Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания по курсу «Сопротивление материалов» для студентов заочного факультета и заочного факультета ускоренного обучения

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 539.3.(076)

Примеры решения задач контрольных работ по сопротивлению материалов.: Методические указания по курсу «Сопротивление материалов» для студентов заочного факультета и заочного факультета ускоренного обучения / Сост. В. В. Иовенко. – Хабаровск: изд-во ТОГУ, 2008. – 28 с.

Методические указания составлены на кафедре «Механика деформируемого твердого тела». Содержат примеры выполнения задач контрольной работы по сопротивлению материалов для студентов заочного факультета и заочного факультета ускоренного обучения.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Механика деформируемого твердого тела» и методического совета заочного факультета.

Главный редактор *Л. А. Суевалова*
Редактор *О. В. Астафьеваа*
Компьютерная верстка *В. В. Иовенко*

Подписано в печать . Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. .

Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ .

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

ВВЕДЕНИЕ

Прежде чем приступить к решению задач контрольной работы по сопротивлению материалов необходимо внимательно изучить «Сопротивление материалов: методические указания и контрольные задания к изучению курса для студентов инженерно – технических специальностей заочной формы обучения / сост. Ю. М. Дойхен, А. А. Лукашевич, Л. Б. Потапова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2006. – 47 с.».

В методических указаниях программа дисциплины «Сопротивление материалов» приведена на с.4 – 7, список литературы, методические указания к изучению разделов курса и вопросы для самопроверки на с. 8 – 28, указания о порядке выполнения контрольных работ на с. 29 – 30, задачи контрольных работ на с. 31 – 46.

В каждой задаче номер зачетной книжки брался произвольно. Пример решения задачи оформлялся примерно так, как он должен выглядеть у студента при сдаче контрольной работы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. 1).

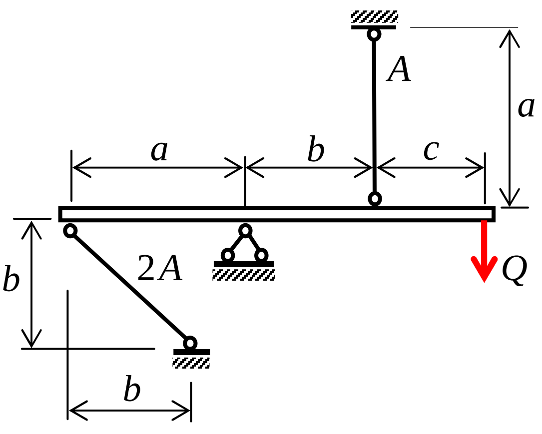


Рис. 1

Требуется:

1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q;

2) найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma]=160\ МПа$;

3) определить перемещение точки приложения силы Q;

4) найти предельную грузоподъемность системы Q_m^k и допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, если предел текучести $\sigma_m = 240\,МПа$ и запас прочности $k = 1{,}5$;

5) сравнить величины $Q_{доп}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям (см. п. 2) и допускаемым нагрузкам (см. п. 4).

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 425. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 4, б = 2, в = 5. Данные берем из табл. 1 методических указаний. Таким образом, имеем: схема №5 (рис. 1), $A = 12\,см^2$, $a = 2{,}4\,м$, $b = 2{,}2\,м$, $c = 1{,}5\,м$.

Данная система статически неопределима один раз, поскольку четыре неизвестных (N_1, N_2, H_k, R_k) не могут быть определены из трех независимых уравнений равновесия. Поэтому кроме статической стороны задачи необходимо рассмотреть геометрическую и физическую стороны задачи.

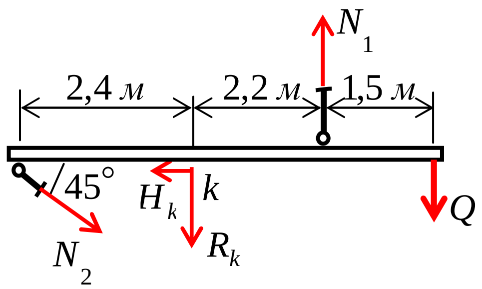


Рис. 1, а

Рассмотрение статической стороны задачи (рис. 1, а) дает следующее уравнение равновесия:

$$\sum M_k = 0, \qquad N_1 \cdot 2{,}2 + N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2{,}4 - Q \cdot 3{,}7 = 0, \qquad \sin 45^\circ = 0{,}707.$$

Из геометрической стороны задачи (рис. 1, б) следует:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\Delta\ell_1 \cdot \sin 45^\circ}{\Delta\ell_2} = \frac{2{,}2}{2{,}4}; \qquad \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \cdot 1{,}296; \qquad \frac{\delta_Q}{\delta_1} = \frac{3{,}7}{2{,}2};$$

где δ_1, δ_2 – перемещения точек прикрепления стержней 1 и 2 к жесткому брусу; δ_Q – перемещение точки приложения силы Q; $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ – деформации стержней 1 и 2.

Выразить деформации стержней $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ через усилия N_1 и N_2 помогает физическая сторона задачи (по закону Гука – $\Delta\ell_i = \dfrac{N_i \cdot \ell_i}{E \cdot A_i}$):

$$\frac{N_1\cdot\ell_1}{E\cdot A_1}=\frac{N_2\cdot\ell_2}{E\cdot A_2}\cdot 1{,}296;\quad \frac{N_1\cdot 2{,}4}{E\cdot A}=\frac{N_2\cdot 3{,}11}{E\cdot 2\cdot A}\cdot 1{,}296;\quad N_1=0{,}84\cdot N_2.$$

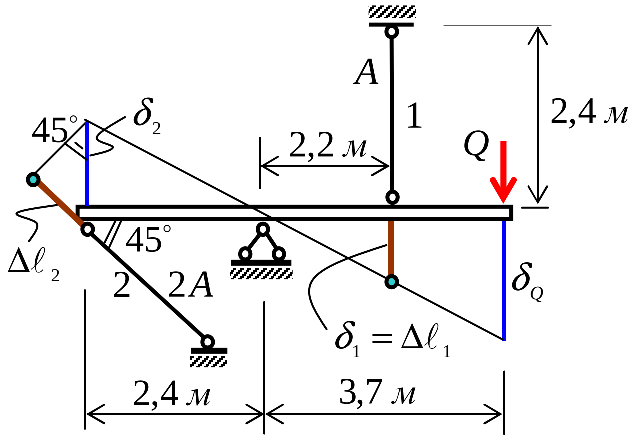


Рис. 1, б

Решая совместно систему полученных уравнений, определим значения N_1 и N_2 в долях от Q:

$$\begin{cases} N_1\cdot 2{,}2+N_2\cdot 1{,}697=3{,}7\cdot Q \\ N_1=N_2\cdot 0{,}84 \end{cases},\qquad \begin{cases} N_1=0{,}877\cdot Q \\ N_2=1{,}044\cdot Q \end{cases}.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержней 1 и 2 будут равны:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=0.877\cdot\frac{Q}{A},\qquad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{1{,}044\cdot Q}{2A}=0{,}522\cdot\frac{Q}{A}.$$

Допускаемую нагрузку находим из условия прочности по нормальным напряжениям, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению:

$$\sigma_{\max}\le[\sigma],\quad 0{,}877\cdot\frac{Q}{A}\le[\sigma],\quad 0{,}877\cdot\frac{Q}{12\cdot 10^{-4}}\le 160\cdot 10^{6},\quad Q_{доп}\le 219{,}0\,кН.$$

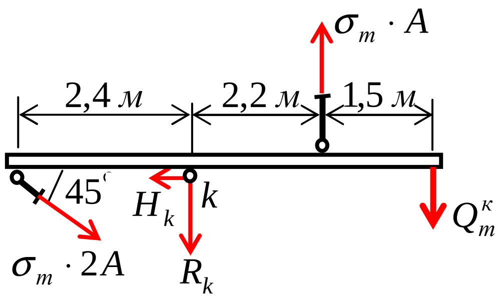


Рис. 1, в

Перемещение точки приложения силы Q согласно рис. 1, б будет равно:

$$\delta_Q=\frac{3{,}7}{2{,}2}\cdot\delta_1=\frac{3{,}7}{2{,}2}\cdot\Delta\ell_1=\frac{3{,}7}{2{,}2}\cdot\frac{N_1\cdot\ell_1}{E\cdot A}=\frac{3{,}7\cdot 0{,}877\cdot 219\cdot 10^3\cdot 2{,}4}{2{,}2\cdot 200\cdot 10^9\cdot 12\cdot 10^{-4}}=0{,}003\,м.$$

Предельную грузоподъемность системы Q_m^k найдем, подставив в уравнение равновесия (рис. 1, в) предельные значения усилий в стержнях: $\sum M_k = 0$, $\sigma_m \cdot A \cdot 2{,}2 + \sigma_m \cdot 2A \cdot \sin\alpha \cdot 2{,}4 - Q_m^к \cdot 3{,}7 = 0$, $Q_m^к = 435{,}4\,кН$.

Допускаемая нагрузка $Q_{доп}$ будет равна

$$Q_{доп} = \frac{Q_m^k}{k} = \frac{435{,}4}{1{,}5} = 290{,}3\,кН.$$

Сравнивая величины $Q_{доп}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам, получаем $Q_{доп}$ больше при расчете по допускаемым нагрузкам в $n = \dfrac{290{,}3}{219{,}0} = 1{,}33$ раза.

Задача 2

К стальному валу приложены четыре сосредоточенных момента (рис. 2).

Требуется:

1) построить эпюру крутящих моментов;

2) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины из нормального ряда чисел: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200 мм;

3) найти наибольший относительный угол закручивания и проверить жесткость вала при $[\theta] = 0.05\,рад/м$.

