

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные методические указания включают в себя технологию выполнения студентами учебно-исследовательской работы на аудиторных занятиях по сопротивлению материалов. Лабораторные работы "Определение перемещений в балке по формуле Мора" и "Определение реакции лишней связи в статически неопределимой балке" посвящены исследованию закономерностей сопротивления статически определимых и статически неопределимых балок при прямом изгибе. На практических занятиях "Расчет толстостенных цилиндров и труб" и "Расчет составных цилиндров и труб. Контактная задача теории упругости" численными методами исследуются особенности напряженного состояния в трубах, находящихся под внутренним и внешним давлением. Рассматривается только упругое состояние материала.

Технология основана на организации коллективного метода выполнения учебно-исследовательской работы. Как правило, в поставленной задаче варьируется один из параметров, входящих в изучаемые формулы сопротивления материалов. Студенческую группу делят на подгруппы по 2-3 человека; каждая из подгрупп выполняет расчет для одного отдельного значения варьируемого параметра. Результаты сводят в таблицу, затем анализируют всю совокупность численных значений.

Параллельное выполнение типовых расчетов позволяет легко проконтролировать правильность выполнения алгебраических и арифметических операций и преобразований, а также выявить ошибки сравнением результатов промежуточных расчетов, полученных другими подгруппами студентов для ближайших значений варьируемого параметра "справа" и "слева".

Сведение воедино совокупности расчетных и опытных данных позволяет:

- получить дополнительные сведения об изучаемом объекте;
- выполнить статистический анализ и сделать вывод о применимости методов и гипотез, справедливости принципов и теорем, используемых в сопротивлении материалов.

При защите лабораторной работы каждая подгруппа выполняет отдельный отчет, в который включены: название; цель; общая постановка задачи; подробное пояснение той части работы, которую выполняла данная подгруппа; общие таблицы расчетных и экспериментальных значений; графики; общие выводы. При этом в таблицы сводных значений не включают заведомо неверные результаты; колонки значений в сводных таблицах, которые заполняет данная подгруппа, желательно выделить. Для подготовки к защите в данных методических указаниях составлен примерный перечень контрольных вопросов по каждой теме.

# 1. Лабораторная работа: "ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ ПО ФОРМУЛЕ МОРА"

## 1.1. Обсуждение основных формул

Метод определения перемещений по формуле О. Мора (1874) является энергетическим методом, универсальным для линейных стержневых систем. Может быть применен для определения углового или линейного перемещения сечений балки, выполненной из упругого материала.

Изучаемый объект (рис. 1.1) представляет собой балку постоянного сечения по всей длине  $l$ , установленную на шарнирные опоры и нагруженную в сечении  $j$  сосредоточенной силой  $P$ .

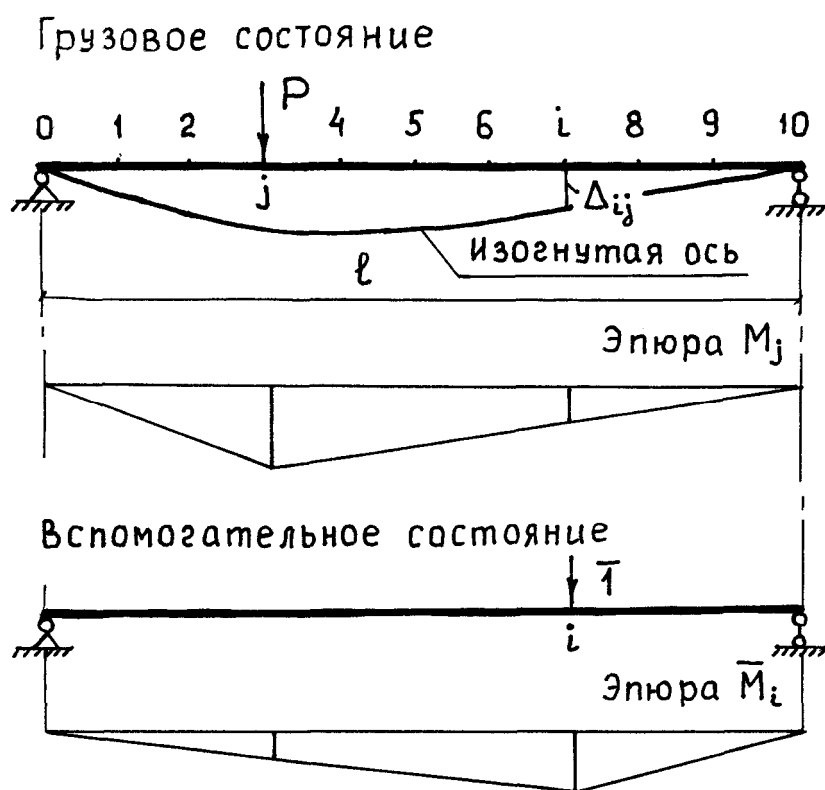


Рис. 1.1

Для рассматриваемого объекта формула Мора для вычисления прогиба любого сечения ( $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ ), если пренебречь влиянием поперечных сил, представляет собой интеграл определенного вида:

$$\Delta_{ij} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\bar{M}_i M_j}{EI_x} dz.$$

В формуле Мора:  $\bar{M}_i$  - функция изгибающего момента относительно поперечной оси  $x$  от единичной силы вспомогательного состояния;  $M_j$  - функция изгибающего момента относительно поперечной оси  $x$  от внешней нагрузки;  $k$

- количество участков, на которые делят схемы грузового и единичного состояния для выполнения расчета;  $l_k$  - длина отдельного участка;  $E$  - модуль упругости материала;  $I_x$  - момент инерции поперечного сечения.

Интеграл Мора может быть вычислен как аналитически, так и численным методом. Большое распространение в инженерной практике получили формула Симпсона и правило Верещагина.

Положительное число, полученное в результате вычисления интеграла Мора, означает, что реальное направление прогиба совпадает с направлением вектора обобщенной силы, а отрицательное – что прогиб сечения противоположен направлению единичного вектора. Линейные перемещения сечений балки, совпадающие с опорами, равны нулю, в то время как угловые перемещения могут быть любыми (см. рис. 1.1) – важное обстоятельство, которое будет использовано в следующей лабораторной работе при исследовании статически неопределимой балки.

Особенности:

- 1) схема вспомогательного единичного состояния метода Мора представляет собой балку, нагруженную обобщенной силой по направлению искомого перемещения;
- 2)  $k$  - минимальное число участков, на которые делят схемы грузового и вспомогательного единичного состояния;
- 3) в формуле Мора  $\bar{M}_i$  и  $M_j$  - это функции одной и той же координаты произвольного сечения, составленные с одним и тем же правилом знаков.

При линейно упругом деформировании балки все перемещения будут пропорциональны силе  $P$ , вызывающей эти перемещения:

$$\Delta_{ij} = P \delta_{ij}; \quad \delta_{ij} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI_x} dz,$$

где  $\bar{M}_j$  - изгибающий момент от единичной внешней силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной к сечению  $j$ .

Если сила  $P$  будет приложена к сечению  $i$  (рис. 1.2), то тогда формула Мора для прогиба сечения  $j$  будет иметь вид

$$\Delta_{ji} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\bar{M}_j M_i}{EI_x} dz,$$

где  $\bar{M}_j$  - изгибающий момент от обобщенной единичной силы вспомогательного состояния;  $M_i$  - изгибающий момент от внешней нагрузки.

Согласно закону Гука перемещение  $\Delta_{ji}$  также пропорционально силе  $P$ :

$$\Delta_{ji} = P \delta_{ji}; \quad \delta_{ji} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI_x} dz,$$

где  $\bar{M}_i$  - изгибающий момент от единичной внешней силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной к сечению  $i$ .

