

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
«Тихоокеанский государственный университет»

## **АНАЛИЗ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ СООРУЖЕНИЙ**

Методические указания  
к изучению раздела курса «Строительная механика»  
для студентов строительных специальностей заочной и  
дистанционной форм обучения

Хабаровск  
Издательство ТОГУ  
2008

УДК 539.3/6. (076.5)

Анализ неизменяемости сооружений: Методические указания к изучению раздела курса «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной форм обучения / Сост. В.Е. Киселев.- Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008.- 21 с.

Настоящие методические указания к изучению раздела курса строительной механики «Кинематический анализ», предназначены для студентов заочного и дистанционного обучения. В методических указаниях приведены основные положения теории и примеры решения задач по исследованию геометрической неизменяемости плоских стержневых систем. Методические указания составлены на кафедре «Механика деформируемого твердого тела» ТОГУ.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Механика деформируемого твердого тела» и методического совета заочного факультета.

## ИЗМЕНЯЕМЫЕ И НЕИЗМЕНЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Геометрически неизменяемой называется система, изменение формы которой возможно только вследствие деформации составляющих ее элементов. Так, шарнирно-стержневой треугольник  $ABC$  (рис.1, а) при узловой нагрузке может деформироваться в результате изменения длин стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , а система с жесткими узлами, изображенная на рис. 1.б, - вследствие одновременного изменения длин и искривления стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ .

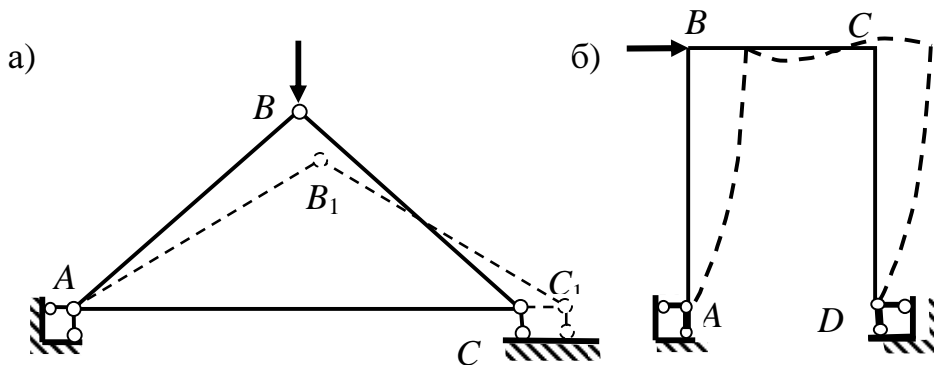


Рис. 1. Изменение формы систем, вызванное деформацией элементов

Но можно представить себе систему, способную изменять форму в целом даже при бесконечно малых нагрузках без изменения размеров стержней, например, шарнирный четырех угольник (рис. 2, а) и однопролетная балка, имеющая в пролете шарнир (рис. 3, а). Подобные системы называются геометрически изменяемыми.