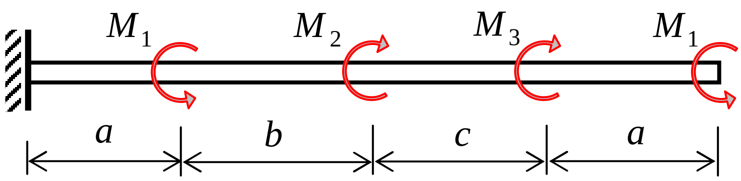


Рис. 2

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки - 297. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 2, б = 9, в = 7. Данные берем из табл. 2 методических указаний. Таким образом, имеем: схема №7 (рис. 2), $a = 1{,}2\,м$, $b = 1{,}9\,м$, $c = 1{,}7\,м$, $M_1 = 1{,}2\,кН \cdot м$, $M_2 = 1{,}9\,кН \cdot м$, $M_3 = 1{,}7\,кН \cdot м$, $[\tau] = 40\,МПа$. Для стали принимаем модуль поперечного сдвига равным $G = 80\,ГПа$.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений (рис. 2, а):

участок № 1 ($0 \le z_1 \le 1{,}2\,м$), $M_1^{кр} = -1{,}2\,кН \cdot м$;

участок № 2 $(0 \le z_2 \le 1{,}7\ м)$, $M_2^{кр} = -1{,}2 + 1{,}7 = 0{,}5\ кН \cdot м$;

участок № 3 $(0 \le z_3 \le 1{,}9\ м)$, $M_3^{кр} = -1{,}2 + 1{,}7 + 1{,}9 = 2{,}4\ кН \cdot м$;

участок № 4 $(0 \le z_4 \le 1{,}2 м)$, $M_4^{кр} = -1{,}2 + 1{,}7 + 1{,}9 - 1{,}2 = 1{,}2\ кН \cdot м$.

Для удобства построения эпюр $M_{кр}$ принимаем следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки.

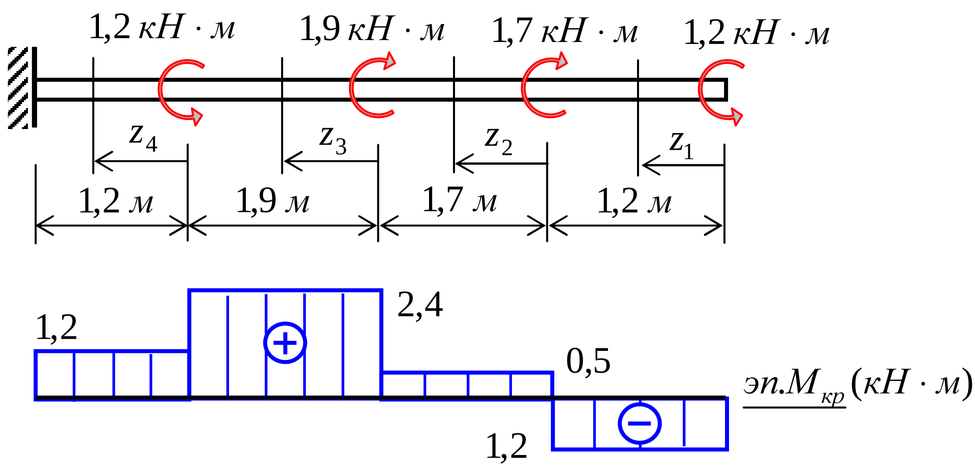


Рис. 2, а

Диаметр вала находим из условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} \le [\tau], \quad \frac{M_{\max}^{кр}}{W_\rho} \le [\tau], \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \quad , \frac{2.4 \cdot 10^3}{\pi d^3} \cdot 16 \le 40 \cdot 10^6, \quad d \ge 0{,}067\ м.$$

Принимаем d = 70 мм.

Крутильная жесткость поперечного сечения вала будет равна (полярный момент инерции для круглого сечения $I_\rho = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$, см. табл. 4 приложения) $\quad GI_\rho = 80 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{\pi \cdot (0{,}07)^4}{32} = 188{,}57\ кН \cdot м^2$.

Наибольший относительный угол закручивания определяем по формуле

$$\theta_{\max} = \left(\frac{\varphi}{\ell}\right)_{\max} = \frac{M_{\max}^{кр}}{GI_\rho} = \frac{2{,}4 \cdot 10^3}{188{,}57 \cdot 10^3} \approx 0{,}013\ \frac{рад}{м}.$$

В нашем случае имеем $\theta_{\max} < [\theta]$, где $[\theta] = 0{,}05$. Таким образом, условие жесткости $(\theta_{\max} \le [\theta])$ соблюдается.

Задача № 3

Для заданного поперечного сечения (рис. 3), состоящего из двух стандартных профилей (швеллера и равнобокого уголка), требуется:

1) определить положение центра тяжести;
2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей;
3) определить направление главных центральных осей (u и v);
4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
5) вычертить сечение и указать на нем все размеры в числах и все оси.

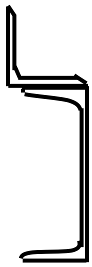


Рис. 3

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки - 406. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 4, б = 0, в = 6. Данные берем из табл. 3 методических указаний. Таким образом, имеем тип сечения №6 (рис. 3), который состоит из швеллера № 20 и равнобокого уголка $125 \times 125 \times 12$. Из сортамента прокатной стали выписываем необходимые геометрические для швеллера № 20 (ГОСТ 8240-86): $A = 23{,}4\, см^2$, $h = 20\, см$, $b = 7{,}6\, см$, $z_0 = 2{,}07 см$, $I_x = 1520\, см^4$, $I_y = 113 см^4$; для уголка (ГОСТ 8509-86) имеем: $A = 28{,}9\, см^2$, $b = 12{,}5\, см$, $z_0 = 3{,}53\, см$, $I_x = 422\ см^4$, $I_{x_0}^{\max} = 670\, см^4$, $I_{y_0}^{\min} = 174\, см^4$.

Определяем координаты центра тяжести сечения относительно координат x_1 и y_2, представив его в виде двух простых фигур (рис. 3, а):

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{x_1}^{i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 y_{шв} + A_2 y_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23{,}4 \cdot 0 + 28{,}9 \cdot 13{,}53}{23{,}4 + 28{,}9} = 7{,}48\, см,$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_2}^{i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{S_{y_2}^{(1)} + S_{y_2}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 x_{шв} + A_2 x_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23{,}4 \cdot 6{,}9 + 28{,}9 \cdot 0}{23{,}4 + 28{,}9} = 3{,}09\, см.$$

Здесь $y_{шв}, y_{уг}$ и $x_{шв}, x_{уг}$ - расстояния от центров тяжести простых фигур швеллера и уголка до вспомогательных осей x_1 и y_2.

Центр тяжести заданного сечения (точка C) должен лежать на прямой C_1C_2. Проводим через него центральные оси инерции x_c, y_c и определяем осевые и центробежный моменты инерции относительно этих осей по формулам для случая параллельного переноса осей:

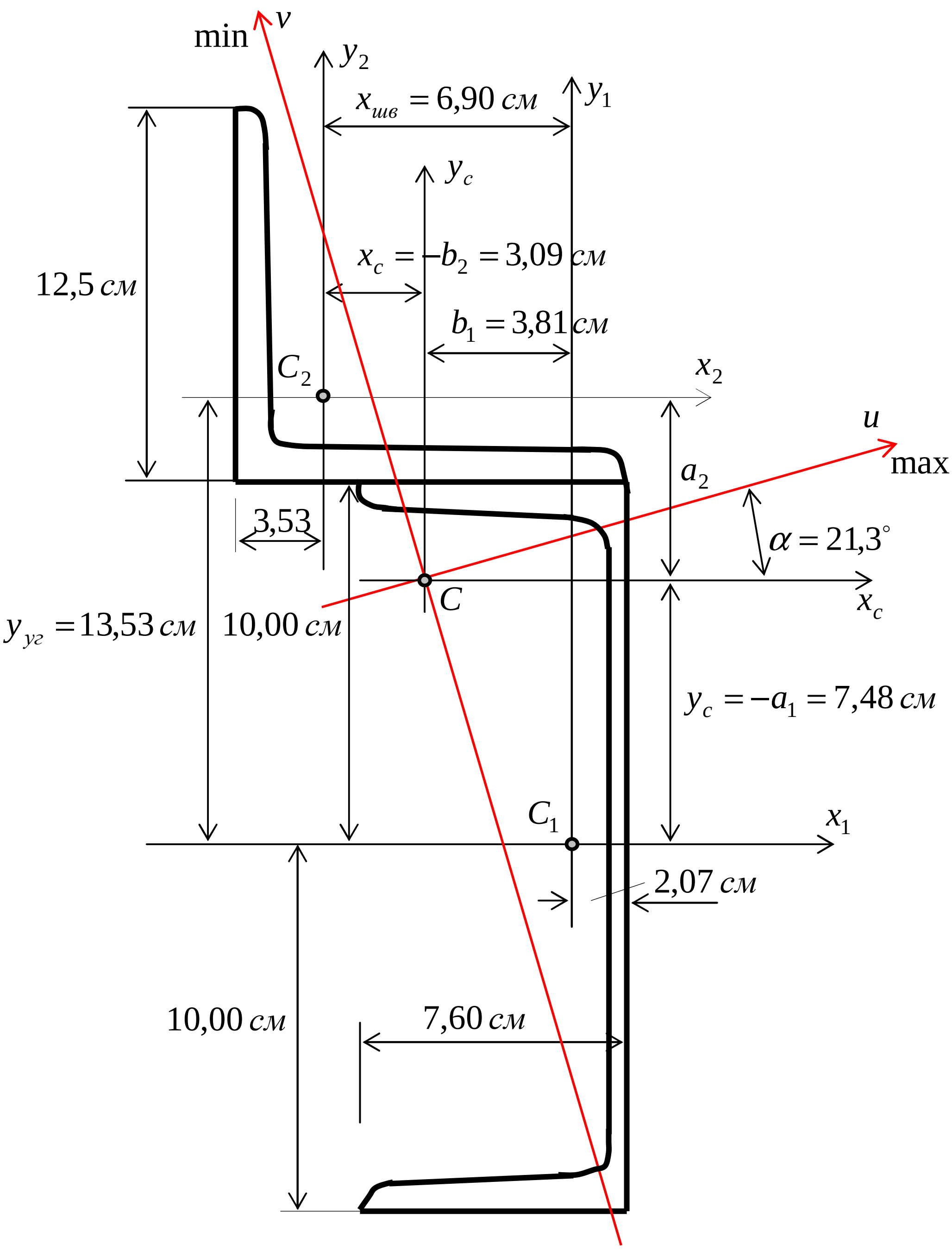


Рис. 3, а

$$I_{x_c} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + I_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 = 1520 + (-7{,}48)^2 \cdot 23{,}4 + 422 + 6{,}05^2 \cdot 28{,}9 =$$
$$= 4309\ см^4,$$

$I_{y_c} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 + I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 113 + 3{,}81^2 \cdot 23{,}4 + 422 + (-3{,}09)^2 \cdot 28{,}9 =$
$= 1151\, см^4$.