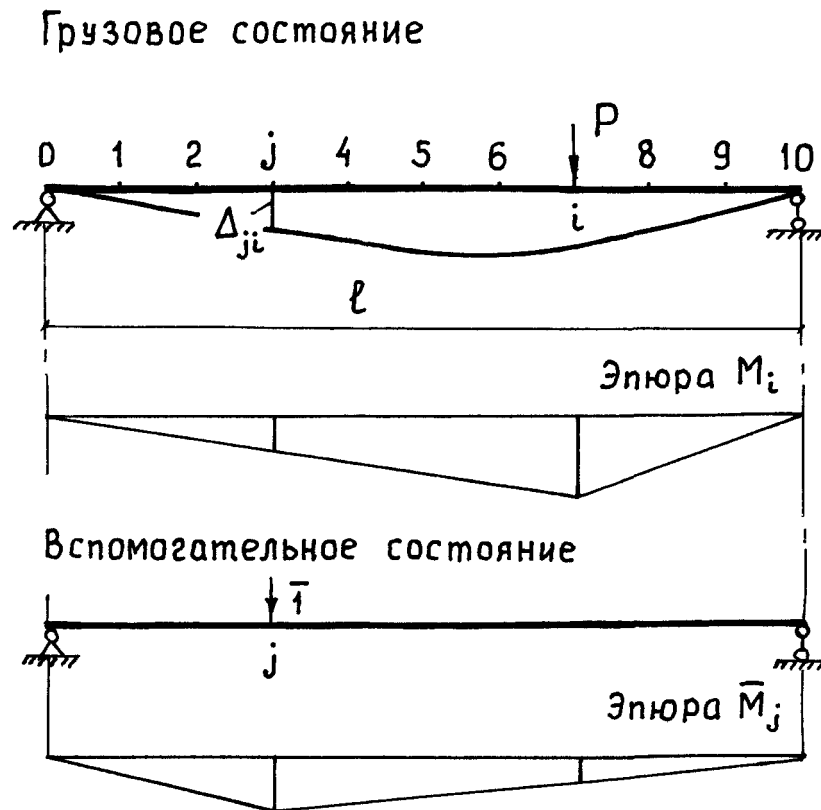


Рис. 1.2

Поскольку полученные интегральные выражения одинаковые, то

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Эта зависимость аналитически выражает теорему Д. К. Максвелла (1864) о взаимности перемещений.

## 1.2. Постановка цели и задач исследования

Цель: Опытная проверка применимости формулы Мора для определения перемещений при изгибе и справедливости теоремы Максвелла о равенстве взаимных перемещений.

Для проверки применимости формулы Мора необходимо вычислить перемещения нескольких сечений балки при неизменном положении груза  $P$  в сечении  $j$ , замерить соответствующие перемещения на опытной установке и сравнить полученные совокупности расчетных и экспериментальных значений. Каждая из этих совокупностей дискретных значений образует график изогнутой оси бруса.

Для проверки теоремы Максвелла о взаимности перемещений необходимо вычислить ряд значений прогибов одного и того же сечения  $j$  при перемещении груза вдоль оси бруса для отдельных конкретных положений его на этой оси. Измерить соответствующие прогибы на опытной установке и сравнить полученные совокупности расчетных и экспериментальных значений. Каждая из этих совокупностей отражает влияние положения груза  $P$  на величину перемещения сечения  $j$ . Затем сравнить отдельно ординаты графиков изогнутой оси и линии влияния.

Таким образом, необходимо решить две задачи.

Задача 1: построение изогнутой оси бруса от силы  $P$ , приложенной в сечении  $j$ .

Задача 2: построение линии влияния положения груза на прогиб сечения  $j$ .

### 1.3. Постановка опыта

Установка для выполнения лабораторных опытов (рис. 1.3) представляет собой балку в виде стальной линейки 1 длиной 1 м, прямоугольного сечения 38х6 мм, закрепленной с обоих концов. Опорные узлы 2 представляют собой конструкции подшипников скольжения, корпуса которых жестко закреплены на массивной плите 3. На стальной линейке 1 рисками нанесены деления через каждые 10 см. Нагрузку опытной балки осуществляют с помощью набора грузов  $P$ , устанавливаемых на подвеску 4. Варьируя величиной силы  $P$  и положением подвески 4, можно создавать различные величины прогибов.

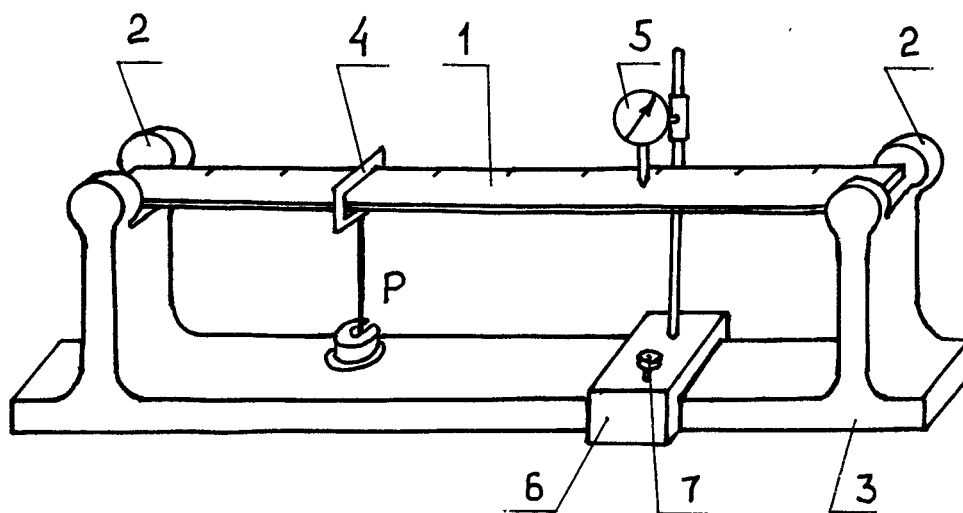


Рис. 1.3

Прогибы сечений, обозначенных рисками, измеряют индикатором часового типа 5, закрепленным на штативе 6. Корпус штатива 6 перемещается вдоль станины 3 как вдоль направляющей. Для снижения погрешности измерения от за-

зора в паре скольжения 6-3 корпус штатива притягивают стопорным винтом 7 после установки индикатора 5 к нужному сечению.

Для построения опытной кривой изогнутой оси подвес 4 помещают в сечение  $j$  бруса. Балку нагружают грузами. Производят замер перемещения сечений  $i = 1, 2, 3, \dots, 9$  бруса, для каждого замера перемещая штатив 6 индикатора 5 вдоль направляющей станины 3. По замеренным дискретным значениям  $\Delta_{ij}$  строят график изогнутой оси.

Для построения линии влияния положения груза на прогиб сечения  $j$  балки замер перемещений выполняют при неизменном положении штатива индикатора в сечении  $j$ , а подвес 4 перемещают вдоль балки 1, совмещая с рисками сечений  $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ . Балку нагружают. По замеренным дискретным значениям строят линию влияния.

## 1.4. Порядок выполнения лабораторной работы

### 1.4.1. Построение изогнутой оси

Величина силы  $P$  и номер сечения  $j$ , к которому приложена сила, задается преподавателем. Таким образом, конкретизируется заданное грузовое состояние балки. Группа делится на подгруппы; каждая подгруппа выполняет расчет для одного из номеров сечений балки  $i = 1, 2, 3, \dots, 9$  (номер определяет преподаватель).

1.4.1.1. Для заданной расчетной схемы грузового состояния построить эпюру изгибающих моментов  $M_j$ . Эта часть вычислительной работы – общая для всей группы. Дальнейшая работа индивидуально выполняется каждой подгруппой.

1.4.1.2. Составить схему вспомогательного единичного состояния и построить для него эпюру  $\bar{M}_i$ .

1.4.1.3. Вычислить перемещение  $\Delta_{ij}^{расч}$  по формуле Мора численным методом, используя формулу Симпсона или прием Верещагина. Для этого следует выделить одинаковые участки на эпюрах грузового и единичного состояний (как правило, таких участков для вычисления интеграла  $k = 3$ ) и вычислить значения дополнительных граничных ординат.