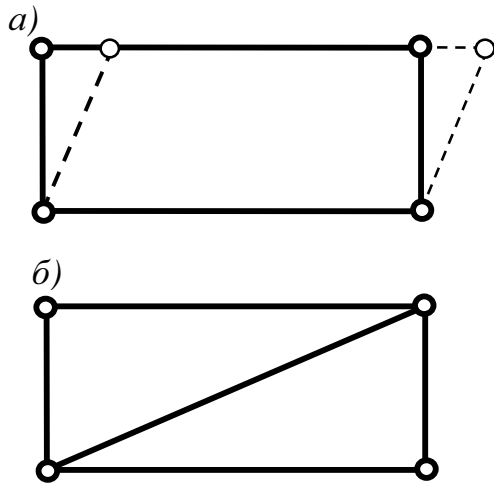


Рис. 2

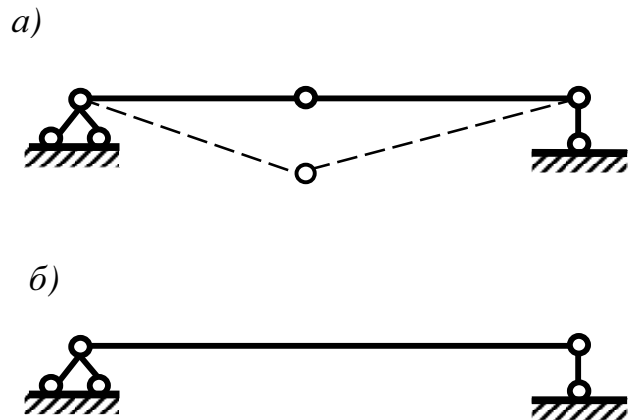


Рис. 3

Если четырехугольник раскрепить диагональным стержнем (рис. 2, б) или в балке уничтожить шарнир (рис. 3, б), то эти системы превратятся в геометрически неизменяемые.

Очевидно, что в строительстве могут применяться только системы геометрически неизменяемые. Перед расчетом любого сооружения необходимо сначала проверить, является ли оно неизменяемым; в противном случае расчет теряет всякий смысл. Для выяснения того, является ли рассматриваемая система геометрически неизменяемой, а также для уяснения роли, которую играют отдельные элементы в работе сооружения, служит анализ образования систем. Существуют два способа анализа неизменяемости систем: геометрический и аналитический. Здесь рассматривается геометрический анализ образования плоских стержневых систем.

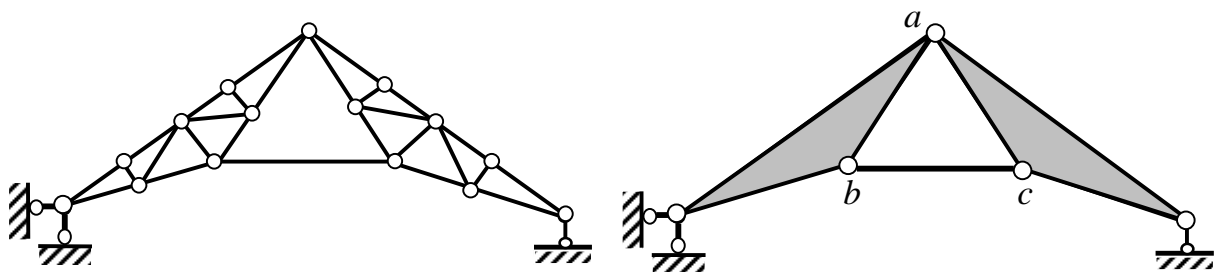


Рис. 4

## СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ СИСТЕМЫ

Если система изменяема, то вся она или отдельные ее части имеют некоторую свободу перемещений. С т е п е н ь ю с в о б о д ы называется число независимых геометрических параметров, определяющих положение всех элементов сооружения.

Точка на плоскости имеет степень свободы равную двум, так как ее положение определяется двумя координатами.

Под д и с к о м понимается геометрически неизменяемый элемент сооружения. Так, например, ферма, приведенная на рис. 4, может рассматриваться как два диска, соединенные шарниром  $a$  и стержнем  $bc$ .

Простейшим диском является стержень. Дискom является и земля (если считать ее жестким недеформируемым массивом) или вообще неизменяемое основание сооружения.

У диска на плоскости степень свободы равна трем, так как он может перемещаться поступательно в двух направлениях и поворачиваться вокруг любой точки.

Для обеспечения неизменяемости структуры и неподвижности сооружения диски соединяют различными устройствами, ограничивающими степень свободы. Всякое устройство, отнимающее у тела одну степень свободы, называется к и н е м а т и ч е с к о й с в я з ь ю.

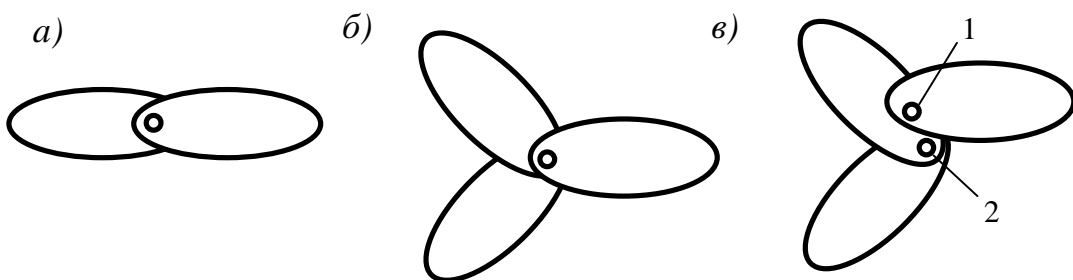


Рис. 5

В качестве связей используются шарниры и стержни. Шарниры бывают п р о с т ы м и (рис.5,  $a$ ) и к р а т н ы м и (рис.5,  $b$ ). Простой шарнир

