

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ  
РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) ЗА  
ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ**



**ХАБАРОВСК 1984**

Министерство высшего и среднего специального  
образования РСФСР

Хабаровский политехнический институт

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ  
(СЖАТИИ) ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Методические указания по сопротивлению материалов  
для студентов механических специальностей дневного  
и заочного обучения

Хабаровск 1984

УДК 539.3/(076)

Расчет на прочность при растяжении (сжатии) за пределами упругости: Методические указания по сопротивлению материалов для студентов механических специальностей дневного и заочного обучения.

Сост. А.Н.Павлов, Г.И.Романова. - Хабаров.политехн.ин-т, 1984.  
- 15 с.

Указания разработаны на кафедре "Строительная механика". В них рассмотрены вопросы расчета статически неопределимых систем работающих на растяжение (сжатие) за пределами упругости при апроксимации диаграммы растяжения-сжатия двумя прямыми. Приведен пример расчета статически неопределимой стержневой системы.

Печатается в соответствии с решением кафедры "Строительная механика" и методического совета строительного факультета

## ВВЕДЕНИЕ.

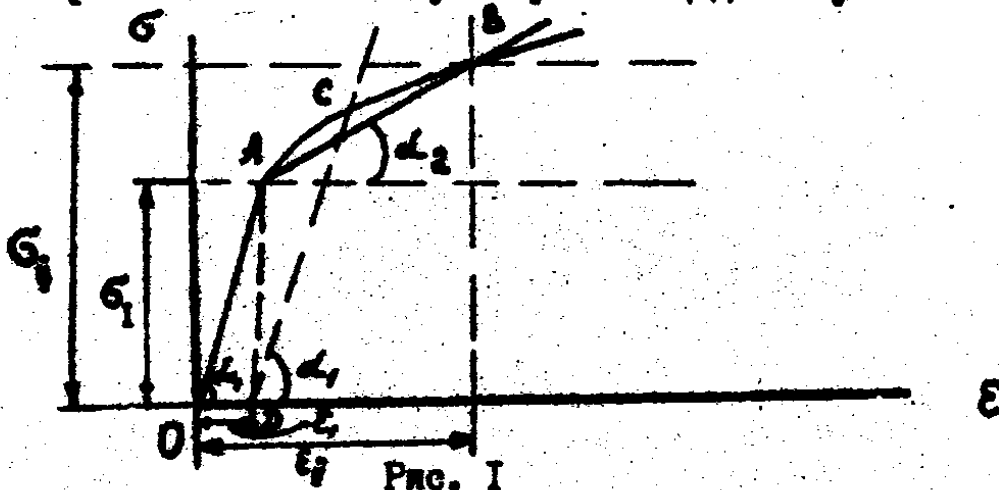
При решении задач, связанных с исследованием таких технологических операций, как навивка пружин или штамповка различных изделий, приходится рассматривать вопросы, связанные с изучением пластических деформаций. С учетом пластических деформаций рассчитываются сильно напряженные элементы конструкций типа оболочек ракетных двигателей и др.

В статически неопределимых системах при нагружении за пределы упругости и последующей разгрузке возникают так называемые остаточные напряжения, которые при последующем нагружении необходимо учитывать в расчетах. При решении такого типа задач закон Гука становится несправедливым, и зависимость между напряжениями и деформациями получается более сложной, зависящей от вида диаграммы растяжения. Для упрощения расчетов диаграмма растяжения схематизируется с учетом реальной работы конструкции.

Данное задание имеет цель ознакомить студентов с принципами расчета статически неопределимых систем, работающих при растяжении (сжатии) за пределами упругости при первичном нагружении, разгрузке и вторичном нагружении. Полученные результаты необходимо сравнить с результатами решения задачи в пределах упругости.

## I.I. Схематизация диаграммы растяжения

Типичная диаграмма растяжения легированных сталей представлена на рис. I. На ней отсутствует площадь текучести.