Вычисленное значение занести в табл. 1.1.

Проверить соответствие расчетного значения всей совокупности значений, внесенных в одну строку. Если расчетное значение не отвечает единой плавной функциональной зависимости, то подгруппе, выполнявшей этот расчет следует сверить все промежуточные результаты вычислений с соответствующими численными значениями, полученными студенческими подгруппами для смежных сечений.

Таблица 1.1. Ординаты изогнутой оси бруса

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta_{ij}^{расч}$ , мм	0										0
$\Delta_{ij}^{эксп}$ , мм	0										0
$\delta_i$ , %	-										-

1.4.1.4. Измерить на опытной установке перемещение того же сечения, для которого выше был выполнен расчет. Для этого: подвеску 4 поместить в сечение  $j$ ; штатив 6 индикатора 5 подвести к сечению  $i$  и закрепить стопорным винтом 7; установить шкалу индикатора, совместив нулевое значение со стрелкой; приложить груз  $P$  в виде набора тарированных стандартных грузов; замерить перемещение по шкале (цена деления указана на шкале).

Полученное экспериментальное значение  $\Delta_{ij}^{эксп}$  занести в табл. 1.1. Проверить соответствие результата замера всей совокупности опытных значений, внесенных в одну строку.

1.4.1.5. Вычислить погрешность – процент расхождения между расчетным и опытным значением перемещения сечения  $i$ :

$$\delta_i = \frac{\Delta_{ij}^{расч} - \Delta_{ij}^{эксп}}{\Delta_{ij}^{расч}} 100\% .$$

Результат занести в табл. 1.1.

#### 1.4.2. Построение линии влияния.

Для всей группы номер  $j$  и величина внешней силы  $P$  остаются такими же, как и в первой задаче. Номер для каждой подгруппы также остается прежним.

1.4.2.1. Показать вспомогательное состояние метода Мора для определения перемещения сечения  $j$  и построить эпюру  $\bar{M}_j$ . Эта часть работы – общая для всей группы; последующая – индивидуальная.

1.4.2.2. Составить расчетную схему грузового состояния. Она представляет собой двухопорную балку с сосредоточенной силой  $P$ , приложенной к сечению  $i$ . Построить для нее эпюру изгибающих моментов  $M_i$ .

1.4.2.3. Вычислить перемещение  $\Delta_{ji}^{расч}$  по формуле Мора численным методом, аналогичным вычислению перемещения в предыдущей задаче. Результат расчета должен повторить результат предыдущей задачи. При несовпадении найти ошибку, поэтапно проанализировав промежуточные операции двух расчетов.

Полученное значение занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Ординаты линии влияния

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta_{ji}^{расч}$ , мм	0										0
$\Delta_{ji}^{эксп}$ , мм	0										0
$\delta_i$ , %	-										-

1.4.2.4. Измерить на опытной установке перемещение сечения  $j$  при нагружении балки силой в сечении  $i$ . Для этого: индикатор 5 установить в сечении  $j$ , а подвес 4 в сечении  $i$ ; выставить нулевое значение на шкале индикатора поворотом лимба; приложить грузы; снять показания со шкалы микрометра. Показание должно с небольшой погрешностью повторить измерение в предыдущей задаче. При несовпадении опыт повторить.

Измеренное значение  $\Delta_{ji}^{эксп}$  записать в табл. 1.2.

1.4.2.5. Вычислить погрешность – процент расхождения между расчетным и опытным значением перемещения сечения  $j$ :

$$\delta_i = \frac{\Delta_{ji}^{расч} - \Delta_{ji}^{эксп}}{\Delta_{ji}^{расч}} 100\% .$$

При правильном выполнении работы величины погрешностей, полученные при решении двух задач, будут одинаковыми.

Результат занести в табл. 1.2.

## 1.5. Анализ результатов

1.5.1. Построить графики изогнутой оси бруса по расчетным и экспериментальным данным табл. 1.1. Проанализировать графики и сделать вывод о применимости формулы Мора.

Если линии графиков много раз пересекаются и погрешности  $\delta_i$  принимают разные значения по величине и знаку, то ошибки опытов и расчетов имеют случайный характер. По средней величине погрешности можно судить о точности метода.

Если линии графиков не пересекаются (заведомо неверные результаты при этом следует отбросить) и погрешности  $\delta_i$  по величине и знаку одинаковые, то в таком случае ошибки имеют систематический характер и следует выявить возможные причины.

Во-первых, неучет влияния поперечной силы в формуле Мора может привести к небольшому снижению расчетных значений.

Во-вторых, следует обратить внимание на конструкцию опор, насколько они обеспечивают идеальное шарнирное опирание и соответствие расчетной схеме: отсутствие линейных перемещений и свободный поворот относительно оси  $x$ . Как правило, на больших контактных поверхностях в узлах трения при



плохой смазке и низкой температуре создаются дополнительные усилия, уменьшающие угол поворота и, следовательно, систематически снижающие экспериментальные значения прогибов.

В-третьих, погрешность опытных значений может создавать и измерительное устройство, так как при каждом измерении осуществляется его переустановка. Кроме того, в нем также имеется пара трения. Поэтому погрешность измерения может иметь как случайный, так и систематический характер.

1.5.2. Построить линии влияния положения груза на прогиб сечения по расчетным и опытным значениям.

Проанализировать отдельно значения одинаковых строк двух таблиц:  $\Delta_{ij}^{расч} - \Delta_{ji}^{расч}$  ;  $\Delta_{ij}^{эксп} - \Delta_{ji}^{эксп}$  . Сделать вывод о взаимности перемещений.

При равенстве совокупностей значений перемещений по строкам и при одинаковых совокупностях  $\delta_i$  теорему Максвелла можно считать доказанной опытным путем.

## 1.6. Контрольные вопросы

1. Укажите цель лабораторной работы.
2. Какие задачи решались в лабораторной работе?
3. Какие перемещения совершают сечения при изгибе балки?
4. Что называют прогибом?
5. Какое перемещение можно определить по формуле Мора?
6. Что означают индексы в обозначении перемещения?
7. Каков порядок определения перемещения при использовании формулы Мора?
8. Как выбирают вспомогательное состояние?
9. Как вычисляют интеграл Мора?
10. Каким численным приемом можно воспользоваться для вычисления интеграла Мора?
11. Как строят график изогнутой оси бруса?
12. Сформулируйте теорему Максвелла.
13. Какие выводы сделаны в результате выполнения лабораторной работы?

## 2. Лабораторная работа: "ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ "ЛИШНЕЙ" СВЯЗИ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКЕ

### 2.1. Обсуждение основных формул

Объектом лабораторного исследования является балка с тремя симметрично расположенными опорами, нагруженная сосредоточенной силой  $P$  (рис. 2.1).



Рис. 2.1

Одним из методов раскрытия статической неопределенности, то есть определения реакций "лишних" связей, является метод сил. Если для исследуемого объекта реакцию средней "лишней" опоры обозначить  $X_1$ , то каноническим уравнением, которое позволит вычислить это неизвестное, будет уравнение суммарного перемещения сечения 1 в эквивалентной системе (рис. 2.1):

$$\delta_{11} X_{1(i)} + \Delta_{1i} = 0,$$

где  $\delta_{11}$  - перемещение сечения 1 по направлению силы  $X_{1(i)}$  от силы  $\bar{X}_{1(i)} = \bar{1}$  (см. вспомогательное единичное состояние);  $\Delta_{1i}$  - перемещение сечения 1 от

внешней силы, приложенной в сечении  $i$  (см. грузовое состояние).

Коэффициенты канонического уравнения имеют смысл перемещений и могут быть найдены по формуле Мора:

$$\delta_{11} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} dz;$$

$$\Delta_{1i} = \sum_k \int_{l_k} \frac{\overline{M}_1 M_i}{EI_x} dz.$$

Таким образом, каноническое уравнение метода сил основано на двух гипотезах сопротивления материалов: принципе независимости действия сил (принцип суперпозиции) и гипотезе о пропорциональности перемещений силам, их вызывающим (закон Гука).

