



УДК 536.46

© В. К. Булгаков, А. В. Пассар, 2009

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО, ВЯЗКОГО, ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Булгаков В. К. – д.-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ), тел.: (4212) 37-52-03;
Пассар А. В., – ст. преп. кафедры «Теоретическая механика», тел: 8-914-204-30-58 (ДВГУПС)

В рамках гидродинамического подхода изложена математическая модель внутренних течений сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа. В квазиравновесном термодинамическом приближении рассмотрены динамические и энергетические процессы в газе. В основном рассмотрен совершенный газ.

Within the hydrodynamic approach the mathematical model of internal flows of a compressible, viscous, heat-conducting gas is provided. In a quasi-equilibrium thermodynamic approach dynamic and energy processes in a gas are considered. Basically the perfect gas is discussed.

Ключевые слова: математическая модель течения, динамические и энергетические процессы в гидродинамическом, квазиравновесном приближении, совершенный газ.

Введение

Современная газовая динамика, в том числе и газовая динамика внутренних течений вязкого, теплопроводного газа, базируется на нескольких гипотезах.

1. Гипотеза сплошности [3].

Рассмотрим дозвуковые внутренние течения в области $\Omega \cup \Gamma = \bar{\Omega}$, где Ω – открытое связанное множество с достаточно гладкой границей Γ , $\bar{\Omega} \subset E^3$, где E^3 – трехмерное евклидово пространство точек $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ с

метрикой $\rho(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2 \right)^{1/2}$.

Разобьем область $\bar{\Omega}$ на малые кубики Гильберта $V_h = h^3$. Здесь ребро кубика Гильберта h имеет малую, но конечную величину, такую, что объем V_h содержит достаточно большое число N_h атомов газа и для объема V_h существует понятие термодинамических величин температуры, энтропии, давления, плотности и других (обозначим их через $\{T_1, \dots, T_n\}$), причем относительные флуктуации этих величин

$$\delta T_i = \frac{\left[\overline{(T_i - \bar{T}_i)^2} \right]^{1/2}}{\bar{T}_i}$$

были бы приемлемо малы для задач исследования.

Для аддитивных термодинамических величин T^a (заметим, что большинство термодинамических величин являются аддитивными) имеем оценку [9]:

$$\delta T^a \sim (N_h)^{-1/2}.$$

Если задаться $\delta T^a \sim 0,58 \cdot 10^{-7}$, то получаем $N_h \sim 3 \cdot 10^{10}$, т. е. в кубике Гильберта V_h должно находиться $3 \cdot 10^{10}$ атомов газа. Откуда получаем что в нормальных условиях ($P = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T = 273 \text{ К}$, $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$) $V_h = 10^{-15} \text{ м}^3$, а $h = 10^{-5} \text{ м}$.

Термодинамические величины имеют смысл для объемов $\geq V_h$, а минимальное расстояние в физическом пространстве в области $\bar{\Omega}$ есть величина $h \sim 10^{-5} \text{ м}$.

Гипотеза сплошности предполагает, что можно провести интерполяцию дискретного физического пространства (интерполяцию термодинамических функций) так, чтобы для любой точки $\vec{x} \in \bar{\Omega} \subset E^3$ существовали значения термодинамических функций, обладающих свойствами достаточной гладкости, существовало понятие «при $h \rightarrow 0$ », производных требуемого порядка, была возможность использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления, т. е. весь арсенал, как говорят физики, математических «фикций». Подчеркнем, что когда говорится о значении какой-то термодинамической функции в точке $\vec{x} \in \bar{\Omega} \subset E^3$, то имеется в виду подмножество Ω – кубик Гильберта V_h , внутри которого находится точка \vec{x} . К сожалению, гипотеза сплошности и атомное строение сплошной среды принципиально несовместимы.

2. Гипотеза о локально равновесном приближении течения газа, являющегося неравновесной системой.