Стержень работает за пределами упругости и нагружен рабочей нагрузкой  $N_p$ . Требуется определить соответствующее этому усилию удлинение  $\Delta l_p$ . Нагрузка плавно растёт от 0 до  $N_I$ . На участке  $OA$  до усилия  $N_I$  стержень работает упруго и соответствующее удлинение равно

$$\Delta l_I = \frac{N_I l}{E_1 F}, \quad (1)$$

где  $E_1$  - модуль упругости, соответствующий упругому участку диаграммы растяжения (рис. 1).

На участке  $AB$  стержень деформируется усилием  $N_p - N_I$ , модуль упругости равен  $E_2$ . Соответствующее удлинение

$$\Delta l_{II} = \frac{(N_p - N_I) \cdot l}{E_2 F}. \quad (2)$$

Полное удлинение

$$\Delta l_p = \Delta l_I + \Delta l_{II}.$$

Учитывая (1) и (2), запишем

$$\Delta l_p = \frac{N_I l}{E_1 F} + \frac{(N_p - N_I) l}{E_2 F} = \left( \frac{N_I}{E_1 F} - \frac{N_I}{E_2 F} \right) \cdot l + \frac{N_p l}{E_2 F}.$$

Если  $\frac{N_I}{F} = \sigma_I$ , тогда

$$\Delta l_p = \left( \frac{\sigma_I}{E_1} - \frac{\sigma_I}{E_2} \right) \cdot l + \frac{N_p \cdot l}{E_2 F},$$

или

$$\Delta l_p = A l + \frac{N_p l}{E_2 F}, \quad (3)$$

где

$$A = \frac{\sigma_I}{E_1} - \frac{\sigma_I}{E_2} - \quad (4)$$

упругопластическая характеристика материала.

Таким образом, при схематизации диаграммы растяжения двумя прямыми для определения удлинений (укорочений) стержней, работающих за пределами упругости, можно использовать формулу (3), предварительно подсчитав упругопластическую характеристику материала  $A$  (4).

Такая диаграмма обычно схематизируется в виде двух прямых. Эта диаграмма имеет два участка с различными модулями упругости. На первом участке (в пределах упругости) модуль упругости  $E = \operatorname{tg} \alpha_1$ , на втором участке (за пределами упругости) -  $E_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ .

При разгрузке (пассивное деформирование образца) процесс деформирования описывается прямой  $CD$ , параллельной первому участку диаграммы растяжения  $OA$ .

Таким образом, зависимости между напряжениями и деформациями при первичном нагружении и разгрузке не совпадают,

В результате этого при полной разгрузке в статически определенных системах появляется остаточные (пластические) деформации, а в статически неопределимых - остаточные напряжения. При повторном нагружении процесс деформирования идет по прямой  $CD$ , при этом возникающие напряжения в элементах конструкции будут складываться с остаточными напряжениями.

## 1.2. Определение удлинений (укорочений) стержней, работающих за пределами упругости

Для определения перемещений в стержнях, работающих за пределами упругости, используется схематизированная диаграмма растяжения (рис. 1).

Используя эту диаграмму, строим диаграмму зависимости между усилием в стержне и удлинением (характеристика стержня). По виду она похожа на диаграмму растяжения (рис. 2).