## 2.2. Постановка цели и задач исследования

**Цель:** проверка применимости метода сил для раскрытия статической неопределимости балки.

Проверку можно выполнить решением следующих задач.

1. Для балки простого вида (рис. 2.1) вычислить ряд значений  $X_{1(i)}^{расч}$  при различном положении внешней силы ( $i = 2, 3, 4, \dots, 10$ ). На опытной установке выполнить соответствующие измерения  $X_{1(i)}^{эксн}$ . Проанализировать полученные совокупности расчетных и экспериментальных значений, проверив равенство  $X_{1(i)}^{расч} = X_{1(i)}^{эксн}$ . Сделать вывод о применимости метода сил для балки простого типа.

Каждая совокупность дискретных значений составит линию влияния положения груза на величину реакции "лишней" связи.

2. Проверить справедливость принципа суперпозиции.

Для этого на опытной установке замерить величину реакции "лишней" связи  $X_{1(\Sigma)}^{эксн}$  при нагружении балки двумя силами  $P$  одновременно в двух сечениях, например, в  $i = 3$  и  $i = 10$  (рис. 2.2). Проверить, будет ли выполняться равенство  $X_{1(\Sigma)}^{эксн} = X_{1(i=3)}^{эксн} + X_{1(i=10)}^{эксн}$ .

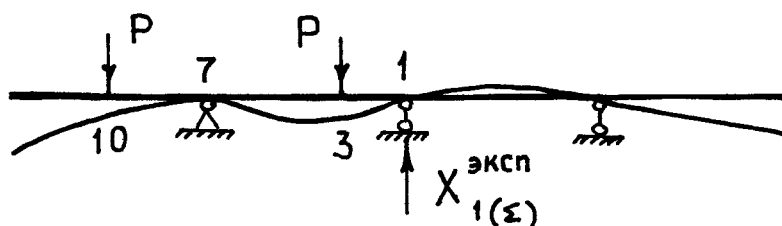


Рис. 2.2

3. Проверить справедливость закона пропорциональности.

Для этого выполнить измерение реакции "лишней" связи  $X_{1(n\Sigma)}^{эксн}$  на опытной установке, приложив к двум сечениям силы, одна из которых будет кратна силе  $P$ , например, так, как показано на рис. 2.3. Проверить, будет ли выполняться равенство  $X_{1(n\Sigma)}^{эксн} = X_{1(i=3)}^{эксн} + nX_{1(i=10)}^{эксн}$ .

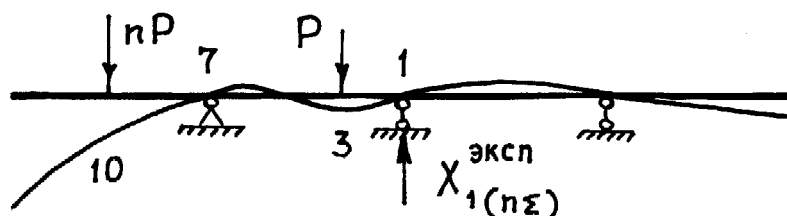


Рис. 2.3

При выполнении всех равенств с небольшими погрешностями (в пределах 1-2 процентов) сделать вывод о применимости метода сил для любой упругой балки при изгибе.

### 2.3. Постановка опыта

Установка напольного типа для выполнения лабораторных опытов (рис. 2.4) представляет собой стальную полосу 1 прямоугольного сечения длиной 2,4 м, свободно лежащую на опорах 2. Конструктивно через жесткую раму они связаны с массивным основанием 3. При таком свободном опирании балки с малыми контактными поверхностями легко обеспечивается поворот опорных сечений балки относительно поперечной оси; опирание соответствует идеальному шарнирному. Расстояние между опорами 1,2 м. На поверхности стальной полосы нанесены деления через каждые 10 см.

Нагружение опытной балки осуществляют с помощью набора грузов, устанавливаемых на подвесе 4. Подвес 4 можно поместить в любое сечение балки, как на консольном участке, так и в пролете.

Посередине пролета установлен микрометр часового типа 7, который обеспечивает измерение перемещения среднего сечения балки.

В среднем сечении балки установлен подвес 5 с емкостью 6, в которую при выполнении опыта засыпают груз (дробь).

Таким образом, стальная полоса является статически определимой балкой – физической моделью эквивалентной системы с рис. 2.1.

Опыт проводят следующим образом.

2.3.1. Устанавливают подвес 4 в заданное сечение  $i$ , подвес 5 – в среднее сечение балки 1. Выставляют нулевое положение шкалы индикатора 7 поворотом ее до совмещения со стрелкой.

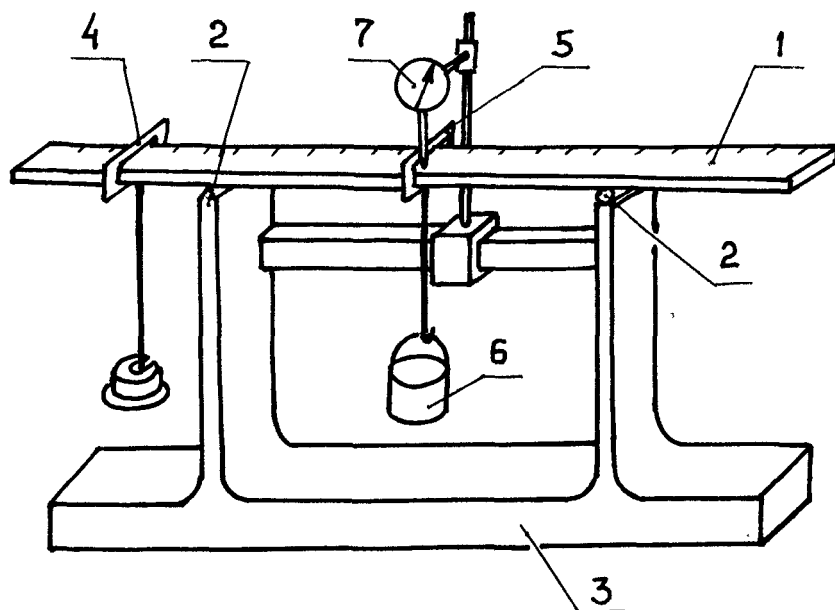


Рис. 2.4

2.3.2. На подвес 4 устанавливают груз  $P$  и измеряют прогиб среднего сечения  $\Delta_{1i}^{эксп}$ .

2.3.3. Если среднее сечение балки переместилось вниз (см. рис. 2.1), то груз снимают. Затем на подвес 5 закрепляют емкость 6 и насыпают дробь в количестве, которое создаст точно такой же прогиб, как измеренный в п. 2.3.2. Емкость 6 снимают и взвешивают на весах. Вес емкости с дробью численно будет равен  $X_{1(i)}^{эксп}$ . Это значение заносят в таблицу опытных данных с положительным значением.

Если среднее сечение балки от груза  $P$  переместится вверх (такое будет для  $i = 8, 9, 10, 11$ ), то в этом случае к подвесу 5 крепят емкость 6 и насыпают дробь в таком количестве, чтобы стрелка индикатора 7 вернулась в первоначальное нулевое положение. Емкость с дробью снимают и взвешивают на весах. Этот вес численно будет равен  $X_{1(i)}^{эксп}$ . Значение заносят в таблицу с отрицательным знаком, так как в опыте сила тяжести емкости 6 с грузом направлена вниз, а на расчетной схеме эквивалентного состояния (см. рис. 2.1) реакция "лишней" связи направлена вверх.

## 2.4. Порядок выполнения лабораторной работы

Величину силы  $P$  задает преподаватель. Каждой подгруппе студентов преподаватель указывает номер сечения  $i$ , к которому будет приложена сила  $P$ .