Здесь $a_1 = -y_c = -7{,}48\, см$, $b_1 = 3{,}81\, см$, $a_2 = 6{,}05\, см$, $b_2 = -x_c = -3{,}09\, см$ - координаты центров тяжести швеллера и уголка в осях x_c, y_c.

Центробежный момент инерции сечения для уголка относительно осей x_2, y_2 можно определить по формуле:

$$I_{xy}^{(2)} = -\sqrt{(I_x^{(2)} - I_{y_0}^{\min}) \cdot (I_y^{(2)} - I_{y_0}^{\min})} = -\sqrt{(422-174)^2} = -248\, см^4.$$

Знак минус здесь поставлен, так как большая часть сечения уголка находится во второй и четвертой четвертях, где координаты имеют разные знаки. Центробежный момент инерции сечения для всего сечения:

$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 = 0 + (-7{,}48) \cdot 3{,}81 \cdot 23{,}4 + (-248) +$
$+ 6{,}05 \cdot (-3{,}09) \cdot 28{,}9 = -1455\, см^4$.

Определяем угол наклона главных центральных осей:

$$tg\, 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-1455)}{4309 - 1151} = 0{,}921; \qquad \alpha = 21{,}3^\circ.$$

Для нахождения оси max *и* ось x_c ($I_{x_c} > I_{y_c}$) поворачиваем против часовой стрелки ($\angle\alpha > 0$) на $\alpha = 21{,}3^\circ$.

Находим значения главных центральных моментов инерции:

$$I_{\max,\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2} = \frac{4309 + 1151}{2} \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(4309 - 1151)^2 + 4 \cdot (-1455)^2} = 2730 \pm 2147, \qquad I_{\max} = 4877\, см^4,$$
$I_{\min} = 583\, см^4$.

Проверкой нам служит соблюдение равенства

$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min} = const$; $4309 + 1151 = 4877 + 583$; $5460 = 5460$.

Задача 4

Для балки, изображенной на рис. 4, а, требуется:

1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x, найти $M_x^{\max}$;

2) подобрать прямоугольное ($h : b = 2$), кольцевое ($d_{внутр} : d_{внешн} = 0.8$) и двутавровое поперечное сечение при $[\sigma] = 160\, МПа$;

3) выбрать наиболее рациональное сечение по расходу материала.

Для деревянной балки круглого поперечного сечения (рис. 4, б) требуется:

1) построить эпюры Q_y и M_x, найти $M_x^{\max}$;

2) подобрать диаметр сечения при $[\sigma] = 8\,МПа$;

3) построить эпюру прогибов при $E = 12\,ГПа$ (по 3 ординатам на каждом участке).

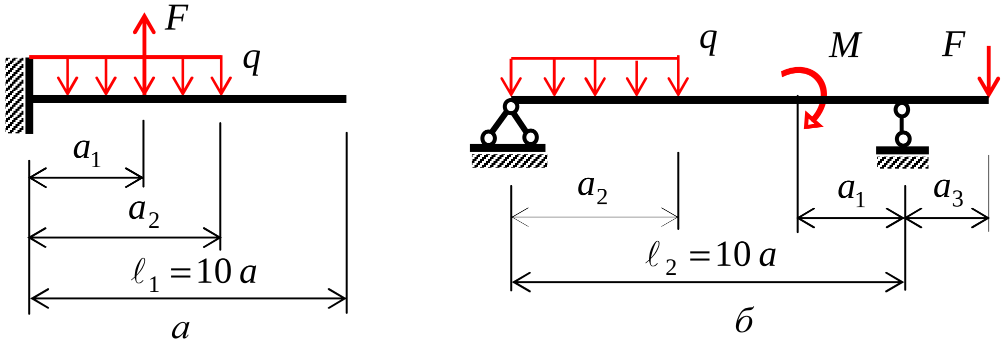


Рис. 4

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки - 786. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 7, б = 8, в = 6. Данные берем из табл. 4 методических указаний. Таким образом, имеем: схема № 6 (рис. 4), $\ell_1 = 1{,}8м$, $\ell_2 = 6м$, $a_1/a = 7$, $a_2/a = 8$, $a_3/a = 1$, $M = 7\,кН \cdot м$, $F = 8\,кН$, $q = 6\,кН/м$.

Задача 4, а

В нашем случае $\ell_1 = 1{,}8\,м = 10a$, следовательно $a = 0{,}18\,м$. При этом $a_1 = 7a = 1{,}26\,м$, $a_2 = 8a = 1{,}44\,м$. Расчетная схема балки, соответствующая исходным данным, показана на рис. 4, в.

Приложенные к балке два вида нагрузок разделяют ее длину на три участка и вызывают в защемлении опорную реакцию R_0 и опорный момент M_0. Определяем их значения, используя условия равновесия сил, действующих на консоль (рис. 4, в):

$\sum F_y = 0,\ R_0 + 8 - 6 \cdot 1{,}44 = 0,\ R_0 = 0{,}64\,кН;$

$\sum m_0 = 0,\ M_0 - 8 \cdot 1{,}26 - 6 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}72 = 0,\ M_0 = 3{,}86\,кН\ м.$

Если опорные реакции R_0 и M_0 найдены верно, то любое другое уравнение равновесия должно тождественно удовлетвориться:

$\sum m_1 = 0,\ M_0 + R_0 \cdot 1{,}26 - 6 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}54 = 0, \qquad 0 = 0.$

Для определения Q_y и M_x на участках балки методом сечений воспользуемся скользящей системой координат. Напомним, что положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна и ординаты $эп.M_x$ откладывается на них. Положительная поперечная сила вращает оставленную часть консоли по часовой стрелке и ординаты $эп.Q_y$ откладываются вверх от оси эпюры

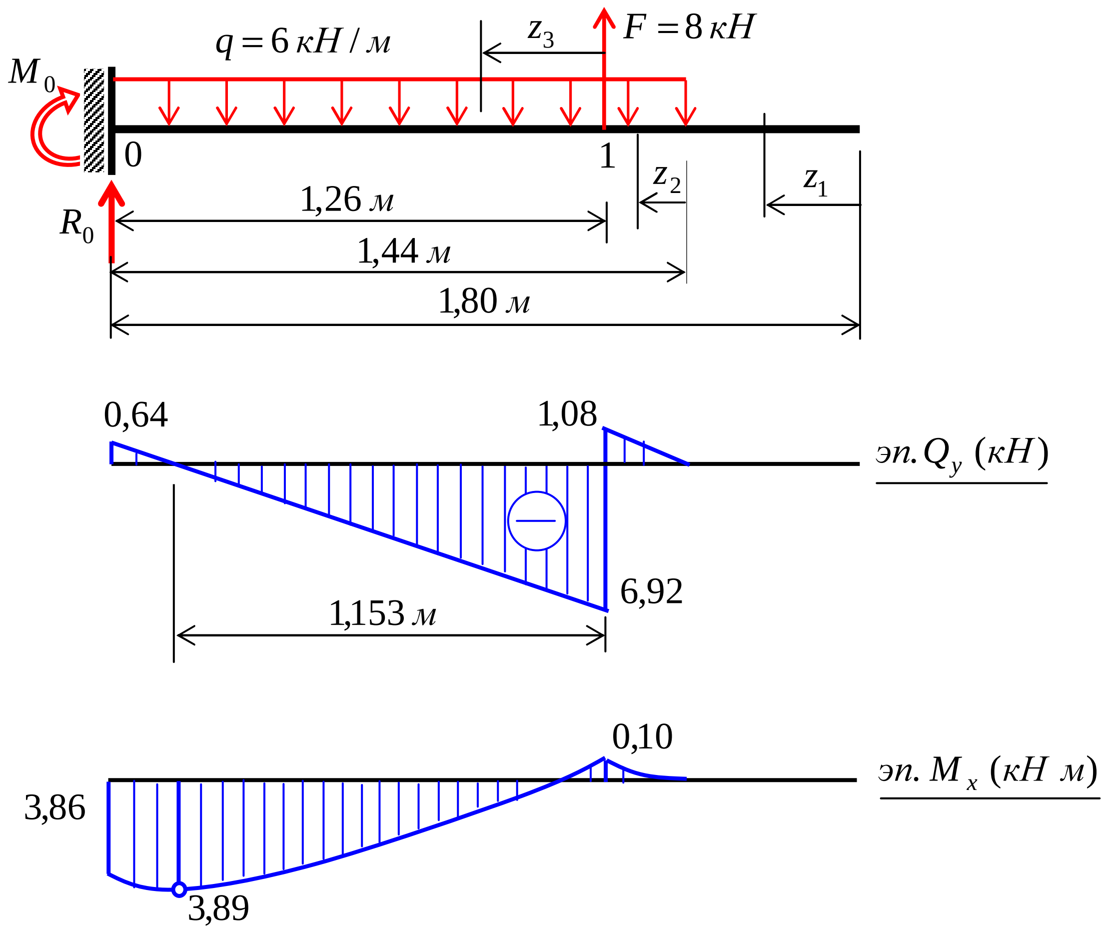


Рис. 4, в

Итак имеем:
участок № 1 $(0 \le z_1 \le 0{,}36\ м)$ $\quad Q_1 = 0,\ M_1 = 0$;

участок № 2 $(0 \le z_2 \le 0{,}18\ м)$ $\quad Q_2 = 6 \cdot z_2,\ M_2 = -\dfrac{6 \cdot z_2^2}{2} = -3 \cdot z_2^2$,

$Q_2(0{,}18) = 1{,}08\ кН$; $M_2(0{,}18) = 0{,}10\ кН \cdot м$;

участок № 3 $(0 \le z_3 \le 1{,}26\ м)$, $Q_3 = -8 + 6 \cdot (0{,}18 + z_3) = -6{,}92 + 6 \cdot z_3$,

$Q_3 = 0$, $\quad -6{,}92 + 6 \cdot z_3^0 = 0$, $\quad$ при $\quad z_3^0 = 1{,}153\ м$, $\quad Q_3(1{,}26) = 0{,}64\ кН$,.

$$M_3 = 8 \cdot z_3 - 6 \cdot (0{,}18 + z_3) \cdot \frac{(0{,}18 + z_3)}{2} = -3 \cdot z_3^2 + 6{,}92 \cdot z_3 - 0{,}10;$$

$M_3(1{,}153) = 3{,}89\ кН \cdot м$; $M_3(1{,}26) = 3{,}86\ кН \cdot м$.