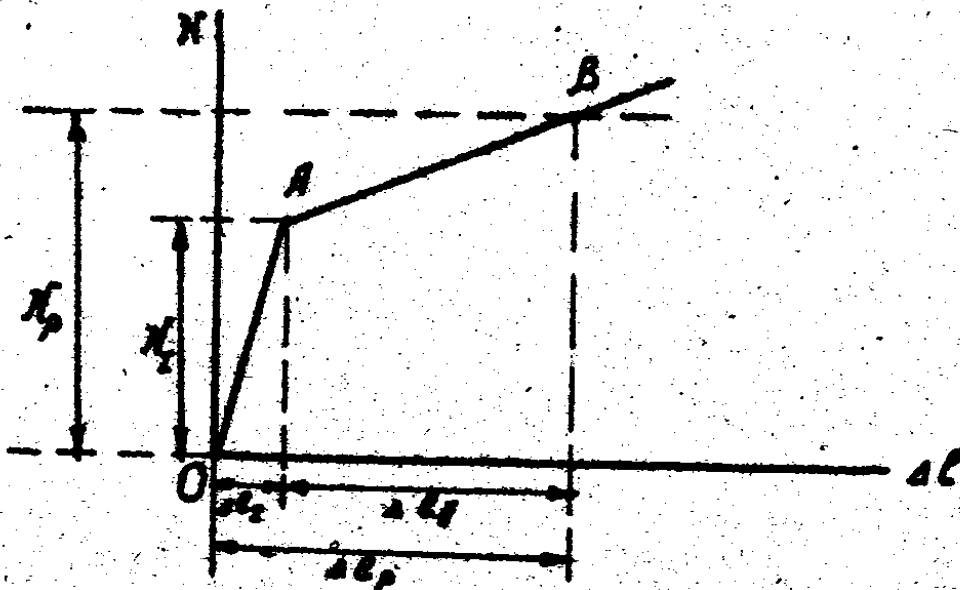


Рис. 2

определяют размеры поперечных сечений стержней. Допускаемое напряжение определяем как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_z}{K},$$

где  $\sigma_z$  - предел пропорциональности материала;

$K$  - коэффициент запаса, принимается при статическом нагружении равным 1,4 + 1,6.

При этом должно соблюдаться заданное соотношение между площадями поперечных сечений. Поэтому отдельные стержни в таких системах будут недогружены.

#### 1.4. Расчет статически неопределимых систем, работающих на растяжение-сжатие за пределами упругости

Цель расчета. Загрузив систему нагрузкой первичного нагружения за пределы упругости, определить усилия в стержнях. Разгрузить систему и определить остаточные усилия в стержнях. Загрузить систему рабочей нагрузкой (вторичное нагружение), равной заданной для расчета в пределах упругости. Определить усилия в стержнях с учетом остаточных усилий. Определить напряжения в стержнях и сравнить с результатом решения в пределах упругости. Сделать анализ изменения напряжений в результате предварительного пластического деформирования системы.

а). Для определения нагрузки первичного нагружения принять напряжения в наименее нагруженном стержне на 10% больше напряжения  $\sigma_z$  (см. диаграмму растяжения рис. 1), для этого использовать результаты расчета в пределах упругости.

Геометрические уравнения совместности перемещений в этом случае останутся такими же, как и при расчете в пределах упругости. Но при этом для получения дополнительных уравнений, связывающих усилия, удлинения (укорочения) стержней определяются по формуле (3)

$$\Delta l_i = \Delta l_i + \frac{N_i l_i}{E_2 F_i}$$

Полученные "преобразованные" уравнения совместности перемещений также решаются совместно с уравнениями статики, и определяются неизвестные усилия.

### 1.3. Расчет статически неопределимых систем, работающих на растяжение-сжатие в пределах упругости

Цель расчета: По известной внешней нагрузке, действующей на систему, требуется определить усилие в стержнях и подобрать размеры их поперечных сечений. Статически неопределимая система отличается от статически определимой тем, что число неизвестных усилий в ней превышает число уравнений статики, которые можно составить для данной системы. Степень статической неопределимости таких систем называется разницей между числом неизвестных и числом уравнений статики. Для определения неизвестных усилий в таких системах необходимо составлять дополнительные уравнения, которые называются уравнениями совместности перемещений. Для составления таких уравнений необходимо системе представить в деформированном виде и, исходя из геометрических соображений, установить связь между удлинениями (укорочениями) отдельных элементов конструкции (стержней). Полученные зависимости и будут уравнениями совместности перемещений, число их должно равняться степени статической неопределимости. В этих уравнениях удлинения (укорочения) стержней выражаются через усилия по закону Гука