2.4.1. Составить расчетные схемы заданного, эквивалентного грузового и вспомогательного единичного состояния. Записать каноническое уравнение метода сил.

2.4.2. Построить эпюру  $\bar{M}_1$  и вычислить коэффициент  $\delta_{11}$ . Эта часть работы – общая для всей группы. Последующая работа – индивидуальная.

2.4.3. Построить эпюру  $M_i$  и вычислить грузовой коэффициент  $\Delta_{1i}$ .

2.4.4. Решить каноническое уравнение, вычислив  $X_{1(i)}^{расч}$ .

2.4.5. Выполнить деформационную проверку, построив эпюру изгибающих моментов для эквивалентного состояния  $M_\vartheta$  (см. рис. 2.1):

$$\sum_k \int_{l_k} \frac{\bar{M}_1 M_\vartheta}{EI} dz = 0.$$

При условии выполнения проверки полученное значение реакции "лишней" связи записать в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Ординаты линии влияния

$i$	1	2	3	4	5	6	7	9	11	13
$X_{1(i)}^{расч}$ , Н							0			
$X_{1(i)}^{эксп}$ , Н							0			
$\delta$ , %	-						-			

По мере заполнения табл. 2.1 проверить соответствие полученного расчетного значения всей совокупности значений, внесенных в одну строку. Если значение не отвечает единой плавной функциональной зависимости, то проверить результаты вычислений на всех этапах расчета, сверив их с соответствующими численными значениями, которые получены в других подгруппах для "смежных" значений реакций табл. 2.1.

2.4.6. Измерить значение  $X_{1(i)}^{эксп}$  на опытной установке, выполнив действия по алгоритму 2.3.1.-2.3.3.

2.4.7. Вычислить погрешность – процент расхождения между расчетным и опытным значением:

$$\delta_{(i)} = \frac{X_{1(i)}^{расч} - X_{1(i)}^{эксп}}{X_{1(i)}^{расч}} 100\% .$$

При правильном выполнении лабораторной работы расхождение, как правило, не превышает 2 процентов.

Последующие испытания являются общими для всей группы.

2.4.8. Выполнить измерение  $X_{1(\Sigma)}^{эксп}$  на экспериментальной установке, приложив к балке грузы в двух сечениях, например (см. рис. 2.2) в сечениях 3 и 10 (номера сечений могут быть заданы преподавателем произвольно). В этом случае это будет значение  $X_{1(3,10)}^{эксп}$ .

2.4.9. Выполнить измерение  $X_{1(3,n10)}^{эксп}$  на опытной установке, приложив к одному сечению груз  $P$ , а ко второму кратный груз  $nP$  (кратность задает преподаватель).

## 2.5. Анализ результатов

2.5.1. Построить линии влияния положения груза на величину реакции "лишней" связи, отложив в масштабе расчетные и экспериментальные значения.

Проанализировать величину и характер погрешности по совокупности значений  $\delta_{(i)}$  (случайная или систематическая, значительная или малая).

2.5.2. Проверить равенство

$$X_{1(3,10)}^{эксп} = X_{1(3)}^{эксп} + X_{1(10)}^{эксп}.$$

Сделать вывод о справедливости принципа суперпозиции.

2.5.3. Проверить равенство

$$X_{1(3,n10)}^{эксп} = X_{1(3)}^{эксп} + nX_{1(10)}^{эксп}.$$

Сделать вывод о применимости принципа пропорциональности.

2.5.4. На основании результатов всех проверок сделать общий вывод о применимости метода сил для расчета статически неопределимых балок.

## 2.6. Контрольные вопросы

1. Укажите цель лабораторной работы.
2. Какую систему называют статически неопределимой?
3. Какой смысл имеет каноническое уравнение метода сил?
4. Какой смысл имеют коэффициенты канонического уравнения?
5. Какие задачи решены в лабораторной работе?
6. Каким способом вычисляли коэффициенты канонического уравнения?
7. В чем смысл деформационной проверки?
8. Как опытным путем определяют перемещения?
9. Для какой цели служат тензометры?
10. Как устроен индикатор часового типа?
11. Какое перемещение называют упругим?
12. Как построена линия влияния?
13. Как, используя линию влияния, определить реакцию "лишней" связи от совокупности сосредоточенных сил?
14. Какие выводы сделаны в результате выполнения лабораторной работы?

### 3. Практическое занятие: "РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ И ТРУБ"

#### 3.1. Обсуждение основных формул

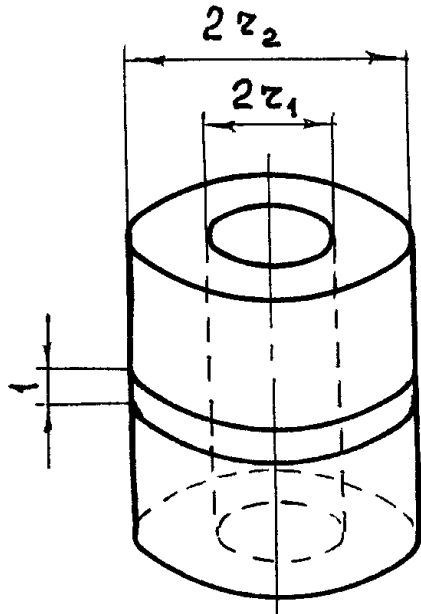


Рис. 3.1

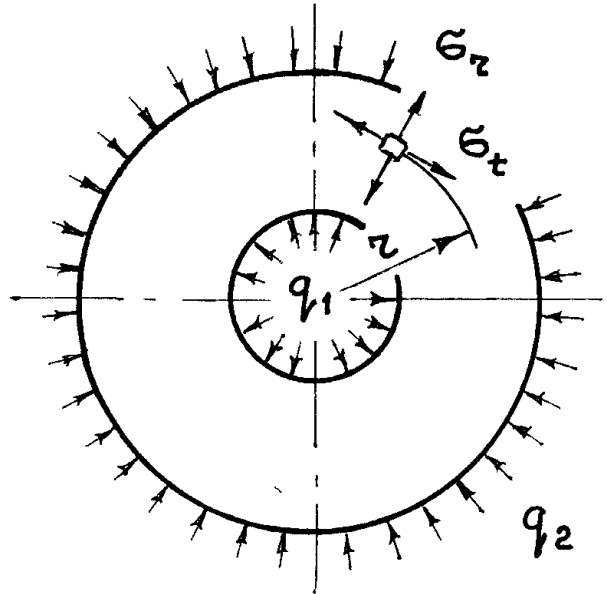


Рис. 3.2

Если на достаточном удалении от дна цилиндра или торцов трубы, где не обнаруживается влияние этих дна и торцов, двумя параллельными поперечными сечениями выделить объект единичной длины (рис. 3.1), то для такого объекта, расчетная схема которого показана на рис. 3.2, справедливы будут следующие зависимости:

$$\sigma_{r,t} = \frac{q_1 r_1^2 - q_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{r_1^2 r_2^2 (q_1 - q_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

В этих формулах:  $\sigma_{r,t}$  - соответственно радиальное ( $r$ ) и тангенциальное ( $t$ ) напряжение в точках поперечного сечения, расположенных на окружности радиуса  $r$ ;  $r_1$  и  $r_2$  - внутренний и наружный радиусы (габариты) объекта;  $q_1$  и  $q_2$  - равномерное по длине внутреннее и наружное давление.

Данные формулы для случая упругого состояния материала объекта выведены Г. Ламэ и опубликованы в 1852 г. Формулы применяются для расчетов: цилиндров пневмо- и гидроприводов; труб пневмо- и гидроприводов высокого давления; колец подшипников скольжения; стволов артиллерийских орудий.

Правило знаков: указанным направлениям векторов на расчетной схеме рис. 3.2 соответствуют положительные численные значения величин в формуле Ламэ.