Так как между Q_y и M_x существует дифференциальная зависимость ($Q_y = \dfrac{dM_x}{dz}$), то если в сечении поперечная сила $Q_y = 0$, то изгибающий момент M_x в этом сечении принимает экстремальное значение.

По эпюре M_x устанавливаем опасное сечение и значение расчетного момента в нем $\left(M_{\max} = 3{,}89\ кН\ м\right)$.

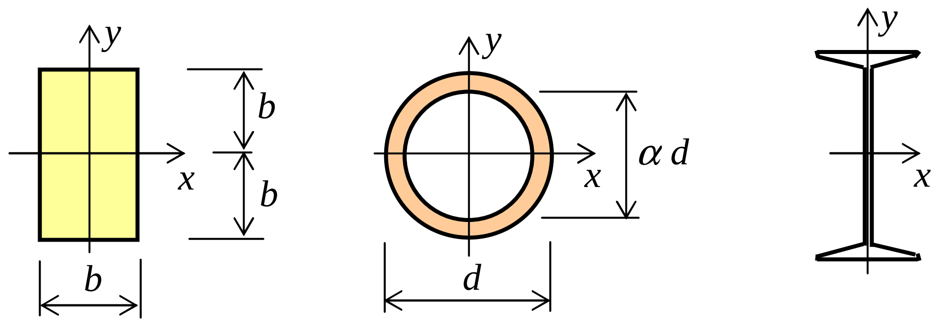


Рис. 4, г

Записываем условие прочности по нормальным напряжениям и определяем требуемое численное значение осевого момента сопротивления W_x:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \quad \frac{M_{\max}}{W_x} \le [\sigma], \quad \frac{3{,}89 \cdot 10^3}{W_x} \le 160 \cdot 10^6, \quad W_x \ge 24{,}3 \cdot 10^{-6}\ м^3.$$

Рассмотрим прямоугольное сечение (рис. 4, г). Осевой момент сопротивления будет равен ($h = 2 \cdot b$):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}, \qquad \frac{2b^3}{3} \ge 24{,}3 \cdot 10^{-6},$$

отсюда $b = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ м$, $A = bh = 2b^2 = 22 \cdot 10^{-4}\ м^2$.

Рассмотрим кольцевое сечение (рис. 4, г). Осевой момент сопротивления будет равен:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4), \text{ где } \alpha = \frac{d_{внутр}}{d_{внешн}} = 0{,}8;$$

$\dfrac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - 0{,}8^4) \ge 24{,}3 \cdot 10^{-6}$, отсюда $d = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\ м$. Тогда

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (1 - 0{,}8^2) = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} \cdot (1 - 0{,}8^2) = 15{,}9 \cdot 10^{-4}\ м^2.$$

Рассмотрим двутавровое сечение (рис. 4, г). По сортаменту (см. табл. 1 приложения) ближайшее большее значение W_x будет у двутавра №10 с $W_x = 39{,}7\ см^3 = 39{,}7 \cdot 10^{-6}\ м^3$ и площадью поперечного сечения $A = 12\ см^2 = 12 \cdot 10^{-4}\ м^2$.

Самым экономичным с точки зрения расхода материала будет двутавровое сечение, так как у него площадь поперечного сечения оказалась наименьшей.

Задача 4, б

В нашем случае $\ell_2 = 6\,м = 10a$, следовательно $a = 0{,}6\,м$. При этом $a_1 = 7a = 4{,}2\,м$, $a_2 = 8a = 4{,}8\,м$, $a_3 = a = 0{,}6\,м$ Расчетная схема деревянной балки, соответствующая исходным данным, показана на рис. 4, д.

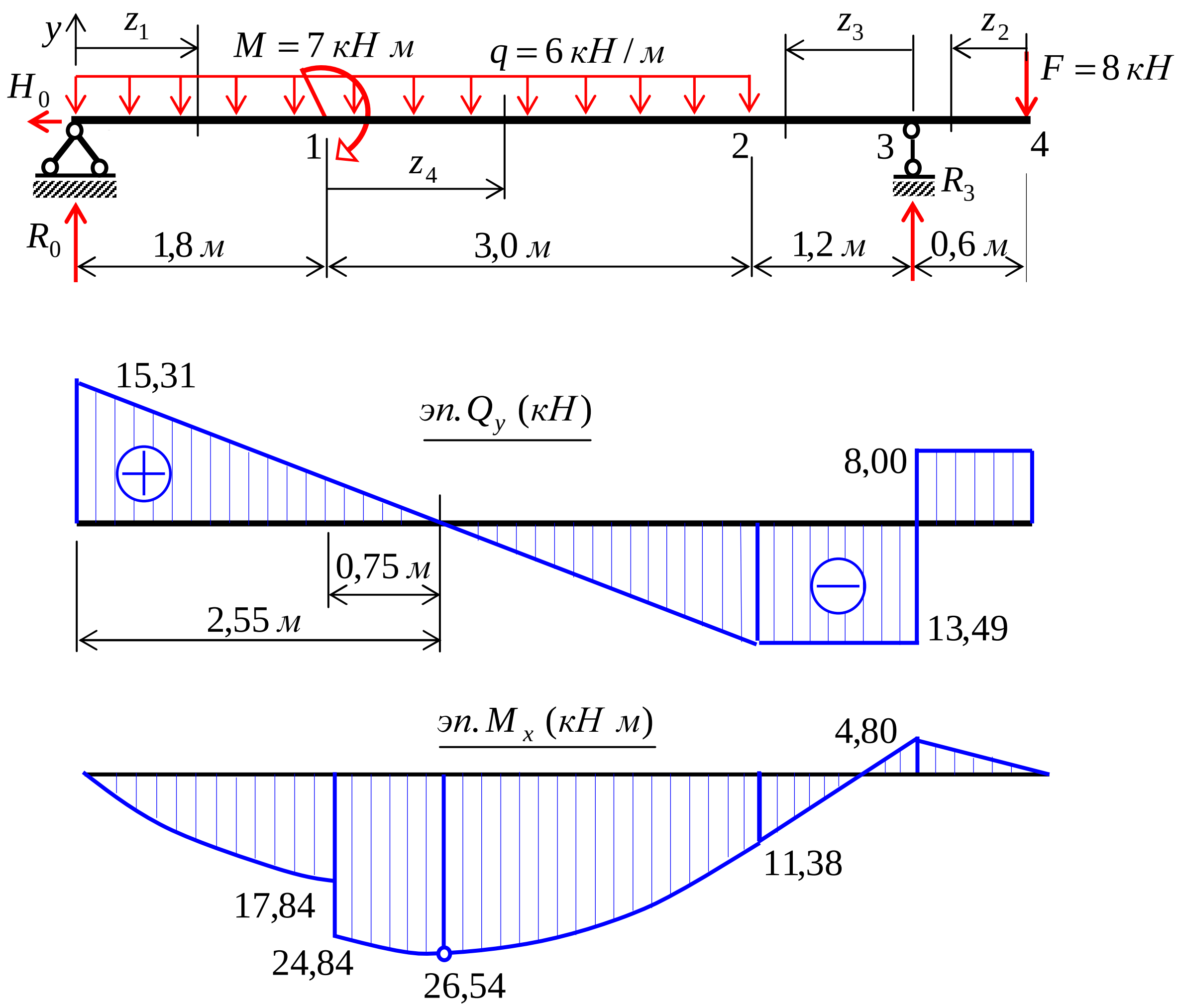


Рис. 4, д

Приложенные к балке три вида нагрузок разделяют ее длину на четыре участка $(0-1,\ 1-2,\ 2-3,\ 3-4)$ и вызывают в опорах балки реакции H_0, R_0 и R_3, которые определяем из следующих уравнений равновесия:

$\Sigma F_z = 0, \quad H_0 = 0;$

$\Sigma M_3 = 0, \quad 6R_0 + 10 \cdot 0{,}6 + 4 - 6 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \qquad R_0 = 15{,}31\,кН;$

$\Sigma M_0 = 0, \quad 6R_3 - 10 \cdot 6{,}6 - 4 - 6 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \qquad R_3 = 21{,}49\,кН;$

Проверка: $\quad \Sigma F_y = 0, \quad R_0 + R_3 - 8 - 6 \cdot 4{,}8 = 0, \qquad 0 = 0.$

Определим на участках балки Q_y и M_x:

участок № 1 $\left(0 \le z_1 \le 1{,}8\ м\right)$, $Q_1 = 15{,}31 - 6 \cdot z_1$, $M_1 = 15{,}31 \cdot z_1 - 6 \cdot \frac{z_1^2}{2}$, $Q_1 = 0$,

при $z_1^0 = 2{,}55\ м$; $Q_1(1{,}8) = 4{,}51\,кН$; $M_1 = 15{,}31 \cdot z_1 - 6 \cdot \frac{z_1^2}{2}$; $Q_1(1{,}8) = 4{,}51\,кН$; $M_1(1{,}8) = 17{,}84\ кН \cdot м$;

участок № 2, $(0 \le z_2 \le 0{,}6)$, $Q_2 = 8\ кН$, $M_2 = -8 \cdot z_1$, $M_2(0{,}6) = -4{,}8\ кН\ м$;

участок № 3 $\left(0 \le z_3 \le 1{,}2\ м\right)$, $M_3 = 21{,}49 \cdot z_3 - 8 \cdot (z_3 + 0{,}6) = 13{,}49 \cdot z_3 - 4{,}8$; $Q_3 = 8 - 21{,}49 = 13{,}49\ кН$; $M_3(1{,}2) = 11{,}38\ кН \cdot м$;

участок № 4 $\left(0 \le z_4 \le 3\ м\right)$, $Q_4 = 15{,}31 - 6 \cdot (z_4 + 1{,}8) = 4{,}51 - 6 \cdot z_4$,

$Q_4 = 0$ при $z_4^0 = 0{,}75\ м$; $M_4 = 15{,}31 \cdot (z_4 + 1{,}8) + 7 - 6 \cdot \frac{(z_4 + 1{,}8)^2}{2}$,

$Q_4(3{,}0) = -13{,}49\ кН$; $M_4(0) = 24{,}84\ кН \cdot м$; $M_4(0{,}75) = 26{,}54\ кН \cdot м$, $M_4(3{,}0) = 11{,}38\ кН \cdot м$.

