МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тихоокеанский государственный университет»

Кафедра «Высшая математика»

Дисциплина **«МАТЕМАТИКА»**

(заочная форма обучения)

1 семестр. Лекция по теме 8

«Метод наименьших квадратов»

Лекцию разработал

доцент кафедры «Высшая математика» ТОГУ

Манаков В. М.

Хабаровск 2019

Оглавление *с краткими аннотациями*

В лекции разобран теоретический материал, необходимый для выполнения задания 8 контрольной работы № 1. Для удобства студентов названия и нумерация тем лекций совпадают с названиями и нумерацией заданий контрольной работы

Тема 8. Метод наименьших квадратов

8.1. Основные понятия

Параметры функции *– аргументы функции, остающиеся неизменными в серии измерений значений функции.*

Экспериментальные данные *– значения функции* $y = f(x; a, b)$, измеренные для нескольких значений x *при одних и тех же значениях параметров* a, b.

Экспериментальные точки *– графическое изображение экспериментальных данных.*

Метод наименьших квадратов *– самый распространенный метод нахождения параметров функции по экспериментальным данным.*

Теоретическая функция *– функция, значения параметров которой находят по экспериментальным данным.*

Сглаживание экспериментальных точек *– замена экспериментальных точек графиком теоретической функции.*

Хорошее сглаживание экспериментальных точек *– не слишком большое отклонение экспериментальных точек от графика теоретической функции.*

Наилучшие значения параметров теоретической функции *– такие значения параметров, при которых график теоретической функции сглаживает экспериментальные точки лучше, чем при других значениях параметров.*

Линейная теоретическая функция *- теоретическая функция вида* $y = ax + b$.

Теоретическая прямая *– график линейной теоретической функции.*

8.2. Постановка задачи для двухпараметрической теоретической функции

Пусть требуется найти параметры a, b функции $y = f(x; a, b)$. Казалось бы, чего проще: измерим значения y для двух значений x и решим систему

$$\begin{cases} f(x_1; a, b) = y_1, \\ f(x_2; a, b) = y_2. \end{cases}$$

К сожалению, любое измерение производится с какой – то погрешностью, поэтому по двум экспериментальным данным параметры a, b определяются слишком грубо. Чтобы повысить точность нахождения параметров a, b количество экспериментальных данных увеличивают.

Сформулируем идею нахождения наилучших значений параметров теоретической функции методом наименьших квадратов.

Пусть произведено n измерений функции $y = f(x; a, b)$ при одних и тех же значениях параметров a, b. Получены n экспериментальных данных $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. Отклонение теоретической функции от экспериментальных данных будем измерять функцией параметров

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i;a,b) - y_i)^2.$$

Для наилучших значений параметров a, b функция $D(a,b)$ имеет наименьшее значение. Необходимое условие экстремума функции двух переменных

$$\begin{cases} D'_a(a,b) = 0, \\ D'_b(a,b) = 0. \end{cases}$$

Расписывая частные производные D'_a, D'_b и сокращая на 2, получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(f(x_i;a,b) - y_i) \cdot f_a(x_i;a,b) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(f(x_i;a,b) - y_i) \cdot f_b(x_i;a,b) = 0. \end{cases}$$

8.3. Линейная теоретическая функция

Пусть $f(x;a,b) = ax + b$. Тогда $f_a(x;a,b) = x$, $f_b(x;a,b) = 1$. Подставим в систему уравнений $f(x_i;a,b) = ax_i + b$, $f_a(x_i;a,b) = x_i$, $f_b(x_i;a,b) = 1$. После раскрытия скобок и группировки слагаемых получим

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными a, b можно решить, например, по формулам Крамера.

8.4. Примеры.