соединяет два диска, кратный – более двух и эквивалентен  $(n - 1)$  простым шарнирам, где  $n$  – число соединяемых дисков. Кратный шарнир (рис. 5, б) можно рассматривать как два расположенных рядом простых шарнира (рис. 5, в), имеющих общую ось (рис. 5, б).

Каждый простой шарнир эквивалентен двум связям, так как препятствует любым двум линейным смещениям двух дисков, оставляя возможность их взаимного поворота. Каждый опорный стержень эквивалентен одной связи, так как препятствует перемещению диска в направлении стержня.

Степень свободы  $W$  сооружения, состоящего из  $D$  дисков, соединенных  $Ш$  простыми шарнирами и имеющего  $C_{оп}$  опорных стержней определяется по формуле

$$W = 3 \times D - 2 \times Ш - C_{оп} \quad (1)$$

Для определения числа  $D$  необходимо предварительно отбросить все шарниры и опоры, а для определения числа  $Ш$  - все опоры.

Для ферм, т.е. систем, состоящих из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами, степень свободы может быть определена по более простой формуле:

$$W = 2 \cdot U - C - C_{оп}, \quad (2)$$

где  $U$  - число узлов фермы;  $C$  - число стержней фермы;  $C_{оп}$  - число опорных стержней.

Если для рассматриваемой системы  $W > 0$ , то система *изменяема*, так как не имеет достаточного количества связей;  $W = 0$  - система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть неизменяемой;  $W < 0$  - система имеет избыточные, ненужные для неизменяемости стержни (или диски) и относится к числу статически неопределимых.

Условие  $W \leq 0$  являются необходимыми, но недостаточными для суждения о неизменяемости системы, так как неизменяемость зависит не только от числа связей, наложенных на диски, но и от их расположения. Для того, чтобы узнать является ли система в действительно неизменяемой, а также выяснить, какую роль играют отдельные элементы в его работе, необходимо провести *анализ структуры* сооружения.

## АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В неизменяемой системе степень свободы должна быть равна нулю (или меньше нуля), то есть, должно соблюдаться условие

$$3 \times D - 2 \times Ш - C_{оп} \leq 0 . \quad (3)$$

Соблюдение такого условия совершенно необходимо, но еще недостаточно. Имеются системы, в которых число дисков, шарниров и опорных стержней удовлетворяет условию (3), но системы все же изменяемы. Например, балки, изображенные на рис. 6 имеют одинаковое число дисков  $D=2$ , одинаковое число шарниров  $Ш=1$  и одинаковое число опорных стержней  $C_{оп}=4$ , при этом число степеней свободы  $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ . Но в то время, как первая балка (рис. 6, а) неизменяема, вторая (рис. 6, б) изменяема, так как шарнир  $D$  может свободно перемещаться вниз или вверх.