По полученным в характерных сечениях значениям Q_y и M_x строим эпюры Q_y и M_x (рис. 4, д). По эпюре M_x устанавливаем опасное сечение и значение расчетного момента в нем $\left(M_{\max} = 26{,}54\ кН\ м\right)$.

Искомый диаметр балки находим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \quad \frac{M_{\max}}{W_x} \le [\sigma], \quad W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad \frac{26{,}54 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \le 8 \cdot 10^6,$$

$$d = 0{,}323\ м, \ EI_x = 12 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}323^4}{64} = 6{,}436\ МН \cdot м^2.$$

Прогибы характерных сечений деревянной балки определим методом начальных параметров. Начало координат совмещаем с левым крайним сечением балки (рис. 4, е). По условию задачи начальный прогиб v_0 равен нулю ($v_0 = 0$). Уравнение метода начальных параметров на различных участках принимает следующий вид:

на первом участке $\left(0 \le z_1 \le 1{,}8\ м\right)$

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_1 + EI_x \cdot v_0 + 15{,}31 \cdot \frac{z_1^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_1^4}{24},$$

на втором участке $(1{,}8 \le z_2 \le 4{,}8)$

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_2 + EI_x \cdot v_0 + 15{,}31 \cdot \frac{z_2^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_2^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_2 - 1{,}8)^2}{2},$$

на третьем участке $\left(4{,}8 \le z_3 \le 6{,}0\ м\right)$

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_3 + 15{,}31 \cdot \frac{z_3^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_3 - 1{,}8)^2}{2} + 6 \cdot \frac{(z_3 - 4{,}8)^4}{24},$$

на четвертом участке $(6{,}0 \le z_4 \le 6{,}6\ м)$

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_4 + 15{,}31 \cdot \frac{z_4^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_4^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_4 - 1{,}8)^2}{2} + 6 \cdot \frac{(z_4 - 4{,}8)^4}{24} +$$

$$+ 21{,}49 \cdot \frac{(z_4 - 6{,}0)^3}{6}.$$

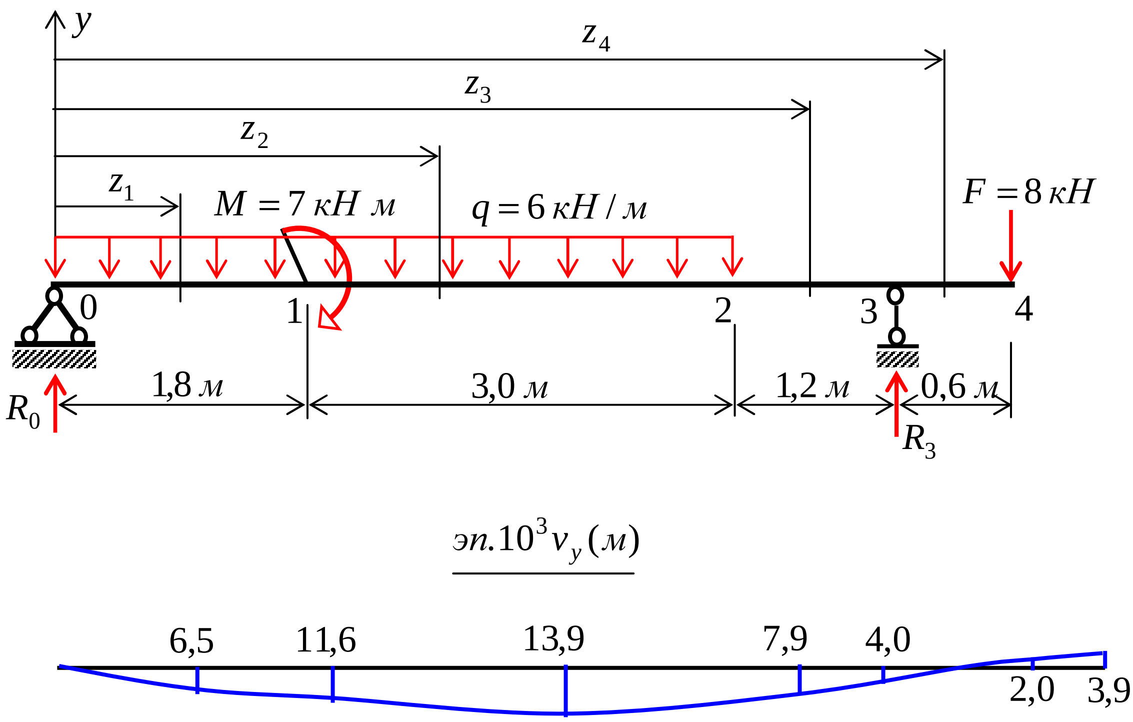


Рис. 4, е

Второй начальный параметр (начальный угол поворота φ_0) найдем из граничного условия, которое говорит, что при $z_3 = 6\ м$, прогиб опорного сечения 3 равен нулю $v_y(6) = 0$:

$$EI_x v_y(z_3 = 6) = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_3 + 15{,}31 \cdot \frac{z_3^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_3 - 1{,}8)^2}{2} +$$

$$+ 6 \cdot \frac{(z_3 - 4{,}8)^4}{24} = 0, \qquad EI_x \cdot \varphi_0 = -48{,}256.$$

Вычислим прогиб посередине второго участка:

$$v_y(z_2 = 3{,}3\ м) = \varphi_0 \cdot z_2 + \frac{1}{EI_x} \cdot \left(15{,}31 \cdot \frac{z_2^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_2^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_2 - 1{,}8)^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{10^3}{6{,}436 \cdot 10^6} \cdot \left(-48{,}256 \cdot 3{,}3 + 15{,}31 \cdot \frac{3{,}3^3}{6} - 6 \cdot \frac{3{,}3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(3{,}3 - 1{,}8)^3}{2}\right) =$$

$$= 13{,}9 \cdot 10^{-3}\ м.$$

Остальные прогибы по краям и посередине всех четырех участков вычисляем аналогичным способом. Эпюра прогибов приведена на рис. 4, е.

Задача 5

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 5, сжимается продольной силой F, приложенной в точке A. Требуется:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F и размеры сечения;

2) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$.

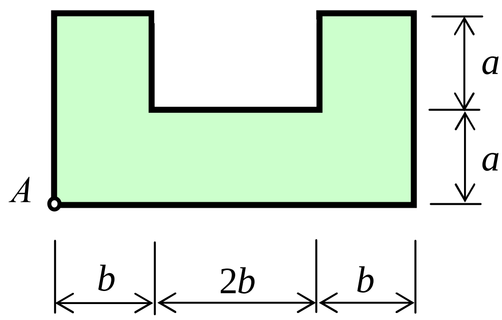


Рис. 5

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 653. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 6, б = 5, в = 3. Данные берем из табл. 5 методических указаний. Таким образом, имеем: схему №3 (рис. 5), $a = 6\,см$, $b = 5\,см$, $[\sigma_c] = 60\,МПа$, $[\sigma_p] = 25\,МПа$.

Поперечное сечение имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью. Сложное сечение представим в виде двух простых фигур, причем вторая, в виде прямоугольного выреза, с отрицательной площадью $A = A_1 + A_2 = 12 \cdot 20 + (-10 \cdot 6) = 180\,см^2 = 180 \cdot 10^{-4}\,м^2$.

Положение центра тяжести сечения относительно оси x_1 (рис. 5, а):

$$y_c = \frac{\sum S_{x_1}}{\sum A} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{240 \cdot 0 + (-60) \cdot 3}{180} = -1\,см.$$

Здесь y_1 и y_2 расстояния от оси x_1 до центров тяжести простых фигур. Вторая главная центральная ось x пройдет перпендикулярно к оси симметрии y и через найденный центр тяжести сечения. Величины главных центральных моментов инерции сложного сечения:

$$I_y = I_{y_1}^{(1)} - I_{y_2}^{(2)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{12\cdot 20^3}{12} - \frac{6\cdot 10^3}{12} = 7500\,см^4 = 0{,}75\cdot 10^{-4}\,м^4,$$

$$I_x = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2\cdot A_1 - I_{x_2}^{(2)} - a_2^2\cdot A_2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2\cdot A_1 - \frac{b_2 h_2^3}{12} - a_2^2\cdot A_2 =$$

$$= \frac{20\cdot 12^3}{12} + 1^2\cdot 240 - \frac{10\cdot 6^3}{12} + 4^3\cdot(-60) = 1980\,см^4 = 0{,}198\cdot 10^{-4}\,м^4.$$

Здесь a_1 и a_2 - расстояния от главной центральной оси x до центров тяжести простых фигур. Определим внутренние силовые факторы - продольную силу и два изгибающих момента относительно главных центральных осей:

$N_z = -F,\quad M_x = F\cdot 0{,}05\,(м),\quad M_y = F\cdot 0{,}10\,(м).$

Тогда уравнение нулевой линии, записанное в координатных осях y и x, с учетом знаков напряжений и текущих координат в четверти, принимает следующий вид: $\sigma = 0$, где

$$\sigma = -\frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x}\cdot y + \frac{M_y}{I_y}\cdot x = -\frac{F}{180\cdot 10^{-4}} + \frac{F\cdot 0{,}05}{1980\cdot 10^{-8}}\cdot y + \frac{F\cdot 0{,}10}{7500\cdot 10^{-8}}\cdot x,$$

или после приведения подобных членов имеем $y + 0{,}528\cdot x - 2{,}20 = 0$.

Положение нулевой линии показано на рис. 5а, из которого видно, что наиболее удаленные точки от нулевой линии в сжатой и растянутой областях будут соответственно точки A и B, т.е. точки в окрестностях которых возникают наибольшие напряжения.