Эта гипотеза является попыткой совместить динамику (течения газа) с равновесной статистической физикой её естественным результатом – равновесной термодинамикой. Эта гипотеза открывает доступ к простым, изящным



зависимостям между макроскопическими термодинамическими величинами. Следует также отметить, что к сожалению течение газа, процессы, происходящие в нем и равновесная статистическая физика, также принципиально не совместимы.

Настоящая статья относится к классической газовой динамике (также используют гипотезы 1, 2).

Цель работы – это математическое моделирование течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа и процессов происходящих в нем. В статье в основном рассматривается совершенный газ [3].

Пусть E – удельная внутренняя энергия единицы массы совершенного одноатомного газа, а u_{cp}^2 – среднее значение квадрата скорости атомов в их хаотическом тепловом движении. Тогда по определению для удельной внутренней энергии имеем

$$E = \frac{u_{cp}^2}{2} + const. \quad (0.1)$$

Для совершенного газа зависимость между энергией E и температурой T можно представить в виде

$$E = c_v T + const, \quad (0.2)$$

где c_v – размерный коэффициент пропорциональности между $\frac{1}{2}u_{cp}^2$ и T .

Коэффициент c_v в соответствии со своим физическим смыслом называется теплоемкостью при постоянном объеме.

Соотношение (0.2) вместе с уравнением состояния Клапейрона-Менделеева

$$P = R\rho T \quad (0.3)$$

фиксируют конкретную модель сплошной среды, называемую совершенным газом [3], где R – газовая постоянная, есть число, различное для разных газов. Для воздуха, например, $R = 287,042 \text{ м}^2 / (\text{с}^2 \cdot \text{К})$.

Теплоемкости при постоянном давлении c_p и объеме c_v для совершенного газа удовлетворяют соотношению Майера

$$R = c_p - c_v. \quad (0.4)$$

Как раньше уже отмечалось, течение сжимаемого вязкого, теплопроводного газа является классически неравновесной системой, поэтому в случае, когда течение сопровождается значительными градиентами вектора скорости \vec{u} , внутренней энергии E , температуры T , энтропии S , равновесные определения термодинамических величин теряют смысл [1]. В рамках локально неравновесной термодинамики используемые нами термодинамические величины ρ , ρE , \vec{u} определяются по-прежнему. Так, ρ , ρE есть масса и внутренняя энергия «физических точек» пространства $\bar{\Omega} \subset E^3$; $\rho \vec{u}$ есть им-

пульс объема ΔV : $V_h \leq \Delta V \ll \bar{\Omega}$, точнее центра масс атомов, совершающих хаотическое тепловое движение в объеме ΔV . Остальные термодинамические величины определяются по тем же формулам от ρ , E , которые установлены в состоянии теплового равновесия.

Следуя [1], будем считать, что при малых градиентах скорости течения, температуры, внутренней энергии, давления, (в локально равновесном приближении) энтропия S совпадает с истинной энтропией, совершенный газ остается совершенным и соотношение Гиббса

$$dE = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad (0.5)$$

остается справедливым, из которого следуют необходимые рабочие термодинамические формулы

$$\rho dE = \rho TdS + \frac{P}{\rho}d\rho, \quad (0.5a)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (0.5b)$$

$$\rho \nabla E = \rho T \nabla S + \frac{P}{\rho} \nabla \rho. \quad (0.5c)$$

В книге И. Дьярмати [4] утверждается, что локальное равновесие существует в системах, весьма далеких от полного термодинамического равновесия. Дьярмати приводит результат исследований Мейкснера [5], который установил, что малые элементы объема одноатомного газа можно рассматривать как равновесные объемы. Для газа при нормальных условиях его можно рассматривать как систему локально равновесных малых объемов до температурного градиента $10^7 K/m$, т. е. что до этого предела можно применять подходы равновесной термодинамики.