Пример 1. Методом наименьших квадратов найдите функцию $y = ax + b$ по экспериментальным данным, приведенным в таблице. Постройте экспериментальные точки и полученную теоретическую прямую.

x	1	2	3	4
y	1.2	1.3	1.5	1.6

Решение. Наилучшие значения параметров a, b находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Найдем сначала суммы, которые входят в систему уравнений. Для удобства вычислений составим расчетный бланк.

	x	y	x^2	xy
	1	1.2	1	1.2
	2	1.3	4	2.6
	3	1.5	9	4.5
	4	1.6	16	6.4
Σ	10	5.6	30	14.7

Записываем систему

$$\begin{cases} 30a + 10b = 14.7, \\ 10a + 4b = 5.6. \end{cases}$$

Решаем по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 30 \cdot 4 - 10 \cdot 10 = 20,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14.7 & 10 \\ 5.6 & 4 \end{vmatrix} = 14.7 \cdot 4 - 10 \cdot 5.6 = 2.8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 30 & 14.7 \\ 10 & 5.6 \end{vmatrix} = 30 \cdot 5.6 - 14.7 \cdot 10 = 21,$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2.8}{20} = 0.14,$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{21}{20} = 1.05.$$

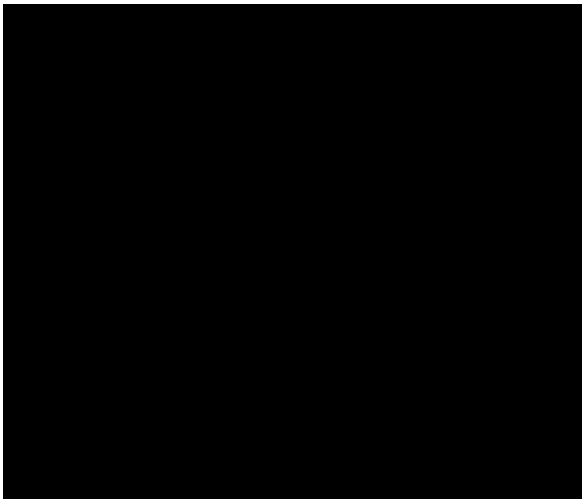

Рис. 1. Экспериментальные точки (●) и сглаживающая прямая y=0.14x+1.05.

Получили наилучшую теоретическую линейную функцию y=0.14x+1.05 (Рис. 1).

Оценим качество сглаживания экспериментальных данных, для этого вычислим теоретические значения y

$$y_1 = 0.14 \cdot 1 + 1.05 = 1.19,$$

$$y_2 = 0.14 \cdot 2 + 1.05 = 1.33,$$

$$y_3 = 0.14 \cdot 3 + 1.05 = 1.47,$$

$$y_4 = 0.14 \cdot 4 + 1.05 = 1.61.$$

Составим таблицу

x	$y_{\text{теор.}}$	$y_{\text{эксп.}}$	$y_{\text{теор.}} - y_{\text{эксп.}}$
1	1.19	1.2	-0.01
2	1.33	1.3	+0.03
3	1.47	1.5	-0.03
4	1.61	1.6	+0.01

Видим, что отклонение $y_{\text{теор.}}$ от $y_{\text{эксп.}}$ меньше, чем точность измерения $y_{\text{эксп.}}$. Значит, при точности измерения данных до десятых, линейная функция y=0.14x+1.05 достаточно надежно сглаживает экспериментальные данные. Результат вычисления по формуле линейной функции y=0.14x+1.05 следует также округлять до десятых.

Пример 2. Методом наименьших квадратов найдите функцию $y = ax + b$ по экспериментальным данным, приведенным в таблице. Постройте экспериментальные точки и полученную теоретическую прямую.

x	1	2	3	4	5
y	6.3	7.3	5.8	3.8	4.3

Решение. Наилучшие значения параметров a, b находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Найдем сначала суммы, которые входят в систему. Для удобства вычислений составим расчетный бланк.

	x	y	x^2	xy
	1	6.3	1	6.3
	2	7.3	4	14.6
	3	5.8	9	17.4
	4	3.8	16	15.2
	5	4.3	25	21.5
Σ	15	27.5	55	75

Записываем систему

$$\begin{cases} 55a + 15b = 75, \\ 15a + 5b = 27.5. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 55 \cdot 5 - 15 \cdot 15 = 50,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 75 & 15 \\ 27.5 & 5 \end{vmatrix} = 75 \cdot 5 - 15 \cdot 27.5 = -37.5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 55 & 75 \\ 15 & 27.5 \end{vmatrix} = 55 \cdot 27.5 - 75 \cdot 15 = 387.5,$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-37.5}{50} = -0.75,$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{387.5}{50} = 7.75.$$

Рис. 2. Экспериментальные точки (●) и сглаживающая прямая $y = -0.75x + 7.75$.