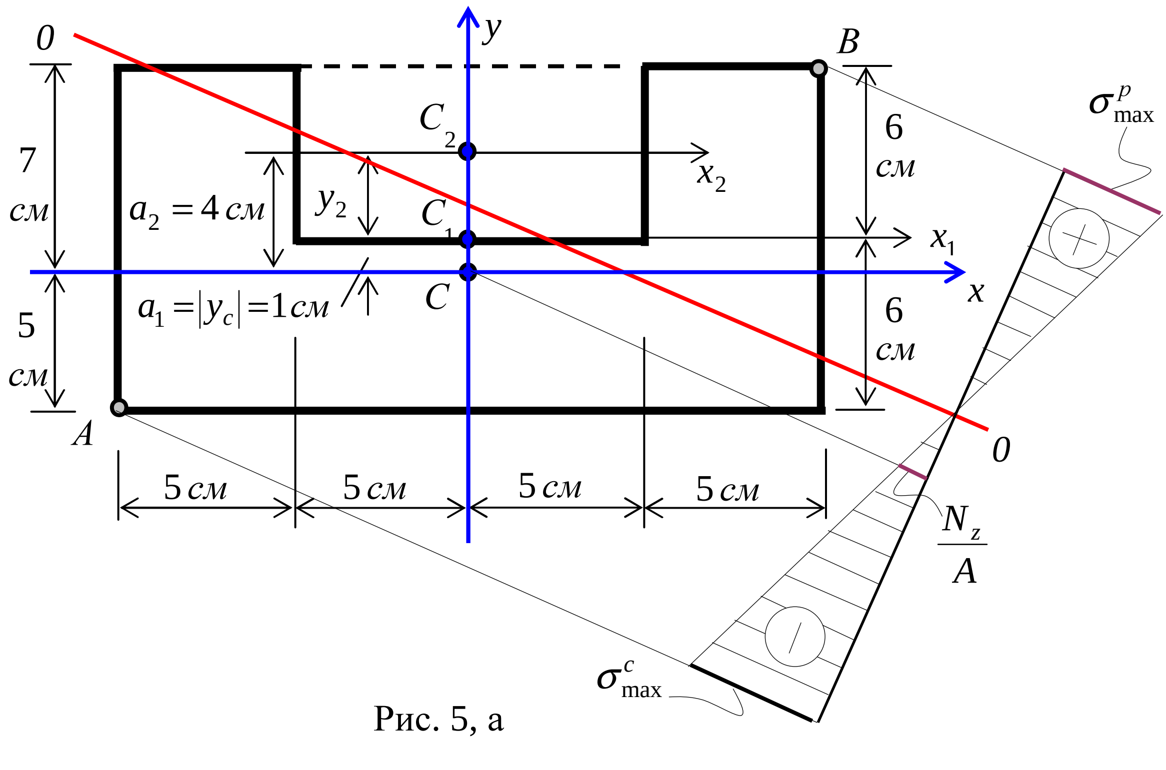


Рис. 5, а

Наибольшие сжимающие и наибольшие растягивающие напряжения в поперечном сечении будут равны

$$\sigma^{c}_{\max} = \sigma_A = -\frac{F}{180 \cdot 10^{-4}} - \frac{F \cdot 0{,}05}{0{,}198 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}05 - \frac{F \cdot 0{,}10}{0{,}75 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}10 = -315{,}15 \cdot F \quad ,$$

$$\sigma^{p}_{\max} = \sigma_B = -\frac{F}{180 \cdot 10^{-4}} + \frac{F \cdot 0{,}05}{0{,}198 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}05 + \frac{F \cdot 0{,}10}{0{,}75 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}10 = 254{,}54 \cdot F \quad .$$

Допускаемую нагрузку F находим из условий прочности для самых напряженных точек A и B (сжимающие напряжения сравниваем по модулю): $\sigma^{c}_{\max} \le [\sigma_c]$, $315{,}15 \cdot F \le 60 \cdot 10^6$, $F_c \le 190{,}4\,\kappa H$,

$\sigma^{p}_{\max} \le [\sigma_p]$, $254{,}54 \cdot F \le 25 \cdot 10^6$, $F_p \le 98{,}2\,\kappa H$.

За окончательное значение допускаемой нагрузки принимаем наименьшее из двух определенных выше значений нагрузки: $F = 98{,}2\,\kappa H$.

Задача 6

На рис. 6 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости. Участки стержня образуют прямые углы. Требуется:

1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;

2) для каждого участка определить вид сопротивления и записать условие прочности (использовать четвертую гипотезу прочности).

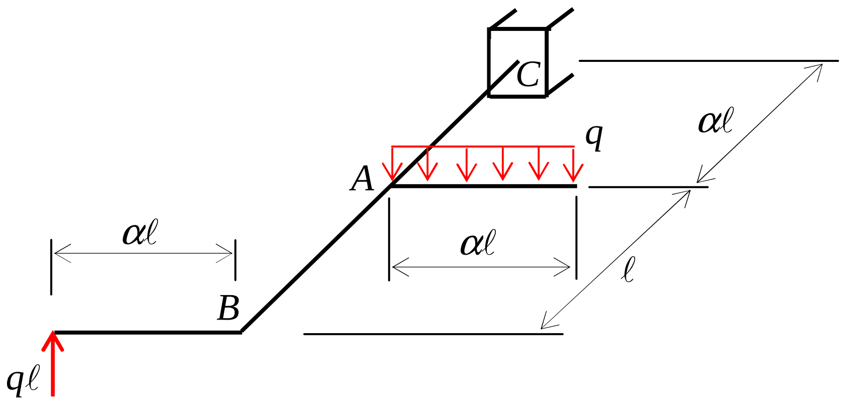


Рис. 6

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 239. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 2, б = 3, в = 9. Данные берем из табл. 6 методических указаний. Таким образом, имеем: схему №3 (рис. 6), $\alpha = 0{,}9$.

В пределах каждого участка (в нашем случае их четыре) проведем сечение на расстоянии z_i от начала участка (рис. 6а). Запишем выражения внутренних силовых факторов, используя метод сечений.

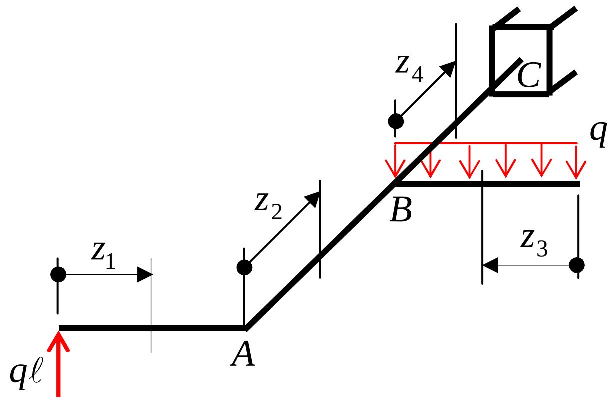


Рис. 6, а

Участок №1, $0 \le z_1 \le 0{,}9\ell$

$M_и(z_1) = q\ell \cdot z_1$, $M_и(0) = 0$, $M_и(0{,}9\ell) = 0{,}9q\ell^2$, $M_{кр}(z_1) = 0$.

Участок №2, $0 \le z_2 \le \ell$

$M_и(z_2) = q\ell \cdot z_2$. $M_и(0) = 0$, $M_и(\ell) = q\ell^2$, $M_{кр}(z_2) = 0{,}9q\ell^2$.

Участок №3, $0 \le z_3 \le 0{,}9\ell$

$M_и(z_3) = -qz_3 \cdot \dfrac{z_3}{2}$. $M_и(0) = 0$, $M_и(0{,}9\ell) = -0{,}405q\ell^2$, $M_{кр}(z_3) = 0$.

Участок №4, $0 \le z_4 \le 0{,}9\ell$

$M_и(z_4) = q\ell \cdot (\ell + z_4) - q \cdot 0{,}9\ell \cdot z_4 = 0{,}1 \cdot q\ell \cdot z_4 + q\ell^2$. $M_и(0) = q\ell^2$, $M_и(0{,}9\ell) = 1{,}09q\ell^2$, $M_{кр}(z_4) = q\ell \cdot 0{,}9\ell + 0{,}9q\ell \cdot 0{,}45\ell = 1{,}305q\ell^2$.

По полученным выражениям $M_и$ и $M_{кр}$ на каждом участке строим эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 6, б).

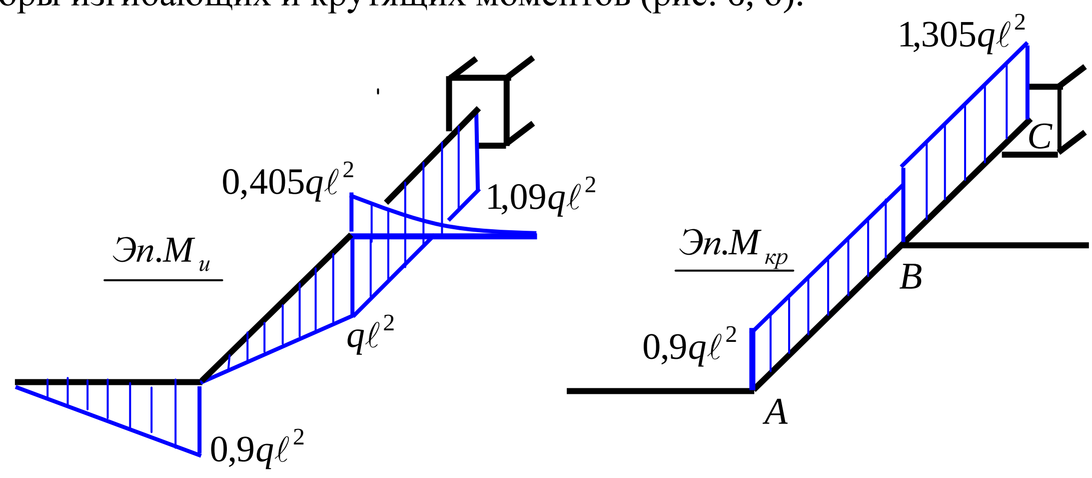


Рис. 6, б

Видно, что на первом и третьем участках ломаного стержня имеет место прямой поперечный изгиб. Условие прочности будет

$\sigma_{\max} \le [\sigma]$, $\dfrac{M_{изг}^{\max}}{W_x} \le [\sigma]$, $W_x = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$, где на первом участке $M_{изг}^{\max} = 0{,}9\, ql^2$, на третьем участке имеем $M_{изг}^{\max} = 0{,}405\, ql^2$.

На втором и четвертом участках ломаный стержень испытывает изгиб с кручением. Для опасных сечений, которые будут находиться соответственно в точках B ($M_{изг}^{\max} = ql^2$; $M_{кр}^{\max} = 0{,}9 \cdot ql^2$) и C ($M_{изг}^{\max} = 1{,}09 \cdot ql^2$; $M_{кр}^{\max} = 1{,}305 \cdot ql^2$), условие прочности по четвертой гипотезе прочности будет выглядеть следующим образом:

$\sigma_{расч}^{(IV)} \le [\sigma]$, $\dfrac{M_{расч}^{IV}}{W_x} \le [\sigma]$, $M_{расч}^{IV} = \sqrt{(M_{изг}^{\max})^2 + 0{,}75 \cdot (M_{кр}^{\max})^2}$.