### 3.2. Постановка цели и задач исследования

Согласно формуле Ламэ радиальные и окружные напряжения распределяются нелинейно по толщине стенки. Кроме того, сама величина напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  сложным образом зависит от внешнего давления  $q_1$  и  $q_2$ , габаритных размеров  $r_1$  и  $r_2$  и их соотношений:  $q_1/q_2$  и  $r_1/r_2$ . Очевидно, что при проектировании можно установить такой набор конструктивных параметров и внешних факторов, при которых прочность и экономичность конструкции будут оптимальными. Для этого следует установить характер и особенности влияния конструктивных параметров и внешних нагрузок на величину напряжений в опасных точках объекта.

**Цель.** Исследование влияния ряда параметров на прочность толстостенных цилиндров и труб.

**Задача 1.** Исследование влияния внешнего давления  $q_2$  на прочность, если известны: предел текучести материала  $\sigma_T$ ; габаритные размеры  $r_1$  и  $r_2$ ; внутреннее давление  $q_1$  (рис. 3.3).

В данном случае целесообразно рассматривать ряд дискретных значений  $q_2$  на интервале от  $q_2 = 0$  до  $q_2 = 2q_1$  с шагом, зависящим от числа подгрупп в учебной группе и удобства выполнения арифметических операций. Такой диапазон  $q_2$  позволяет графически легко установить экстремальный характер зависимости коэффициента запаса прочности.

**Задача 2.** Исследование влияния внешнего размера  $r_2$  на прочность, если известны: предел текучести материала  $\sigma_T$ ; давление внутреннее  $q_1$  и внешнее  $q_2$ ; внутренний размер  $r_1$  (рис. 3.4).

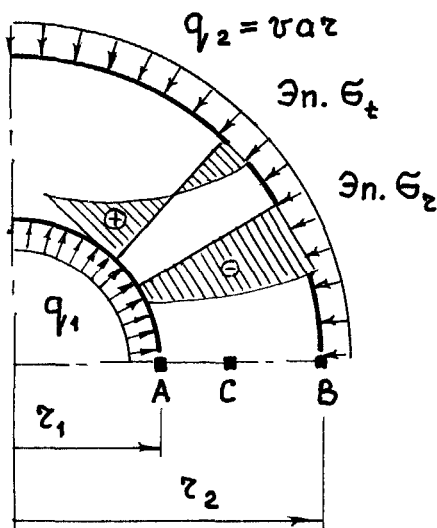


Рис. 3.3

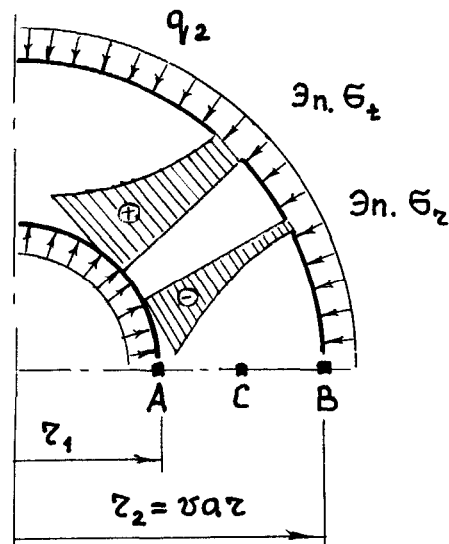


Рис. 3.4

При решении этой задачи целесообразно рассматривать ряд дискретных значений  $r_2$  на интервале от  $r_2 \approx 1,1r_1$  до  $r_2 \approx 10r_1$  с увеличивающимся шагом

при увеличении текущего размера  $r_2$ . Такое варьирование толщины стенки цилиндра позволяет графически приближенно установить предельное значение запаса прочности рассматриваемого объекта. При этом значение внешнего давления  $q_2$  следует задать меньше внутреннего  $q_1$ , исходя из выводов, полученных ранее.

### 3.3. Алгоритм решения задач

3.3.1. Для каждой совокупности исходных данных вычислить константы  $C_1$  и  $C_2$  формулы Ламэ и получить уравнения распределения напряжений и по толщине стенки в численном виде:

$$\sigma_r = C_1 - C_2 \frac{1}{r^2} ;$$

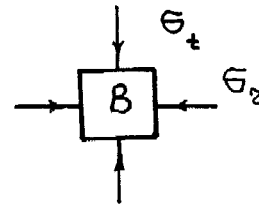
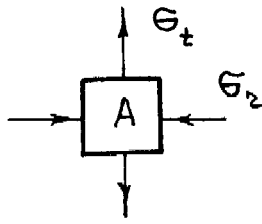
$$\sigma_t = C_1 + C_2 \frac{1}{r^2} ,$$

где  $C_1 = \frac{q_1 r_1^2 - q_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} ;$   $C_2 = \frac{r_1^2 r_2^2 (q_1 - q_2)}{r_2^2 - r_1^2} .$

3.3.2. Построить эпюры распределения напряжений по толщине стенки (рис. 3.3, 3.4). Следует обратить внимание на то, что при правильном вычислении коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  ординаты эпюры радиальных напряжений для точек внутренней и внешней поверхности цилиндра совпадают по величине с приложенным давлением:  $\sigma_{rA} = -q_1$ ;  $\sigma_{rB} = -q_2$ . Допустимая погрешность – в пределах 2 процентов. Если это условие не выполняется и погрешность составляет больше 2 процентов, то следует повысить точность выполнения всех промежуточных вычислений. Если величины радиальных напряжений  $\sigma_r$  в точках поверхностей существенно отличаются от давлений  $q_1$  и  $q_2$ , то следует искать ошибку в расчетах, сравнивая значения  $C_1$  и  $C_2$ , вычисленные для ближайших значений варьируемого в задаче параметра. Ряды дискретных значений  $C_1$  и  $C_2$  образуют плавные закономерности.

3.3.3. Определить положение опасных точек трубы, вычислить для них эквивалентное напряжение по третьей классической гипотезе прочности  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$  и коэффициент запаса  $k = \sigma_T / \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$ .

В случае, когда напряжения  $\sigma_t$  во всех точках сечения трубы растягивающие, нет сомнения, что опасными точками являются точки внутренней поверхности трубы (т. А на рис. 3.4). В случаях, когда эпюра  $\sigma_t$  двухзначная (рис. 3.3), следует вычислить значения эквивалентных напряжений в точках внутренней (А) и внешней (В) поверхности. При правильном выполнении расчетов опасное состояние всегда будет во внутренних точках трубы.



$$\sigma_1 = \sigma_t; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_r.$$

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_r; \sigma_3 = \sigma_t$$

при  $|\sigma_r| < |\sigma_t|$ .

3.3.4. Вычисленные напряжения занести в сводные табл. 3.1 и 3.2.

**Таблица 3.1. Напряжения в опасных точках трубы и оценка прочности**

$q_2, \text{Н/мм}^2$							
$\sigma_r, \text{Н/мм}^2$							
$\sigma_t, \text{Н/мм}^2$							
$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}, \text{Н/мм}^2$							
$\kappa$							

**Таблица 3.2. Напряжения в опасных точках трубы и оценка прочности**

$r_2, \text{мм}$							
$\sigma_r, \text{Н/мм}^2$							
$\sigma_t, \text{Н/мм}^2$							
$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}, \text{Н/мм}^2$							
$\kappa$							

Колонки табл. 3.1 и 3.2 заполняются по мере завершения расчетов подгруппами студентов. По мере заполнения таблиц анализируется плавность изменения расчетных параметров по строкам. При выявлении допущенных отдельных ошибок они исправляются так, чтобы общая функциональная зависимость нигде не нарушалась.

### 3.4. Анализ результатов

3.4.1. Проанализировать совокупность данных табл. 3.1 и 3.2 и сделать первый общий вывод: при любых внешних воздействиях и конструктивных параметрах опасные точки всегда внутренние.

3.4.2. Построить графики, отражающие зависимость прочности от внешнего давления (рис. 3.5) и внешнего радиуса (рис. 3.6). Обратит внимание на то, что характер влияния разный. Зависимость прочности от внешнего давления имеет

экстремальный характер; максимальная прочность достигается, если  $q_1 = q_2$ . Изменение прочности при увеличении внешнего радиуса (толщины стенки) носит предельный характер.