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i}$$

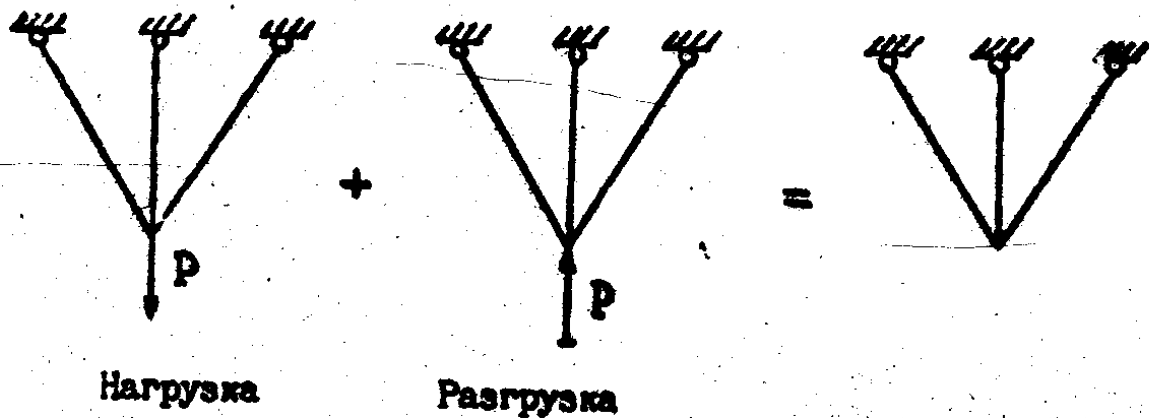
и такие, уже "преобразованные" уравнения решаются совместно с уравнениями статики, в результате чего определяются неизвестные усилия в стержнях. Усилия в стержнях необходимо определять в общем виде через  $P$  (внешнюю нагрузку), так как эти результаты потребуются в дальнейшем для расчета системы за пределами упругости.

Замечание. Для определения усилий в статически неопределимых системах необходимо знать (задавать) соотношение между площадями поперечных сечений (жесткостями) стержней. После определения усилий, используя условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma].$$



б). Для определения остаточных усилий при разгрузке считаем, что разгрузка - это нагружение с противоположным знаком. Следовательно, остаточные усилия в стержнях можно рассчитывать как алгебраическую сумму усилий, возникающих в результате последовательного приложения сил нагрузки и противоположных и равных им сил разгрузки (рис. 3).



Деформация при разгрузке идет упруго, т.е. на диаграмме растяжения разгрузка соответствует прямой, параллельной первому участку нагружения (рис. 1)  $OA$  с модулем упругости  $E_1$ .

Поэтому в процессе разгрузки будут возникать усилия, которые определяются расчетом в пределах упругости (усилия нужно брать с противоположным знаком). Полученные усилия при разгрузке необходимо сложить (алгебраически) с усилиями, полученными при нагружении, и определить остаточные усилия в стержнях.

в) При вторичном нагружении рабочей нагрузкой стержни будут работать в упругой стадии, и поэтому усилия определяются по результатам, полученным по расчетам в пределах упругости.

Для определения полных усилий необходимо к усилиям, определенным в результате решения задачи в пределах упругости, добавить остаточные усилия в стержнях, полученные в результате разгрузки системы. Определить напряжения в стержнях и сравнить их с результатами упругого решения. При этом необходимо сделать анализ, как изменились величины напряжений в стержнях в результате предварительного пластического деформирования статически неопределимой системы.

### ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной статически неопределимой стержневой конструкции (рис. 3) требуется:

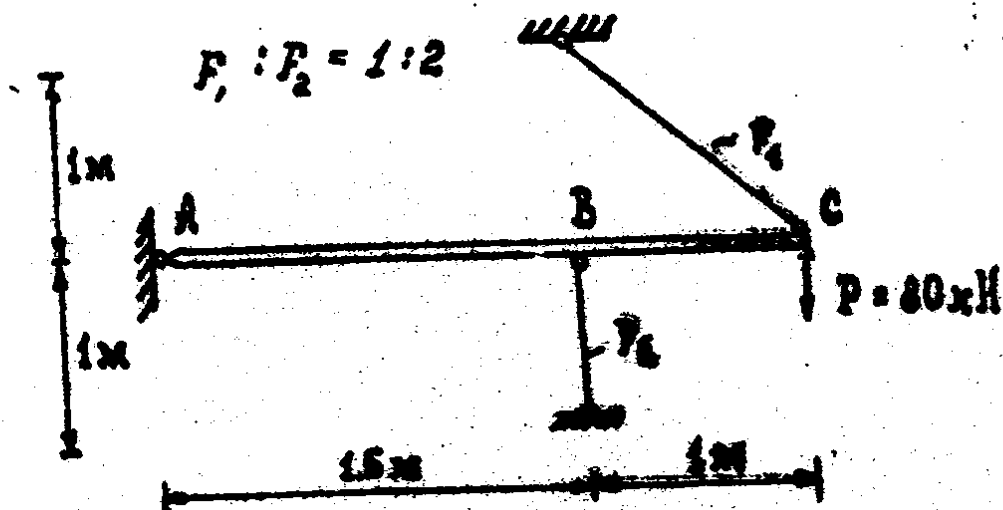


Рис. 3

1. Определить площади поперечных сечений стержней, считая, что конструкция работает в пределах упругости (первый участок диаграммы растяжения), если коэффициент запаса  $K = 1,5$ ;  $\sigma_z = 370 \text{ МПа}$ .

2. Определить нагрузку первого нагружения за предел упругости, если напряжение в наиболее нагруженном стержне на 10% больше  $\sigma_z$ .

3. Рассчитать характеристики системы, используя заданную схематическую диаграмму растяжения (рис. 4).

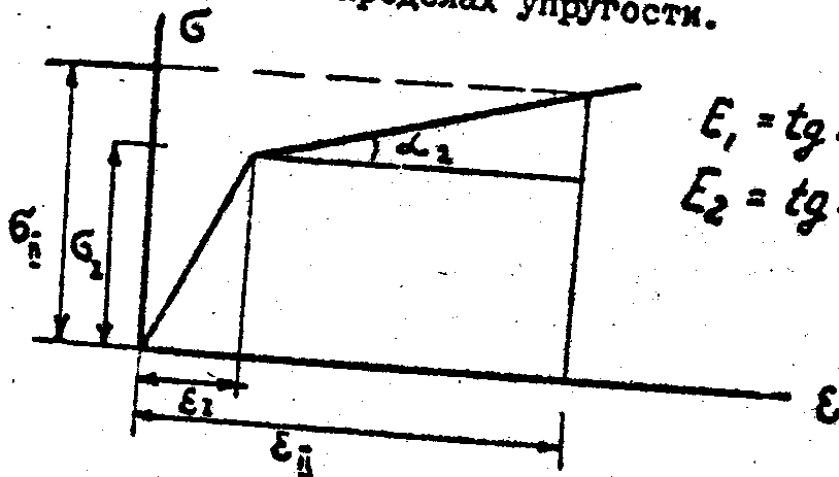
4. Определить усилия, возникающие в стержнях, работающих за пределом упругости.

5. Определить усилия, возникающие в стержнях при разгрузке.

6. Определить остаточные усилия в стержнях при разгрузке.

7. Определить усилия в стержнях при повторном нагружении, равном рабочему, и сравнить с величинами усилий, полученных

при решении задачи в пределах упругости.



$$E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$E_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,25 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Рис. 4

Так как данная система имеет четыре неизвестных  $R_1, R_2, N_1$  и  $N_2$ , а уравнений равновесия системы можно составить три, то данная система является один раз статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости следует составить еще одно уравнение - уравнение совместности перемещений. Покажем систему в деформированном состоянии, под действием нагрузки  $P$  (рис. 5).



Рис. 5

Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$ , следует, что

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$$

Если  $BB_1 = \Delta l_2$ , то  $CC_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}$ ,

где  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ .

запишем уравнение, связывающее  $\Delta l_1$  (удлинение стержня I) и  $\Delta l_2$  (укорочение стержня 2):

$$\frac{\Delta l_2}{1,5} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha \cdot 2,5};$$

откуда получим

$$2,5 \cdot 0,71 \Delta l_2 = 1,5 \Delta l_1,$$

или

$$1,775 \Delta l_2 = 1,5 \Delta l_1;$$

$$\Delta l_2 = 0,845 \Delta l_1.$$

Применив закон Гука, запишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{N_2 l_2}{E, F_2} = \frac{0,845 N_1 l_1}{E, F_1}.$$