Задача № 7

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 вращается со скоростью n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковые диаметры D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2, и каждый из них передает мощность $N/2$ (рис. 7). Требуется:

1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n;
2) построить эпюру крутящих моментов M_z;
3) определить окружные усилия t_1 и t_2, действующие на шкивы, по найденным крутящим моментами и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2;
4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_y и от вертикальных сил M_x;
7) вычислить значения суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ и построить развертку эпюры суммарного изгибающего момента на плоскость, откладывая все ординаты в одну сторону от оси вала (при построении развертки эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);
8) при помощи эпюр M_z (см. п. 2) и M_u (см. п. 7) найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);

9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma]=70\,МПа$ и округлить его величину (см. задачу 2).

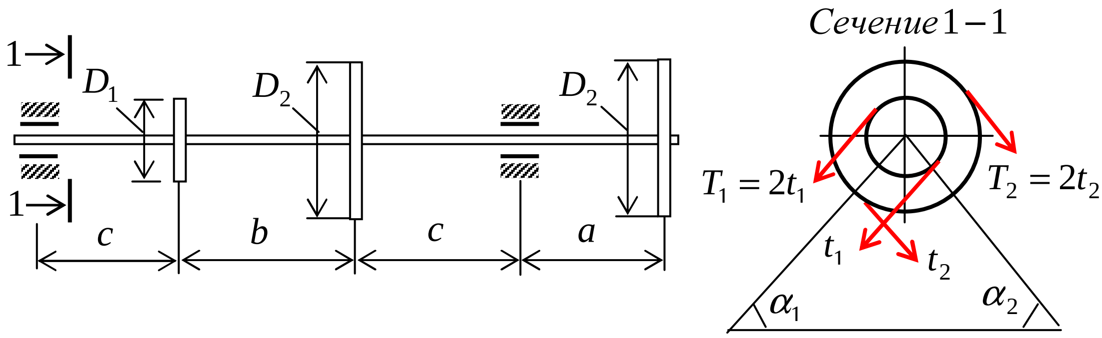


Рис. 7

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 365. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 3, б = 6, в = 5. Данные берем из табл. 7 методических указаний. Таким образом, имеем: схему №5 (рис. 7), $N=60\,кВт$, $n=500\,об/мин$, $D_1=0{,}6\,м$, $D_2=1{,}5\,м$, $a=1{,}3\,м$, $b=0{,}6\,м$, $c=1{,}5\,м$, $\alpha_1^\circ=60^\circ$, $\alpha_2^\circ=50^\circ$.

Крутящие моменты в сечениях вала под шкивами:

$$M_{к1}=\frac{30\cdot N(кВт)}{\pi\cdot n(об/мин)}=\frac{30\cdot 60}{\pi\cdot 500}=1{,}146\,кН\ м;\ M_{к2}=\frac{30\cdot 30}{\pi\cdot 500}=0{,}573\,кН\ м.$$

Соответствующие этим крутящим моментам окружные усилия t_1 и t_2 определим из следующих формул:

$M_{к1}=(T_1-t_1)\cdot\dfrac{D_1}{2}=(2t_1-t_1)\cdot\dfrac{D_1}{2}=t_1\cdot\dfrac{D_1}{2}$, аналогично имеем $M_{к2}=t_2\cdot\dfrac{D_2}{2}$,

отсюда $t_1=\dfrac{2M_{к1}}{D_1}=\dfrac{2\cdot 1{,}146}{0{,}6}=3{,}820\,кН$, $\quad t_2=\dfrac{2M_{к2}}{D_2}=\dfrac{2\cdot 0{,}573}{1{,}5}=0{,}764\,кН$.

Тогда приведенное к центру вала давление на вал в местах насадки шкивов будет равно

$$F_1=3\cdot t_1=3\cdot 3{,}820=11{,}460\,кН,\quad F_2=3\cdot t_2=3\cdot 0{,}764=2{,}292\,кН.$$

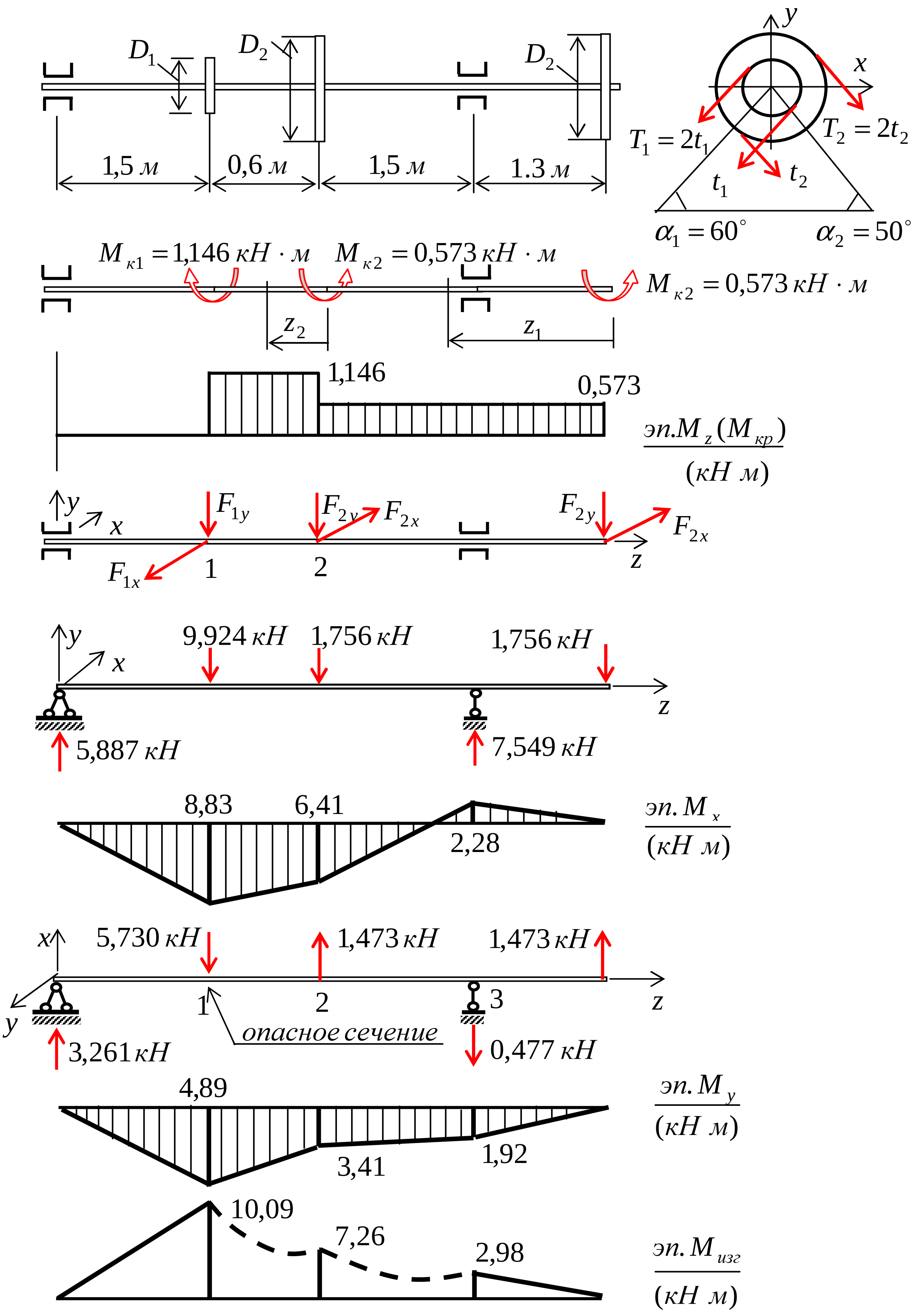
Горизонтальные и вертикальные составляющие давления на вал, вызывающие изгиб вала в соответствующих плоскостях, определяются следующим образом:

$$F_{1x}=-F_1\cos 60^\circ=-11{,}460\cdot 0{,}500=-5{,}730\,кН,$$

$$F_{2x}=F_2\cos 50^\circ=2{,}292\cdot 0{,}643=1{,}473\,кН,$$

$$F_{1y}=-F_1\sin 60^\circ=-11{,}460\cdot 0{,}866=-9{,}924\,кН,$$

$$F_{2y}=-F_2\sin 50^\circ=-2{,}292\cdot 0{,}766=-1{,}756\,кН.$$



D1
D2
D2
1,5 м
0,6 м
1,5 м
1.3 м
y
x
T1 = 2t1
T2 = 2t2
t1
t2
α1 = 60°
α2 = 50°
Mк1 = 1,146 кН · м
Mк2 = 0,573 кН · м
Mк2 = 0,573 кН · м
z2
z1
1,146
0,573
эп.Mz (Mкр)
(кН м)
F1y
F2y
F2x
F2y
F2x
F1x
1
2
z
9,924 кН
1,756 кН
1,756 кН
5,887 кН
7,549 кН
8,83
6,41
2,28
эп. Mx
(кН м)
5,730 кН
1,473 кН
1,473 кН
1
2
3
опасное сечение
3,261 кН
0,477 кН
4,89
3,41
1,92
эп. My
(кН м)
10,09
7,26
2,98
эп. Mизг
(кН м)

Рис. 7, а

Расчетная схема представляет собой балку, установленную на двух шарнирных опорах и нагруженную сосредоточенными скручивающими моментами и сосредоточенными поперечными силами в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 7, а).

Строим эпюры крутящих и изгибающих моментов. Для совмещения горизонтальной плоскости xoz (плоскость $эп.M_y$) с плоскостью страницы, повернем на 90° координатные оси yox относительно оси z.

Вычисляем значения суммарного изгибающего момента в характерных сечениях вала по формуле $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$M_{изг}^{(1)} = \sqrt{8{,}83^2 + 4{,}89^2} = 10{,}09\,кН\ м$; $M_{изг}^{(2)} = \sqrt{6{,}41^2 + 3{,}41^2} = 7{,}26\,кН\ м$;

$M_{изг}^{(3)} = \sqrt{2{,}28^2 + 1{,}92^2} = 2{,}98\,кН\ м$.

Из эпюр $M_{кр}$ и $M_{изг}$ видно, что опасным является сечение 1, для которого $M_{кр}^{\max} = 1{,}146\,кН\ м$ и $M_{изг}^{\max} = 10{,}09\,кН\ м$.