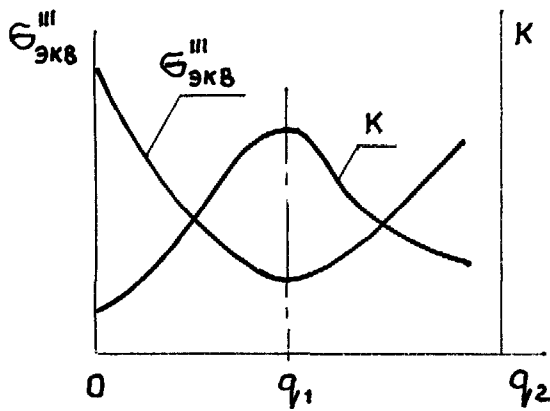


Рис. 3.5.

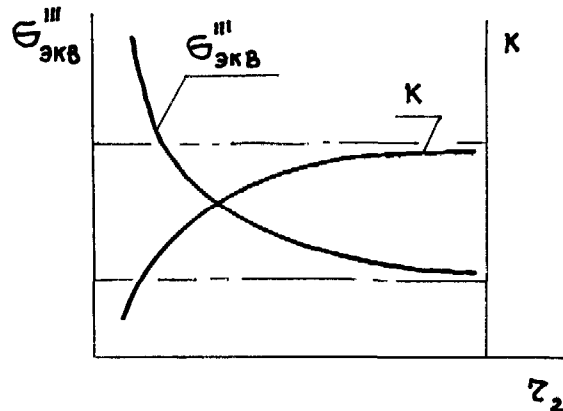


Рис. 3.6.

Каждой подгруппе студентов следует самостоятельно описать полученные графические зависимости в выводах.

3.4.3. Обсудить теоретические значения предельных напряжений для частных видов конструкций.

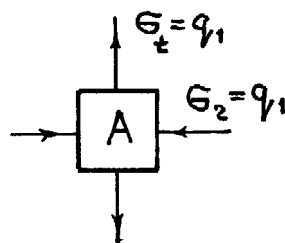
Случай 1. Деталь типа пластины с круглым отверстием ( $r_2 \rightarrow \infty$ ), внешнее давление отсутствует ( $q_2 = 0$ ).

При отсутствии внешнего давления

$$\sigma_{r,t} = \frac{q_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 \mp \frac{r_2^2}{r^2} \right).$$

$$\text{Для } r_2 \rightarrow \infty \quad \sigma_{r,t} = \mp \frac{q_1 r_1^2}{r^2}.$$

В опасной точке при  $r = r_1$  напряжение  $\sigma_{r,t} = \mp q_1$ .

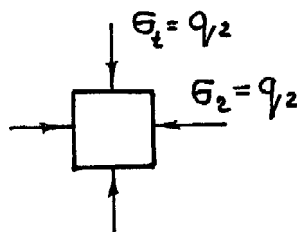


$$\sigma_1 = q_1; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -q_1. \text{ Тогда } \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 2q_1.$$

Случай 2. Деталь типа стержня под внешним давлением; внутреннее давление отсутствует ( $q_1 = 0$ ).

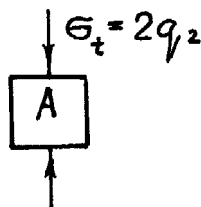
$$\sigma_{r,t} = -\frac{q_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 \mp \frac{r_1^2}{r^2} \right).$$

Если  $r_1 = 0$ ,  $\sigma_{r,t} = -q_2$ .



В этом случае во всех точках детали двухосное равностороннее сжатие. Эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = q_2$ .

Если в центре имеется отверстие, но бесконечно малого размера, то есть  $r_1 \rightarrow 0$ , но не равен нулю, тогда в опасной точке при  $r = r_1$  будут следующие напряжения:  $\sigma_r = 0$ ;  $\sigma_t = -2q_2$ .



Эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 2q_2$ . Следовательно, отверстия малого размера создают концентрацию напряжений с коэффициентом  $k_\sigma = 2$ .

### 3.5. Контрольные вопросы

1. Укажите цель лабораторной работы.
2. Какие напряжения возникают в точках поперечного сечения трубы, находящейся под давлением?
3. Какие точки трубы будут наиболее напряженными под действием внутреннего (внешнего) давления?
4. Какому закону подчинено распределение тангенциальных (радиальных) напряжений?

5. Какие напряжения называют главными? Какими свойствами обладают главные напряжения?
6. Как обозначают главные напряжения в случае объемного напряженного состояния?
7. Как оценивают прочность при плоском напряженном состоянии?
8. Какие выводы сделаны в результате выполнения расчетно-исследовательской работы?
9. Как можно повысить прочность трубы при неизменном внутреннем давлении?

#### 4. Практическое занятие: "РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРОВ И ТРУБ. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ"

##### 4.1. Обсуждение основных формул

Цилиндрические соединения с натягом применяются часто в инженерной практике: составные цилиндры и трубы; составные стволы артиллерийских орудий; неподвижные посадки подшипниковых колец в корпус и на вал...

Натяг  $\Delta$  - разность между внешним радиусом внутренней детали 1 соединения двух цилиндров (рис. 4.1) и радиусом отверстия детали 2. Государственные стандарты регламентируют допуски на изготовление этих размеров для обеспечения посадок стандартного вида. Как правило, величина натяга  $\Delta$  связана с технологией обеспечения неподвижного соединения, при этом контактные напряжения в соединениях для разных радиусов  $c$  оказываются неодинаковыми для одних и тех же стандартных посадок.

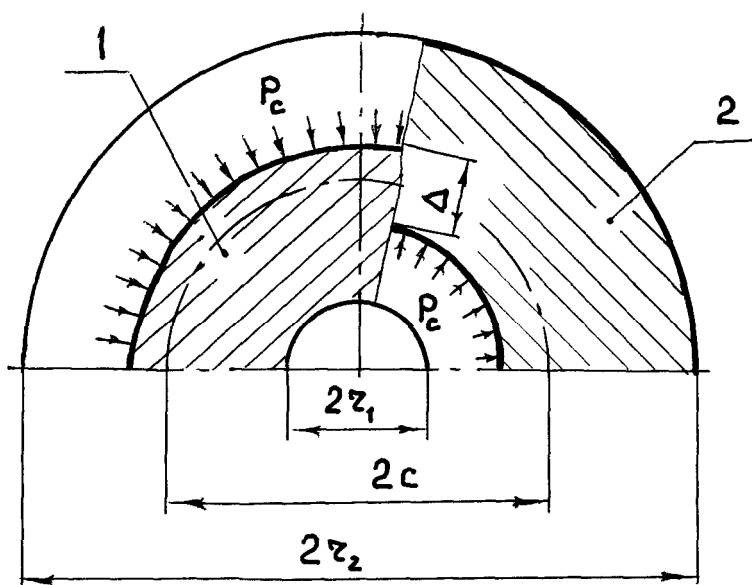


Рис. 4.1

Контактное давление  $p_c$ , возникающее на контактной цилиндрической поверхности радиуса  $c$ , при упругом состоянии материала деталей 1 и 2 пропорционально натягу  $\Delta$  и сложно зависит от физических свойств и размеров контактной пары:

$$p_c = \frac{\Delta}{c} \cdot \left[ \frac{c^2(1-\mu_1) + r_1^2(1+\mu_1)}{E_1(c^2 - r_1^2)} + \frac{c^2(1-\mu_2) + r_2^2(1+\mu_2)}{E_2(r_2^2 - c^2)} \right].$$

В этом выражении  $\mu_1, E_1$  - коэффициент Пуассона и модуль упругости внутреннего цилиндра 1;  $\mu_2, E_2$  - то же для внешнего цилиндра 2.