Если  $l_2 = 1 \text{ м}$ ,  $l_1 = 1,41 \text{ м}$ ,  $F_2 = 2 F_1$ , то

$$\frac{N_2 \cdot 1}{E, 2 F_1} = \frac{0,845 N_1 \cdot 1,41}{E, F_1},$$

откуда

$$N_2 = 2,37 N_1.$$

В результате получим систему двух уравнений, одно из которых - уравнение статики ( $\sum M = 0$ ), а другое - совместности перемещений:

$$\begin{cases} N_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha - P \cdot AC + N_2 \cdot AB = 0 \\ N_2 = 2,37 N_1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1,775 N_1 - 2,5 P + 1,5 N_2 = 0 \\ N_2 = 2,37 N_1. \end{cases}$$

Решив относительно этих уравнений, можно определить усилия  $N_1$  и  $N_2$ , действующие в стержнях:

$$1,775 N_1 - 2,5 P + 1,5 \cdot 2,37 N_1 = 0;$$

$$5,33 N_1 = 2,5 P.$$

$$N_1 = 0,469P = 37,5 \text{ кН};$$

$$N_2 = 0,469P \cdot 2,37 = 1,11P = 88,8 \text{ кН}.$$

Зная, что

$$[\sigma] = \frac{\sigma_z}{\kappa} = \frac{370}{1,5} = 247 \text{ МПа},$$

из условия прочности при растяжении (сжатии) определяем площади поперечных сечений стержней 1 и 2:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,469P}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2F_2} = \frac{1,11P}{2F_2} = \frac{0,555P}{F_2};$$

$$\sigma_2 > \sigma_1; \quad \sigma_2 = \sigma_{\max} = [\sigma];$$

$$\frac{0,555P}{F_2} = [\sigma];$$

$$F_1 = \frac{0,555P}{[\sigma]} = \frac{0,555 \cdot 88,8 \cdot 10^3}{247} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_2 = 2F_1 = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Следовательно, если конструкция работает в пределах упругости, то размеры площади сечений стержней должны быть

$$\begin{cases} F_1 = 1,8 \text{ см}^2 \\ F_2 = 3,6 \text{ см}^2 \end{cases}$$

Приняв напряжения в наименее нагруженном стержне равным  $1,1\sigma_1$ , определяем нагрузку первичного нагружения за пределом упругости.

По результатам расчета в пределах упругости устанавливаем,

что напряжение в наименее нагруженном стержне равно

$$\sigma_1 = \frac{0,469 P_I}{F_1},$$

тогда

$$1,1 \sigma_1 = \frac{0,469 P_I}{F_1}.$$

Отсюда определяем нагрузку первичного нагружения

$$P_I = \frac{1,1 \sigma_1 \cdot F_1}{0,469} = \frac{1,1 \cdot 370 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4}}{0,469} = 157,7 \text{ кН}.$$

Определяем упругопластическую характеристику материала

$$A = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{370}{2 \cdot 10^5} - \frac{370}{0,25 \cdot 10^5} = -12,95 \cdot 10^{-3}$$

Для определения продольных усилий  $N_1^T$  и  $N_2^T$  решаем систему уравнений статики и совместности перемещений

$$\begin{cases} 1,775 N_1^T - 2,5 P_I + 1,5 N_2^T = 0 \\ \Delta l_2 = 0,845 \Delta l_1 \end{cases}$$

где  $P_I = 157,7 \text{ кН}$ ,

$\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  - удлинения (укорочения) стержней, работающих за пределами упругости, которые определяются по формуле

$$\Delta l_i = A l_i + \frac{N_i^T \cdot l_i}{E_2 F_i}.$$

Следовательно,

$$-12,95 \cdot 10^{-3} \cdot 1,41 + \frac{N_1^T \cdot 1,41}{0,25 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4}} =$$

$$-10^{-3} + 3,13 \cdot 10^{-7} N_1^T;$$

$$\Delta l_2 = -1295 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + \frac{N_2^T \cdot 1}{0,25 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= -12,95 \cdot 10^{-3} + 1,11 \cdot 10^{-7} \cdot N_2^T.$$