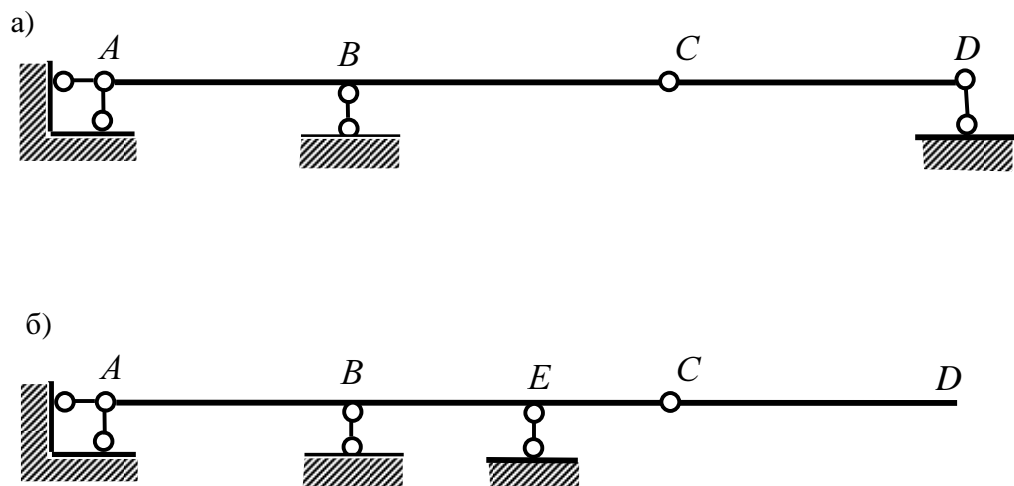


Рис. 6. Шарнирно консольные системы

Для того чтобы узнать, является ли система действительно неизменяемой, а также выяснить какую роль играют отдельные элементы в ее работе необходимо произвести анализ структуры сооружения, для чего надо знать принципы образования структурно-неизменяемых систем.

В таблице 1 приведены правила образования геометрически неизменяемых систем

## Правила образования геометрически неизменяемых систем

Таблица 1

№ п/п	Соединение	Правило	Исходное состояние	Исключение (мгнс система)
1	Узла с диском	Необходимы два стержня не лежащие на одной прямой		
2	Двух дисков	а) с помощью шарнира и стержня, ось которого не проходит через шарнир  б) с помощью трех стержней, не пересекающихся в одной точке (и, следовательно, не параллельных)	 	 
3	Трех дисков	а) с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой  б) с помощью шести стержней так, что между каждой парой дисков установлено по два стержня, точки пересечения которых не лежат на одной прямой	 	 



Все приведенные в таблице схемы могут быть сведены к одной: шарнирно стержневому треугольнику (рис.6) фигуре геометрически неизменяемой.

### МГНОВЕННО ИЗМЕНЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Мгновенно изменяемыми называют системы, допускающие без деформаций составляющих их элементов бесконечно малые поступательные или вращательные перемещения, после чего системы становятся неизменяемыми.

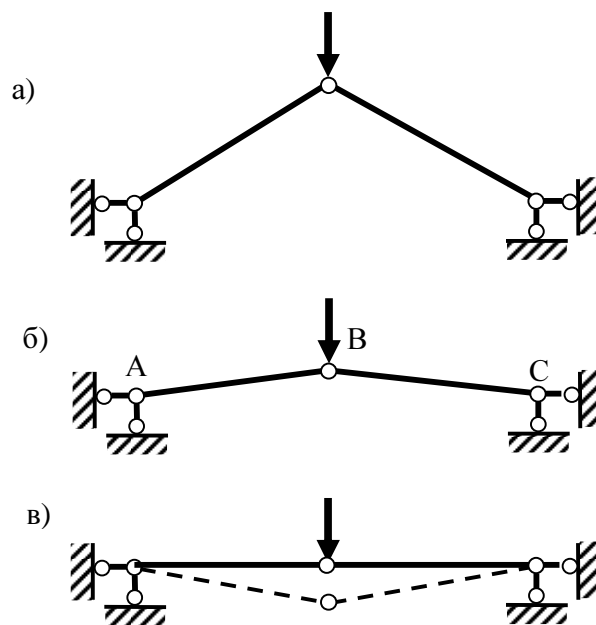


Рис.7. Превращение системы в мгновенно изменяемую

Рассмотрим геометрически неизменяемую систему, показанную на рис. 7, а. Будем понижать средний шарнир (рис. 7, б). Система остается неизменяемой. Наконец, поместим средний шарнир на одной прямой с опорными шарнирами (рис. , в). Тогда система станет изменяемой, так как средний шарнир получит возможность перемещаться вверх и вниз. Она называется мгновенно изменяемой, так как ее изменяемость продолжается как бы одно мгновение - когда все шарниры располагаются точно на одной

прямой. После ничтожно малого перемещения среднего шарнира шарниры уже не будут на одной прямой, и система опять станет неизменяемой.