1. Уравнения движения

В рамках гидродинамического подхода, допущений, оговоренных во введении, уравнения движения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 при использовании элементов тензорного и векторного анализа можно записать в виде [1, 3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k + P \delta_{ik}) = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(v)}}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$



Здесь P – гидростатическое давление, δ_{ik} – символ Кронекера. Тензор вязких напряжений $\sigma_{ik}^{(v)}$ в приближении ньютоновской сплошной среды удовлетворяет следующему реологическому уравнению:

$$\sigma_{ik}^{(v)} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \quad (1.3)$$

Подставляя тензор вязких напряжений в уравнения Навье-Стокса (1.2) получим

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + P \delta_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right). \quad (1.4)$$

В большинстве случаев коэффициент динамической вязкости можно считать постоянным вдоль потока и вынести его из-под знака производной. Тогда уравнения движения (1.4) для совершенного газа, т. е. когда имеет место зависимость $P = (\kappa - 1)\rho E$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + (\kappa - 1)\rho E \delta_{ik}) = \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (1.5)$$

Проекция уравнений движения на координатные оси x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1^2 + (\kappa - 1)\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_1 u_3) = \\ = \eta \Delta u_1 + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (1.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2^2 + (\kappa - 1)\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_2 u_3) = \\ = \eta \Delta u_2 + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (1.6b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1 u_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2 u_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3^2 + (\kappa - 1)\rho E) = \\ = \eta \Delta u_3 + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (1.6c)$$

2. Уравнения для энергетических характеристик

Пусть $\rho \frac{u^2}{2} + \rho E$ – полная (кинетическая плюс внутренняя) энергия элемента объема $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \geq V_h$, $\Delta V \ll L_{\min}^3$ физического пространства $\bar{\Omega} \subset E^3$; здесь $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_i \cdot u_i$. Обозначим через \vec{J} – вектор полной плотности потока энергии вязкого теплопроводного газа

$$J_k = \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) u_k - \sigma_{ik} u_i - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (2.1)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности.

$$\text{Введем тензор напряжений } \sigma_{ik} = -P \delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(v)}, \quad (2.2)$$

где $\sigma_{ik}^{(v)}$ – тензор вязких напряжений (1.3).

С учетом выражения для вектора плотности полного потока энергии (2.1) закон сохранения полной энергии при течении в области $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ сжимаемого вязкого, теплопроводного газа имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) \vec{u} - \sigma_{ik} u_i - \lambda \nabla T \right] \quad (2.3)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E + P \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (2.4)$$

Введем хорошо известное в теории тепломассообмена число Прандтля $\text{Pr} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$. Из различных источников [6, 7] число Прандтля для воздуха оценивается величинами $\text{Pr} = 0,7 \div 0,74$. Обозначим через $\kappa = c_p / c_v$ – коэффициент адиабаты Пуассона, для воздуха $\kappa = 1,4 \div 1,405$. Вектор теплового потока обусловленный теплопроводностью, выражается через градиент температуры по формуле

$$\vec{q} = -\frac{\eta c_p}{\text{Pr}} \nabla T. \quad (2.5)$$

Тогда уравнение энергии (3.4) примет форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E + P \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (2.6)$$

Для совершенного газа имеют место соотношения

$$P = (\kappa - 1) \rho E, \quad E = c_v T + \text{const}. \quad (2.7)$$



Используя формулы (2.7), в предположении что κ, c_v – постоянные, уравнение сохранения полной энергии для течения совершенного газа можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + \kappa \rho E \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta \kappa}{\text{Pr}} \frac{\partial E}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

Используя уравнение сохранения импульса, записанное в форме [8]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k - \sigma_{ik}), \quad (2.9)$$

где тензор напряжений σ_{ik} определяется зависимостью (2.2), нетрудно получить уравнение переноса кинетической энергии. Умножим уравнение (2.9) для i -й компоненты импульса на компоненту скорости u_i

$$u_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = u_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k - \sigma_{ik}).$$

(по i не суммируется)

