнения лабораторной работы.

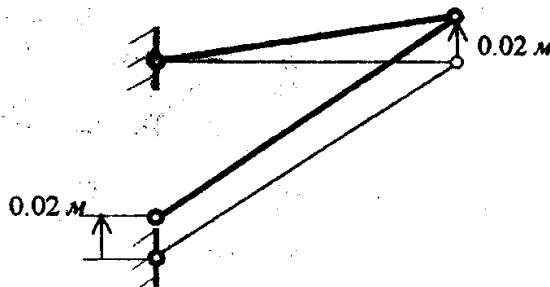
Продолжим расчет фермы ЛР № 3 на осадку опор. Пусть узел 3 переместился по вертикали (по направлению 6-й степени свободы) на 2 см. Силовой нагрузки нет (глобальный ГВ равен нулю). Вернемся к СЛАУ (5) и сделаем следующие операции:

- 1) 6-й столбец глобальной МДЖ умножим на 0.02 (перемещение положительно, т. к. совпадает с положительным направлением соответствующей степени свободы);
- 2) вычтем из грузового вектора преобразованный 6-й столбец;
- 3) обнулим 6-й столбец и 6-ю строку глобальной МДЖ;
- 4) на главной диагонали в пересечении 6-й строки и 6-го столбца поставим единицу;
- 5) в глобальном ГВ 6-й элемент положим равным заданному перемещению в 0.02 м.

Нулевые перемещения по направлению других степеней свободы учитываем как прежде (см. ЛР № 3). В результате получим:

$$EA \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 1.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.02 \cdot 0.96EA \\ 0.02 \cdot 1.28EA \\ 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.02 \\ 0 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

Деформированная схема сооружения.



Получим результаты элементов. Для первого КЭ

$$\begin{Bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{Bmatrix} = [\hat{k}^{(1)}] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Для второго КЭ

$$\begin{Bmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \end{Bmatrix} = [\hat{k}^{(2)}] [\Lambda]^T \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02 \\ 0 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Продольные силы в стержнях фермы оказались равными нулю. Этого и следовало ожидать, т. к. в статически определимых системах от осадки опор внутренние усилия не возникают.

В статически неопределимых системах от осадки опор, естественно, будут возникать внутренние усилия.

### Контрольные вопросы

1. Что такое конечный элемент?
2. Что такое конечно-элементная расчетная схема?
3. Что такое матрица жесткости конечного элемента?
4. Отличие матриц жесткости ферменного конечного элемента, построенных в локальной и глобальной системах координат.
5. Что такое грузовой вектор конечного элемента?
6. Физический смысл коэффициентов матрицы жесткости КЭ фермы.
7. Физический смысл коэффициентов столбца матрицы жесткости КЭ фермы.
8. Почему матрица жесткости конечного элемента вырождена?
9. Как учитывается в процедуре МКЭ распределенная нагрузка?
10. Постройте функции формы ферменного КЭ, если начало локальной системы координат расположено в середине элемента.
11. Вычислить матрицу жесткости КЭ переменной жесткости, используя линейную аппроксимацию жесткости.
12. Как решить задачу с переменной жесткостью, применяя КЭ с постоянной жесткостью?
13. Как решить задачу с неравномерно распределенной нагрузкой, применяя решение для постоянной нагрузки?
14. Вычислить грузовой вектор КЭ от неравномерно распределенной нагрузки, используя ее линейную аппроксимацию.
15. Выписать грузовой вектор КЭ для нагрузки, распределенной по треугольнику с нулем в узле 1.
16. Что такое глобальная матрица жесткости?
17. Что такое глобальный грузовой вектор?
18. Физический смысл коэффициентов столбца глобальной матрицы жесткости.
19. Физический смысл коэффициентов глобальной матрицы жесткости.
20. Физический смысл любого уравнения МКЭ.
21. Физический смысл процедуры формирования глобальной матрицы жесткости.
22. Как учитывается в процедуре МКЭ заданное смещение опор?
23. Объяснить физический смысл процедуры учета условий опирания.
24. Как при помощи глобальных матрицы жесткости и грузового вектора определить реакции в опорах?
25. Как учитывается в процедуре МКЭ сосредоточенная нагрузка?
26. Влияние нумерации узлов на вычислительные свойства процедуры МКЭ.
27. Как численно поведет себя МКЭ в случае мгновенно изменяемой системы?

### Литература

*Метод конечных элементов*: Методические указания и варианты заданий к выполнению лабораторных работ № 1-2 по методу конечных элементов для студентов строительных специальностей / Сост. А. Д. Ловцов. — Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1998. — 12 с.