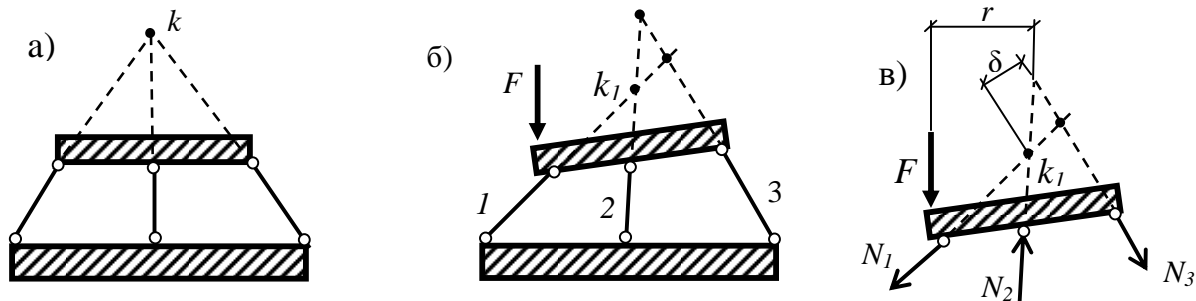


Рис.8. Определение усилий в системе, близкой к мгновенно изменяемой

Рассмотрим систему, состоящую из двух дисков, соединенных тремя стержнями, пересекающимися в точке  $k$  (рис.8, а). После поворота диска стержни 1 и 2 пересекутся в точке  $k_1$ , а направление стержня 3 пройдет мимо точки  $k_1$  на малом расстоянии  $\delta$  (рис.8, в). Если теперь к диску приложить какую-либо нагрузку, например силу  $F$  то в стержнях возникнут усилия  $N_1, N_2$  и  $N_3$ . Рассмотрим равновесие диска  $D_1$  (рис.8, в). Составим сумму моментов относительно точки  $k_1$ :  $\sum M_{k_1} = F \cdot r - N_3 \cdot \delta = 0$ ; откуда  $N_3 = F / \delta$ . Поскольку  $\delta$  малая величина, усилие  $N_3$ , будет чрезмерно велико что может привести к разрушению стержня.

Хотя мгновенно изменяемые системы, теоретически имеют лишь бесконечно малую подвижность, фактически их перемещения, вызываемые нагрузкой, оказываются значительно больше, чем перемещения обычных геометрически неизменяемых систем. Применение мгновенно изменяемых системы в качестве сооружений недопустимо. После нагружения они становятся неизменяемыми, однако возникающие в их элементах усилия оказываются очень большими, и конструкция либо разрушается, либо получает недопустимо большие перемещения. На практике следует избегать не только мгновенно изменяемых систем, но и систем близких к ним.

### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ АНАЛИЗА

При выполнении анализа систем следует придерживаться следующего порядка:

1. По формулам (1) или (2) определяется степень свободы системы  $W$ ;
2. Если  $W > 0$  анализ заканчивается, так как система изменяемая.
3. При  $W = 0$  или  $W > 0$  проводят анализ структуры, пользуясь принципами образования неизменяемых систем (табл.1).

4. Если окажется, что система имеет неизменяемую структуру, выполняется проверка на мгновенную изменяемость.

### ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА

**Пример 1.** Произвести анализ образования системы, показанной на рис.8.

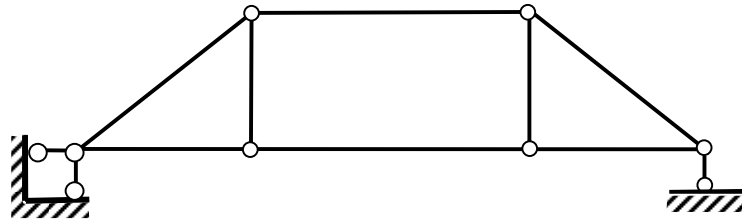


Рис. 9 Шарнирно стержневая

Вначале определяем степень свободы системы. Поскольку система является шарнирно-стержневой - воспользуемся формулой (2). Число узлов системы  $V = 6$ , число стержней системы  $C = 8$ , число опорных стержней  $C_o = 3$ , следовательно,  $W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 12 - 1 = +1$ . Система имеет одну степень свободы и не может быть использована в качестве строительной конструкции.