Используя уравнение неразрывности, продолжим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u_i^2}{2} \right) &= \frac{u_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k - u_i^2 \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} - u_i \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= - \frac{u_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k - \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{u_i^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \sigma_{ik}) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

(по i не суммируется)

Учитывая выражение (2.2) для тензора напряжений можно продолжить

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{u_i^2}{2} u_k + P \delta_{ik} u_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) + P \delta_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

(по i не суммируется)

Проведя свертывание по индексу i , окончательно получим уравнение переноса кинетической энергии сжимаемого вязкого газа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(\rho \frac{u^2}{2} + P \right) \right] = P \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i \right) - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (2.10)$$

Вычитая из закона сохранения полной энергии (2.6) уравнение переноса кинетической энергии (2.10), получаем уравнение переноса внутренней энергии, имеющее место в любой точке физического пространства R_ϕ^3 в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho E u_k] = -P \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (2.11)$$

Воспользовавшись известным соотношением векторного анализа

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \vec{f} \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{f},$$

уравнения переноса кинетической и внутренней энергий (2.10), (2.11) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k \rho \frac{u^2}{2} \right) = -u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik}^{(v)} u_i) - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k (\rho E + P)] = u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (2.13)$$

Используя зависимости (2.7) уравнения переноса кинетической и внутренней энергий (2.12), (2.13) в случае совершенного газа можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k \rho \frac{u^2}{2} \right) = -(\kappa - 1) u_k \frac{\partial \rho E}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik}^{(v)} u_i) - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \kappa \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k \rho E] = (\kappa - 1) u_k \frac{\partial \rho E}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta \kappa}{Pr} \frac{\partial E}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (2.15)$$

Входящий в уравнения переноса кинетической и внутренней энергий член $\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ описывает диссипацию кинетической энергии в тепло благодаря вязкости.

В книге [1] показано, что диссипативный член может быть записан в виде

$$\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right).$$

Вычисление правой части приводит к формуле

$$\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \eta \Phi,$$

где Φ – так называемая диссипативная функция, равная

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \\ & + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Нетрудно показать, что диссипативная функция Φ всегда положительна. Действительно, подчеркнутые члены диссипативной функции всегда поло-



жительны, а первый член в квадратных скобках и последний член $-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$

можно представить в форме

$$\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right].$$

Последнее полученное выражение также всегда положительно. Заметим, что диссипативную функцию можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\Phi = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+$$

$$+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2. \quad (2.17)$$

Для того чтобы привести уравнение сохранения полной энергии, например (2.8), уравнение переноса кинетической энергии, например, (2.14) к рабочему виду, необходимо еще вычислить свертку $\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}^{(v)}u_i)$, которая входит в эти уравнения и описывает поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Используя уравнения для тензора вязких напряжений (1.3), а также следующие очевидные тождества

$$u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) \quad i, j = \overline{1,3} \quad (2.18)$$

(по i, j не суммируется)

$$u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = \overline{1,3} \quad (2.19)$$

(по i, j не суммируется)

в результате простых, но несколько громоздких вычислений получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}^{(v)}u_i) = \eta \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\eta}{3} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{u_2^2}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{u_3^2}{2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\eta}{3} \left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \quad (2.20)$$

$$+ \frac{5}{3} \eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

При использовании полученной формулы (2.20) уравнение сохранения полной энергии совершенного газа можно представить в форме

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho E \right) = & -\nabla \cdot \left[\bar{u} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \kappa \rho E \right) \right] + \eta \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \\
 & + \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{u_1^2}{6} + \frac{\kappa}{\text{Pr}} E \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{u_2^2}{6} + \frac{\kappa}{\text{Pr}} E \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{u_3^2}{6} + \frac{\kappa}{\text{Pr}} E \right) \right] + \\
 & + 2\eta \left[\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] - \\
 & - \frac{5}{3} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Конечно, закон сохранения полной энергии не даст ответа на вопрос, какая величина кинетической энергии и где (участок течения) диссипирует во внутреннюю. Закон сохранения полной энергии может исполнять различные «контрольные» функции: правильность счета внутренней и кинетической энергии, правильность счета всех уравнений, помогать авторам избавиться от грубых ошибок в алгоритме, найти наиболее слабые места всей методики.