В составном цилиндре деталь 1 представляет собой цилиндр, находящийся под воздействием внешнего давления; радиальные и тангенциальные напряжения в ней определяются по формуле

$$\sigma_{r,t} = -\frac{p_c c^2}{c^2 - r_1^2} \left( 1 \mp \frac{r_1^2}{r^2} \right).$$

Внешний цилиндр 2 испытывает действие внутреннего давления; напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_c c^2}{r_2^2 - c^2} \left( 1 \mp \frac{r_2^2}{r^2} \right).$$

Распределение напряжений показано на рис. 4.2.

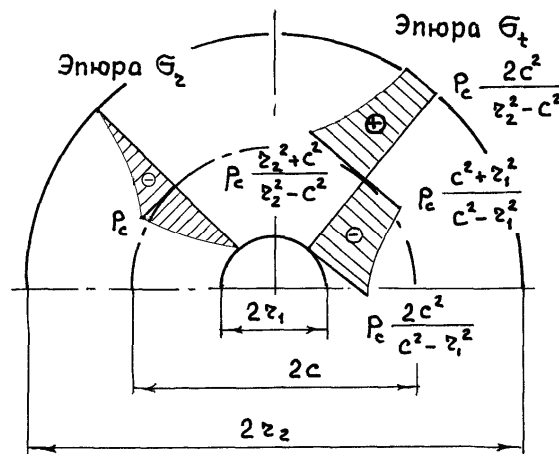


Рис. 4.2

Таким образом, расчет составного цилиндра сводится к совокупности двух частных расчетов.

Поскольку ранее уже было установлено, что опасными точками в цилиндре при любом нагружении всегда являются точки внутренней поверхности, то условие достижения предельного состояния цилиндрического соединения по III гипотезе будет иметь следующий вид. Для внутреннего цилиндра 1

$$p_c \frac{2c^2}{c^2 - r_1^2} = \sigma_{T1};$$

для внешнего цилиндра 2

$$p_c \frac{c^2 + r_2^2}{r_2^2 - c^2} + p_c = \sigma_{T2}, \text{ или } p_c \frac{2r_2^2}{r_2^2 - c^2} = \sigma_{T2}.$$

В этих выражениях  $\sigma_{T1}$  и  $\sigma_{T2}$  - пределы текучести материалов цилиндров 1 и 2 соответственно.

#### 4.2. Постановка цели и задач исследования

Цель: установить характер влияния размеров (масштабного фактора) и физических свойств материалов контактной пары на величину предельно допустимого натяга, обеспечивающего упругое соединение двух цилиндрических поверхностей.

Задача 1. Определить максимально допустимый натяг, обеспечивающий упругие деформации в цилиндрическом соединении (рис. 4.3), внутренний радиус которого  $r_1$  имеет нормализованное значение, а размеры контактной поверхности  $c$  и внешний габарит  $r_2$  - пропорциональны  $r_1$ . Установить, как влияет масштабный размер  $r_1$  на предельную величину натяга  $\Delta$ .

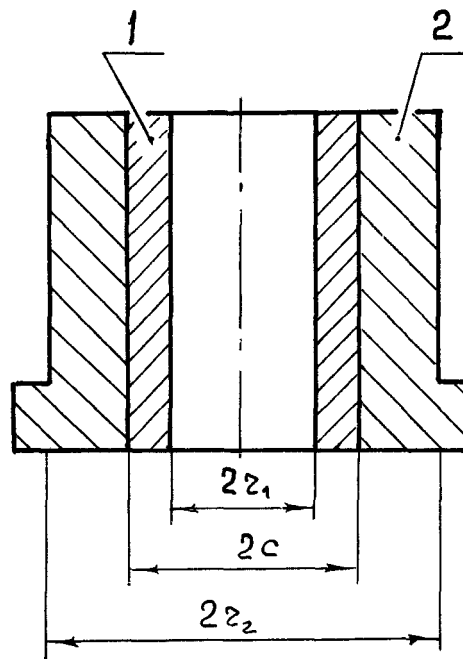


Рис. 4.3

Задача 2. При одних и тех же размерах соединения  $r_1, c, r_2$  установить, как влияет материал контактной пары на предельную величину натяга. Рассмотреть следующие варианты: бронза – сталь; бронза – чугун; сталь – чугун.



### 4.3. Алгоритм решения задач

Типоразмер соединения двух цилиндров (см. рис. 4.3) каждой подгруппе студентов задает преподаватель. Для нормализованных значений внутреннего диаметра данные занесены в табл. 4.1. Материал для изготовления деталей контактной пары задает преподаватель.

Таблица 4.1. Результаты расчета предельного значения натяга

$r_1$ , мм	20	30	40	50	70	80	90	100
$c = 1,2r_1$ , мм	24	36	48	60	84	96	108	120
$r_2 = 1,5r_1$ , мм	30	45	60	90	105	120	135	150
Опасная деталь								
$P_c$ , Н/мм <sup>2</sup>								
$\Delta$ , мм								
$\Delta / r_1$								

4.3.1. Для каждой совокупности исходных данных составить условие предельного состояния деталей соединения по III гипотезе прочности и определить предельно допустимое контактное давление  $p_c$ .

4.3.2. Вычислить соответствующую величину натяга, приняв следующие значения механических характеристик и физических констант:

для стали  $\sigma_{Tcm} = 400$  Мпа;  $E_{cm} = 2 \cdot 10^5$  Мпа;  $\mu_{cm} = 0,26$ ;

для чугуна  $\sigma_{Tчуг} = 220$  Мпа;  $E_{чуг} = 1,2 \cdot 10^5$  Мпа;  $\mu_{чуг} = 0,28$ ;

для бронзы  $\sigma_{Tбр} = 140$  Мпа;  $E_{бр} = 1,1 \cdot 10^5$  Мпа;  $\mu_{бр} = 0,36$ .

4.3.3. Построить эпюры радиальных и тангенциальных напряжений в составном сечении для выбранного натяга. При правильном выполнении расчетов предельное состояние будет наблюдаться либо в точках внутренней поверхности детали 1, либо в точках внутренней поверхности детали 2. В остальных точках – запас прочности.

Результаты расчетов занести в табл. 4.1.

4.3.4. Расчеты для соединения цилиндров из других материалов выполнить всей группой совместно. Конструктивные размеры соединения задает преподаватель. Рассмотреть три варианта (табл. 4.2).

Таблица 4.2. Результаты расчета максимального натяга в контактной паре

Материал вкладыша	бронза	бронза	сталь
Материал корпуса	сталь	чугун	чугун
Опасная деталь			
$R_c, \text{Н/мм}^2$			
$\Delta / r_1$			

В первом варианте предел текучести и модуль упругости материала вкладыша меньше чем у материала корпуса, во втором варианте они примерно одинаковые, в третьем – предел текучести и модуль упругости материала вкладыша больше чем у материала корпуса. Однозначно задача о положении опасных точек решена быть не может, так как на распределение напряжений в соединении существенно влияет еще одна деформационная константа – коэффициент Пуассона.

#### 4.4. Анализ результатов

4.4.1. По данным табл. 4.1 построить график зависимости предельного натяга, обеспечивающего упругие контактные деформации в соединении, от величины радиуса  $r_1$ . Сделать вывод о влиянии типоразмера.

4.4.2. Проанализировать данные табл. 4.2 и описать влияние сочетания материалов контактной пары на положение опасных точек в соединении и на величину предельно допустимого натяга.

#### 4.5. Контрольные вопросы

1. Укажите цель лабораторной работы.
2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении составной трубы, собранной с натягом?
3. Какие точки в соединении с натягом будут наиболее напряженными? Как это можно установить?
4. Как влияет величина натяга на величину контактного давления в упругом неподвижном соединении цилиндров?
5. Какие выводы сделаны в результате выполнения расчетно-исследовательской работы?
6. При воздействии одинакового внутреннего давления и при всех прочих равных условиях прочность какой трубы будет выше, сплошной или составной? Объясните, почему.