**Пример 2.** Произвести анализ образования системы, показанной на рис.10, а,

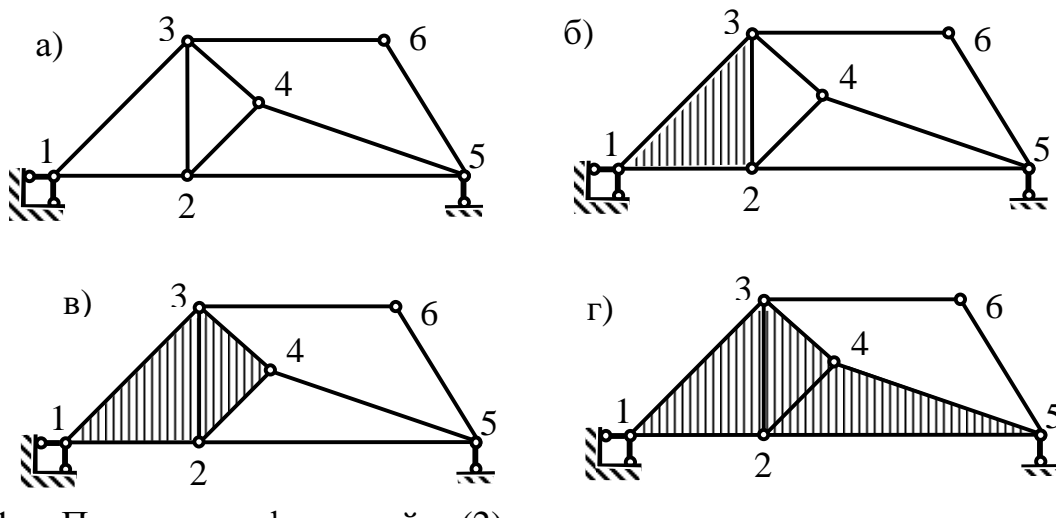


Рис.10. Последовательность анализа структуры шарнирно стержневой системы  $V = 6$ ,  $C = 9$ ,  $C_o = 3$ ,  $W = 2 \cdot 6 - 9 - 3 = 0$ , следовательно, система имеет

необходимое количество связей, чтобы быть неизменяемой и статически определимой.

2. Проводим анализ структуры системы. Рассмотрим треугольник 1 2 3, который в соответствии с третьим признаком является неизменяемой системой (таблица 1, третья строка) . Считая его жестким диском (заштрихован на рис. 10, б), присоединим к нему двумя стержнями (3-4 и 2-4) узел 4. Эти стержни не лежат на одной прямой, следовательно, на основании первого принципа (таблица 1, первая строка). узел 4 неподвижно прикреплен к диску 123. Полученная система также является жестким диском (заштрихован на рис.10, в). Прикрепив к нему двумя стержнями (4-5 и 2-5) узел 5 снова получим жесткий диск, заштрихованный на рис.10, г). К этому диску присоединим двумя стержнями (3-6 и 5-6) не лежащими на одной прямой последний узел 6.

Поскольку система образована в соответствии с принципами образования структурно неизменяемых систем, она неизменяема и не является мгновенно изменяемой. К земле система прикреплена так же жестко, с помощью трех опорных стержней, не пересекающихся в одной точке.

**Пример 3.** Произвести анализ образования системы, показанной на рис. 11.

1. Определяю число степеней свободы по формуле (1). Система образована из пяти дисков ( $D=5$ ), соединенных простыми (в точках  $A$  и  $D$ ) и кратными (в точках  $B$  и  $C$ ) шарнирами ( $Ш=1+1+2+2=6$ ) и тремя опорными стержнями ( $C_{оп} = 3$ ). Следовательно,  $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$  и система имеет необходимое количество связей для того, что бы быть неизменяемой.,