Уравнения переноса кинетической энергии в случае совершенного газа, например (2.15), теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) = & -\nabla \cdot \left[\rho \frac{u^2}{2} \bar{u} \right] - (\kappa - 1) \bar{u} \nabla \rho E + \eta \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{u_1^2}{6} \right) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{u_2^2}{6} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{u_3^2}{6} \right) \right] + 2\eta \left[\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] - \\
 & - \frac{5}{3} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) - \eta \Phi,
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

а уравнение переноса внутренней энергии в случае совершенного газа, например (2.15), в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) = -\kappa \nabla \cdot (\rho E \bar{u}) + (\kappa - 1) \bar{u} \cdot \nabla \rho E + \nabla \cdot \left(\frac{\eta \kappa}{\text{Pr}} \nabla E \right) + \eta \Phi \tag{2.23}$$

Знание закономерностей изменения энтропии в потоке необходимо как составная анализа физических процессов, происходящих при течении. Исто-



для из уравнений переноса внутренней энергии (2.11) (или (2.13)) и используя термодинамические соотношения Гиббса (0.5b, 0.5c), легко получить по определению [1] «общее уравнение переноса тепла»

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{u} \nabla S \right) = \nabla \left(\frac{\eta c_p}{Pr} \nabla T \right) + \eta \Phi. \quad (2.23a)$$

В случае совершенного газа и $c_v, c_p = const$ общее уравнение переноса тепла (2.23) можно записать в нужном для нас виде

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} = -\rho \bar{u} \nabla S + \frac{1}{E} \nabla \left(\frac{\eta c_p}{Pr} \nabla E \right) + \frac{\eta c_v}{E} \Phi. \quad (2.24)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части уравнения (2.24). Если применить к нему формулу векторного анализа, записанную чуть ниже уравнения переноса (2.11), то имеем

$$\frac{1}{E} \nabla \left(\frac{\eta c_p}{Pr} \nabla E \right) = \nabla \left(\frac{1}{E} \frac{\eta c_p}{Pr} \nabla E \right) + \frac{\eta c_p}{Pr} \frac{(\nabla E)^2}{E^2}. \quad (2.25)$$

Здесь

$$(\nabla E)^2 = \nabla E \cdot \nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x_3} \right)^2.$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial \rho S}{\partial t}$ с использованием уравнения непрерывности и (2.24), (2.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} &= S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial S}{\partial t} = -S \nabla (\rho \bar{u}) - (\rho \bar{u}) \nabla S + \\ &+ \nabla \left(\frac{1}{E} \frac{\eta c_p}{Pr} \nabla E \right) + \frac{\eta c_p}{Pr} \frac{(\nabla E)^2}{E^2} + \frac{\eta c_v}{E} \Phi, \end{aligned}$$

откуда следует искомое уравнение переноса энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \nabla (\rho S \bar{u}) = \nabla \left(\frac{1}{E} \frac{\eta c_p}{Pr} \nabla E \right) + \frac{\eta c_p}{Pr} \frac{(\nabla E)^2}{E^2} + \frac{\eta c_v}{E} \Phi. \quad (2.26)$$

Таким образом, авторами разработана полная математическая модель течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа, для которого предстоит разработать алгоритм расчета и реализовать его на ЭВМ. В результате авторы планируют провести количественный анализ сложных физических процессов, заложенных в модели.



Библиографические ссылки

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М., 1988.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1977.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды Т. I. М., 1970.
4. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы: пер. с английского. М., 1974.
5. Meixner J. Ann. Phys (5), 39, 333 (1941); Zs. Phys. Chem. Abt. B, 53, 235 (1943).
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1969.
7. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. I. М., 1969.
8. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики Т. II. М., 1971.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., 1964.