Уравнение совместности перемещений запишем в следующем виде:

$$-18,26 \cdot 10^{-3} + 313 \cdot 10^{-7} N_2^T = 0,845 (-12,95 \cdot 10^{-3} + 1,11 \cdot 10^{-7} N_2^T) - 0.$$

Сделав соответствующие вычисления, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1,775 N_1^T - 2,5 \cdot 15,77 \cdot 10^4 + 1,5 N_2^T = 0 \\ N_2^T = 2,38 N_1^T - 2,23 \cdot 10^4 \end{cases}$$

$$1,775 N_1^T - 39,425 \cdot 10^4 - 1,5(2,38 N_1^T - 2,23 \cdot 10^4) = 0.$$

$$5,345 N_1^T = 42,77 \cdot 10^4$$

$$N_1^T = 80 \text{ кН}$$

$$N_2^T = 2,38 \cdot 80 - 2,23 \cdot 10^4 = 168 \text{ кН}$$

Усилия, возникающие в процессе разгрузки, определяются расчетом в пределах упругости

$$N_1^T = 0,469 P; \quad N_2^T = 1,1 P,$$

где  $P = P_T$ , следовательно,

$$\begin{cases} N_1(\text{разгр}) = -0,469 P_T = -73,36 \text{ кН} \\ N_2(\text{разгр}) = -1,1 P_T = -173,47 \text{ кН} \end{cases}$$

Определим остаточные усилия после снятия нагрузки как алгебраическую сумму усилий, возникающих в результате последовательного приложения сил нагрузки и противоположных и равных им сил разгрузки

$$\Delta N_1 = N_1^T + N_1(\text{разгр}) = 80 - 73,36 = 6,64 \text{ кН};$$

$$\Delta N_2 = N_2^T + N_2(\text{разгр}) = 168 - 173,47 = -5,47 \text{ кН}.$$

При повторном нагружении, равном рабочему, усилия в стержнях получим следующие:

$$N_1' = N_1 + \Delta N_1 = 37,5 + 6,64 = 44,14 \text{ кН};$$

$$N_2' = N_2 + \Delta N_2 = 88,8 - 5,47 = 83,33 \text{ кН}.$$

Следовательно, в результате расчета получили, что усилия в стержнях при повторном нагружении изменились: в первом стержне (наименее нагруженном) увеличились, во втором (наиболее нагруженном) уменьшились. А это значит, что соответственно изменились и напряжения, возникающие в стержнях. Если в пределах упругости

$$\sigma_1 = \frac{37,5}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{88,8}{2F_2} = \frac{44,4}{F_2},$$

то при повторном нагружении

$$\sigma_1' = \frac{44,14}{F_1}; \quad \sigma_2' = \frac{83,33}{2F_2} = \frac{41,665}{F_2}.$$

Таким образом, первичное нагружение за пределы упругости можно использовать для регулирования напряжений в стержнях статически неопределимых систем.

#### Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
I.1. Схематизация диаграммы растяжения.....	3
I.2. Определение удлинений (укорочений) стержней, работающих за пределами упругости.....	5
I.3. Расчет статически неопределимых систем, работающих на растяжение-сжатие в пределах упругости.....	6
I.4. Расчет статически неопределимых систем, работающих на растяжение-сжатие за пределами упругости.....	7
ПРИМЕР РАСЧЕТА.....	9



**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ  
(СЖАТИИ) ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЭЛАСТИЧНОСТИ**

**Методические указания по сопротивлению материалов  
для студентов механических специальностей дневного  
и заочного обучения**

**Александр Иванович Павлов  
Галина Ивановна Романова**

**Редактор И.С. Павлова  
Технический редактор С.А. Сидельникова**

**Подписано в печать 07.05.84. Формат 60x84 1/16.  
Бумага писчая. Объем 100 л. Уд.-мат. д. 0,2.  
Усл. печ. л. 0,83. Тираж 500 экз. Цена 700 копеек.**

**Кабаровский политехнический институт, 680025, Кабаровск,  
ул. Тимонина, 136.**

**Фотофотонная лаборатория Кабаровского политехнического  
института, 680025, Кабаровск, ул. Тимонина, 136.**