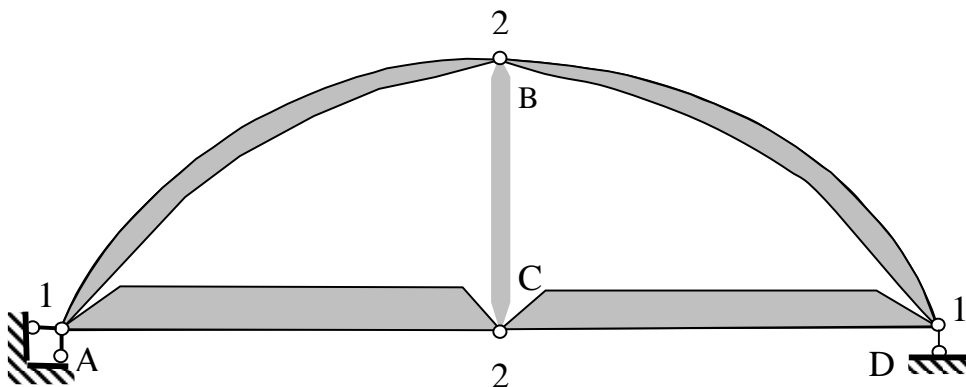


Рис. 11. Система с кратными шарнирами

2. Выполняем анализ структуры. три диска  $AD$ ,  $BC$  и  $AC$  связаны тремя шарнирами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежащими на одной прямой, они образуют диск  $ABC$ . Этот диск, а так же диски  $BD$  и  $CD$  соединены тремя шарнирами  $B$ ,  $D$  и

$C$ , не лежащими на одной прямой. Эта неизменяемая система жестко присоединена к земле с помощью трех опорных стержней непересекающихся в одной точке.

Поскольку система образованна в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых систем, она неизменяема и не является мгновенно изменяемой.

**Пример 4.** Произвести кинематический анализ системы, показанной на рис. 12.

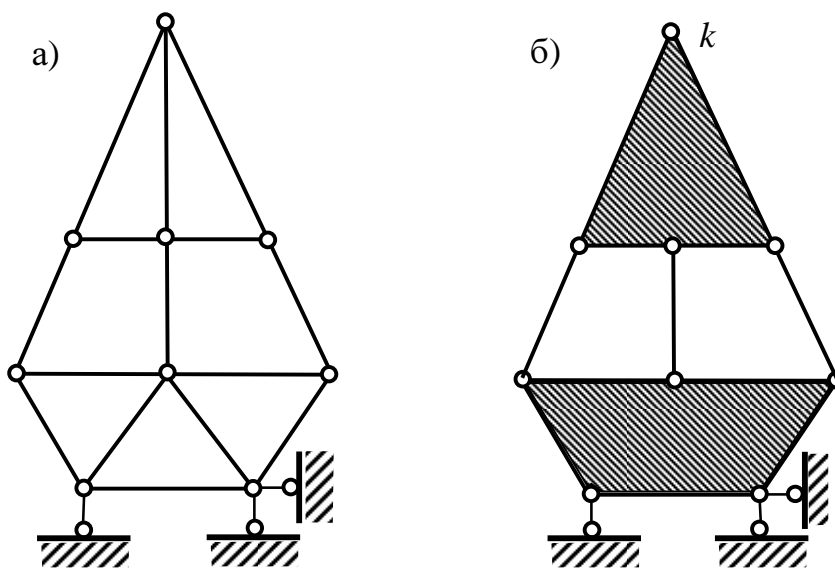


Рис. 12. Шарнирно-стержневая система

1. Пользуясь формулой (2) для шарнирно-стержневых систем определяем число степеней свободы.  $V = 9$ ,  $C = 15$ ,  $C_{оп} = 3$ ,  $W = 2 \cdot 9 - 15 - 3 = 0$ , следовательно, система имеет необходимое количество связей, чтобы быть геометрически неизменяемой.

2. Проводим анализ структуры системы. Вначале найдем заведомо неизменяемые части системы – два диска, образованные треугольниками (заштрихованы на рис. 11, б). Они соединены тремя стержнями. Однако эти стержни пересекаются в одной точке (т.  $k$  на рис. 12, б). Следовательно, система мгновенно изменяемая.

**Пример 5.** Проанализировать систему, изображенную на рис. 13.

Система состоит из четырех дисков ( $AC$ ,  $CE$ ,  $EF$  и  $FH$ ) т.е.  $D=4$ . Число шарниров  $Ш=3$  (все шарниры простые). Число опорных стержней  $C_{оп} = 2 + 1 \cdot 4 = 6$ . Степень свободы системы по формуле (1)  $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$ .