Для этого сечения вычисляем расчетный момент, используя третью теорию прочности. Получим

$$M_{расч}^{(3)} = \sqrt{(M_{изг}^{\max})^2 + (M_{кр}^{\max})^2} = \sqrt{10{,}09^2 + 1{,}146^2} = 10{,}16\,кН\ м.$$

Из условия прочности вычисляем диаметр вала

$$\sigma_{расч}^{(3)} \le [\sigma],\ \frac{M_{расч}^{(3)}}{W_x} \le [\sigma],\ W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32},\ \frac{10{,}16 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \le 70 \cdot 10^6,\ d \ge 0{,}114\,м.$$

Округлив значение диаметра (см. задачу 2), получим $d = 125\,мм$.

Задача 8

Стальной стержень (сталь Ст.3) длиной ℓ сжимается силой F. Требуется:

1) найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160\,МПа$ (расчет производить методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi = 0{,}5$);

2) найти значение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

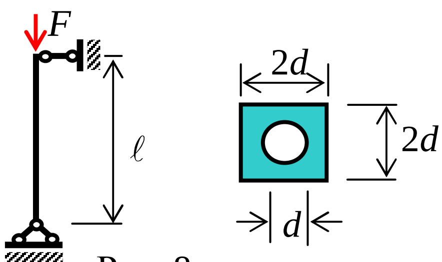


Рис. 8

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 048. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем а = 0, б = 4, в = 8. Данные берем из табл. 8 методических указаний. Таким образом, имеем $F = 1000\,кН$, $\ell = 2{,}4\,м$, схема закрепления концов стержня и форма сечения стержня показаны на рис. 8.

Расчет начинаем с вычисления всех необходимых геометрических характеристик поперечного сечения стойки, которые удобно выразить через площадь поперечного сечения A ($b = h = 2d$):

$$A = 4d^2 - \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}215\,d^2, \quad d^2 = \frac{A}{3{,}215} = 0{,}311 \cdot A,$$

$$I_{\min} = I_x = I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{2d \cdot (2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1{,}284 d^4 = 0{,}124 \cdot A^2.$$

Радиус инерции сечения относительно оси наименьшей жесткости:

$$i_{\min} = i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 0{,}3525\sqrt{A}.$$

Гибкость стержня :

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{1{,}0 \cdot 2{,}4}{0{,}3525\sqrt{A}} = \frac{6{,}808}{\sqrt{A}},$$

где μ - коэффициент приведения длины стержня, зависящий от условий закрепления стержня (см. табл. 3 приложения).

В условии устойчивости

$$\sigma_y \le [\sigma_y], \qquad \frac{F}{A} \le [\sigma] \cdot \varphi$$

неизвестны величины A и φ, где φ - коэффициент продольного изгиба.

Расчет производить методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi = 0{,}5$:

$$A \ge \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_1} = \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5} = 0{,}0125\,м^2 = 125 \cdot 10^{-4}\,м^2,$$

тогда гибкость стержня $\lambda = \dfrac{6{,}808}{\sqrt{A}} = \dfrac{6{,}808}{\sqrt{125 \cdot 10^{-4}}} \approx 61.$

По табл. 2 приложения, используя линейную интерполяцию, находим $\varphi_1^* = 0{,}81 + \dfrac{0{,}86 - 0{,}81}{10} \cdot 9 \approx 0{,}855.$

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_2 = \frac{0{,}5 + 0{,}855}{2} \approx 0{,}678; \quad A \ge \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}678} = 0{,}0092\ м^2; \quad \lambda = \frac{6{,}808}{\sqrt{A}} \approx 71;$$

$$\varphi^*_2 = 0{,}75 + \frac{0{,}81 - 0{,}75}{10} \cdot 9 \approx 0{,}804.$$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{0{,}678 + 0{,}804}{2} \approx 0{,}741; \ A \ge \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}741} = 0{,}0084\ м^2; \ \lambda = \frac{6{,}808}{\sqrt{A}} \approx 74;$$

$$\varphi^*_3 = 0{,}75 + \frac{0{,}81 - 0{,}75}{10} \cdot 6 \approx 0{,}786.$$

В четвертом приближении

$$\varphi_4 = \frac{0{,}741 + 0{,}786}{2} \approx 0{,}763; \ A \ge \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}763} = 0{,}0082\ м^2; \ \lambda = \frac{6{,}808}{\sqrt{A}} \approx 75;$$

$$\varphi^*_4 = 0{,}780.$$

Полученное значение φ близко к принятому, поэтому проверим выполнение условия устойчивости:

$$\frac{F}{A} \le [\sigma] \cdot \varphi; \quad \frac{1000 \cdot 10^3}{0{,}0082} \le 160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}764; \quad 122{,}0\ МПа \le 122{,}2\ МПа.$$

Относительная погрешность между напряжениями составляет

$$\delta_\sigma = \frac{(122{,}2 - 120{,}0)}{120} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%;$$

это меньше одного процента, что допустимо. Принимая $\varphi = 0{,}763$; получаем $A = 0{,}0082\ м^2$; $d = \sqrt{\dfrac{A}{3{,}215}} = 0{,}050\ м$.

Для материала стойки (сталь 3, $E = 200\ ГПа$, $\sigma_{пц} = 200\ МПа$) значение предельной гибкости $\lambda_{пред}$ будет равно

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

Поскольку в нашем случае гибкость стойки меньше предельной ($\lambda = 75 < 100$), то величину критической силы определяем по формуле Ясинского (для ст.3 $a = 310\ МПа$, $b = 1{,}14\ МПа$):

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1{,}14 \cdot 75) \cdot 10^6 \cdot 0{,}0082 = 1841\,\text{кН}.$$

Стойка имеет коэффициент запаса устойчивости, равный

$$n_у = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1841}{1000} = 1{,}84.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

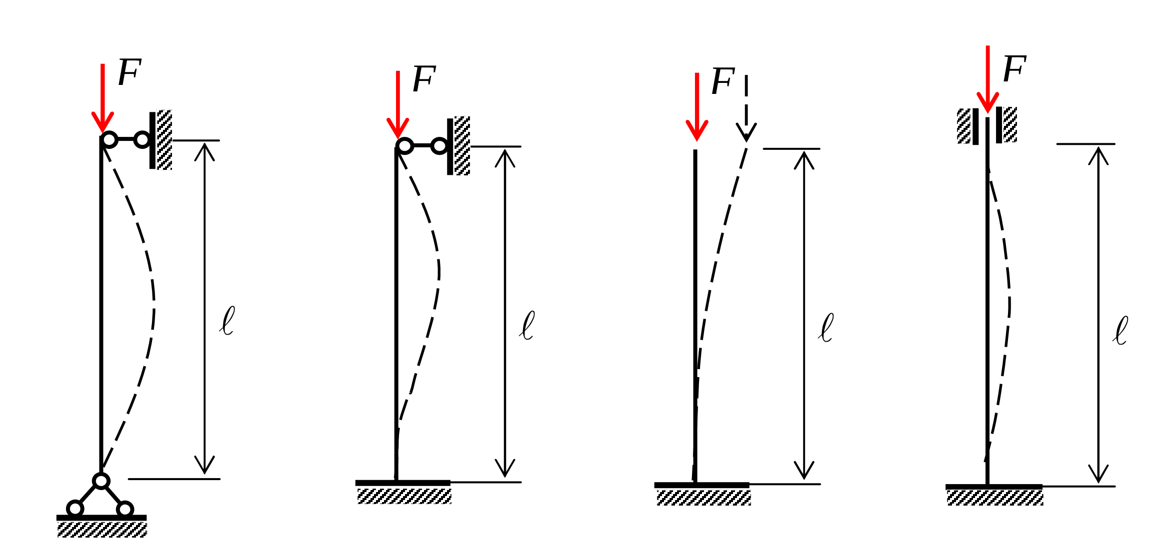
Табл.1. Площади и моменты сопротивления для двутавровых балок (ГОСТ 8239-86)

№ сечения	A $см^2$	W_x $см^3$	№ сечения	A $см^2$	W_x $см^3$	№ сечения	A $см^2$	W_x $см^3$	№ сечения	A $см^2$	W_x $см^3$
10	12,0	39,7	20	26,8	184	27	40,2	371	40	72,6	953
12	14,7	58,4	20а	28,9	203	27а	43,2	407	45	84,7	1231
14	17,4	81,7	22	30,6	232	30	46,5	472	50	100	1589
16	20,2	109	22а	32,8	254	30а	49,9	518	55	118	2035
18	23,4	143	24	34,8	289	33	53,8	597	60	138	2560
18а	25,4	159	24а	37,5	317	36	61,9	743			

Табл. 2. Коэффициенты продольного изгиба φ для ст.3

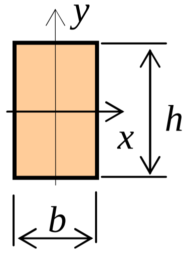
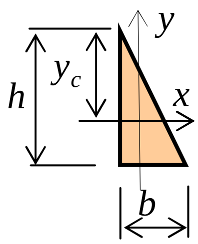
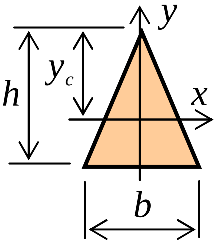
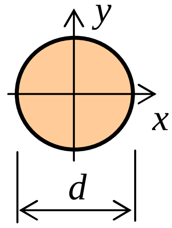
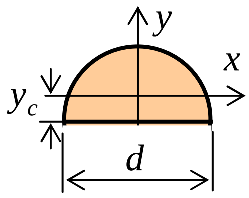
λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

Табл. 3. Коэффициенты приведения длины μ



$\mu = 1{,}0$ $\mu = 0{,}7$ $\mu = 2{,}0$ $\mu = 0{,}5$

Табл. 4. Геометрические характеристики простых фигур

				
$y_c = \frac{1}{2}h$	$y_c = \frac{2}{3}h$	$y_c = \frac{2}{3}h$	$y_c = \frac{1}{2}d$	$y_c = \frac{2d}{3\pi}$
$A = bh$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$A = \frac{\pi d^2}{8}$
$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_x = 0{,}11 \cdot (\frac{d}{2})^4$
$I_y = \frac{hb^3}{12}$	$I_y = \frac{hb^3}{36}$	$I_y = \frac{hb^3}{48}$	$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$	$I_y = \frac{\pi d^4}{128}$

ОГЛАВЛЕНИЕ