Получили наилучшую теоретическую линейную функцию $y = -0.75x + 7.75$ (Рис. 2).

Оценим качество сглаживания экспериментальных данных, для этого вычислим теоретические значения y

$$y_1 == -0.75 \cdot 1 + 7.75 = 7.00,$$

$$y_2 == -0.75 \cdot 2 + 7.75 = 6.25,$$

$$y_3 == -0.75 \cdot 3 + 7.75 = 5.50,$$

$$y_4 == -0.75 \cdot 4 + 7.75 = 4.75,$$

$$y_5 == -0.75 \cdot 5 + 7.75 = 4.00.$$

Составим таблицу

x	$y_{теор.}$	$y_{эксп.}$	$y_{теор.} - y_{эксп.}$
1	7.00	6.3	+0.70
2	6.25	7.3	-1.05
3	5.50	5.8	-0.30
4	4.75	3.8	+0.95
5	4.00	4.3	-0.30

Видим, что отклонение $y_{теор.}$ от $y_{эксп.}$ на порядок больше, чем точность измерения $y_{эксп.}$. Значит, при точности измерения до десятых, наилучшая линейная функция $y = -0.75x + 7.75$ недостаточно надежно сглаживает экспериментальные данные. Результат вычисления по формуле наилучшей линейной функции $y = -0.75x + 7.75$ следует округлять до десятых (до точности измерения данных). Но последний знак будет сомнительным.

<u>Замечание 1.</u> Если мысленно соединить экспериментальные точки на рис. 2 гладкой кривой, то получим линию очень похожую на график многочлена третьей степени. Формула многочлена третьей степени $y = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D$ содержит 4 параметра. Для их нахождения методом наименьших квадратов недостаточно 4-5 экспериментальных данных, требуется хотя бы 12-15.

Глоссарий

Линейная теоретическая функция - *теоретическая функция вида* $y = ax + b$.

Метод наименьших квадратов – *самый распространенный метод нахождения параметров функции по экспериментальным данным.*

Наилучшие значения параметров теоретической функции – *такие значения параметров, при которых график теоретической функции сглаживает экспериментальные точки лучше, чем при других значениях параметров.*

Параметры функции – *аргументы функции, остающиеся неизменными в серии измерений значений функции.*

Сглаживание экспериментальных точек – *замена экспериментальных точек графиком теоретической функции.*

Теоретическая прямая – *график линейной теоретической функции.*

Теоретическая функция – *функция, значения параметров которой находят по экспериментальным данным.*

Хорошее сглаживание экспериментальных точек – *не слишком большое отклонение экспериментальных точек от графика теоретической функции.*

Экспериментальные данные – *значения функции* $y = f(x; a, b)$, измеренные для нескольких значений x *при одних и тех же значениях параметров* a, b.

Экспериментальные точки – *графическое изображение экспериментальных данных.*

Библиографический список

Основная литература

1. *Манаков, В. М.* Системы линейных алгебраических уравнений: учебное пособие / В. М. Манаков, В. В. Мухранова, Т. С. Нам – Хабаровск : Изд - во Тихоокеан. гос. ун - та, 2015. – 79 с. - ISBN 978-5-7389-1759-2 (с. 75 – 77).
Ссылка на ресурс: http://lib.pnu.edu.ru/downloads/TextExt/uchposob/Manakov1.pdf

2. *Бидерман, В. И.* Математика: элементы математического анализа : учебное пособие / В. И. Бидерман − Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. − 197 с. - ISBN 978-5-7389-1173-6 (с. 187 – 193).
Ссылка на ресурс: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/dc/b8/dcb8f774-7876-473a-b113-fae01a2aa156/biderman_matematika_analiz.pdf

3. *Агапова, Е. Г.* Вычислительная математика : учебное пособие / Е. Г. Агапова. - Хабаровск : Изд-во ТОГУ, 2017. - 92с. - ISBN 978-5-7389-2354-8 (с. 83 - 85).
Ссылка на ресурс: http://lib.pnu.edu.ru/downloads/TextExt/uchposob/Agapova16.pdf?id=1014576

Дополнительная литература

1. *Шипачев, В. С.* Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев - Москва: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 479 с. - ISBN 9785160100722 (с. 304 – 306).
Ссылка на ресурс: http://znanium.com/go.php?id=990716