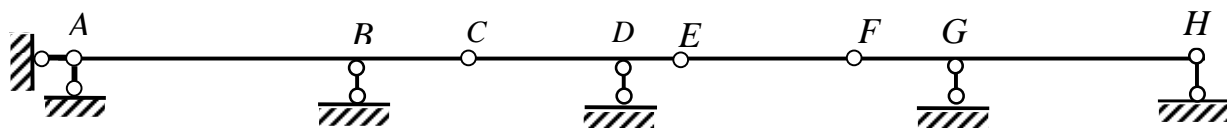


Рис. 13. Многопролетная балка

Необходимое условие неизменяемости системы удовлетворено. Производим анализ структуры. Диск  $AC$  присоединен к земле тремя опорными стержнями, не пересекающимися в одной точке. Такое прикрепление обеспечивает неподвижность диска  $AC$ . К нему шарниром  $C$  и к земле опорным стержнем в точке  $D$  прикреплен диск  $CE$ . При этом ось стержня  $D$  не проходит через шарнир  $C$ . К полученной неизменяемой системе стержнем  $EF$  и двумя опорными стержнями в точках  $G$  и  $H$  присоединен диск  $FH$ . Эти три стержня не пересекаются в одной точке.

Таким образом, рассматриваемая система неизменяема и не является мгновенно изменяемой.

**Пример 6.** Проверить геометрическую неизменяемость системы, приведенной на рис. 14.

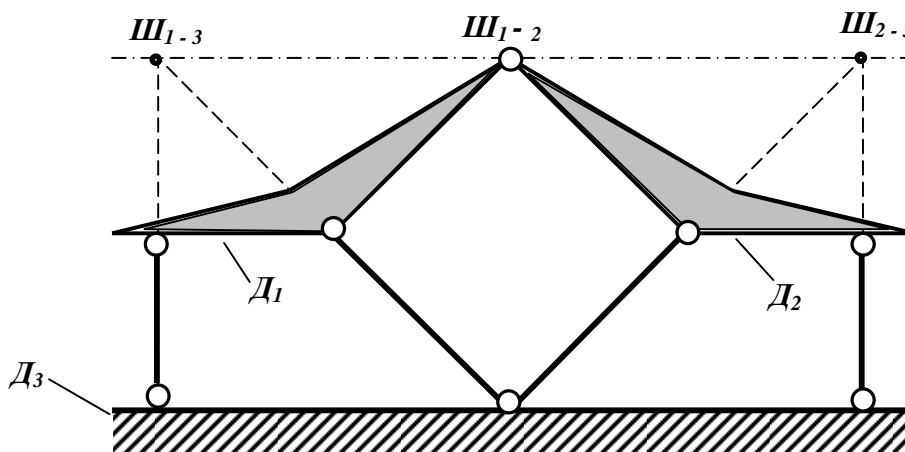


Рис. 14. Мгновенно изменяемая система

Здесь:  $D=2$ ;  $Ш=1$ ;  $C_{оп}=4$ . По формуле (1)

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

Следовательно, система имеет необходимое количество связей, чтобы неизменяемой. Проанализируем ее структуру.

Вместе с землей система состоит из трех дисков, соединенных между собой шарниром  $Ш_{1-2}$  и четырьмя стержнями, эквивалентными условным шарнирам  $Ш_{1-3}$  и  $Ш_{2-3}$ .

Так как три шарнира, соединяющие три диска, лежат на одной прямой, система мгновенно изменяема.

### Библиографический список

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников.- М.: Высш. шк., 1986.- 607 с.
2. Киселев, В. А. Строительная механика. Общий курс / Киселев В. А. - М.: Стройиздат, 1986. - 520 с.
3. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем) / Г. К.Клейн, Н.Н.Леонтьев, М.Г.Ванюшенков и др. – М.: Высш. шк., 1980.- 384 с.
4. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н. Н.Леонтьев, Д. Н. Соболев, А.А. Амосов.- М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996.- 542 с.

## **АНАЛИЗ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ СООРУЖЕНИЙ**

Методические указания к изучению раздела курса «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной формы обучения

Виталий Евгеньевич Киселев

Главный редактор *Л.А.Суевалова*

Редактор

Оператор компьютерной верстки *В.Е.Киселев*

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ .

Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.

Усл. печ.л. \_\_\_\_\_. Тираж 100 экз. Заказ \_\_\_\_\_

Издательство Тихоокеанского государственного университета  
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

Отдел оперативной полиграфии издательства  
Тихоокеанского государственного университета.  
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136