



УДК 536.46

© В. К. Булгаков, 2007

## ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ХИМИЧЕСКИМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ\*

*Булгаков В. К.* – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

Разработана теория турбулентного тепло-массопереноса в пограничном слое с химической брутто-реакцией имеющей большой изотермический эффект. Рассмотрено влияние химической реакции на интенсивность турбулентных пульсаций температуры. Приведены результаты расчетов на ЭВМ влияния химической реакции на турбулентный тепло-массоперенос, на интенсивность пульсаций температуры в пограничном слое, содержащим волну горения.

The theory turbulent heat-mass transmission in a boundary layer with chemical gross-reaction having big isothermal effect is developed. Influence of chemical reaction on intensity of turbulent pulsations of temperature is considered. Results of calculations on the computer of influence of chemical reaction on turbulent heat-mass transmission, on intensity of pulsations of temperature in the boundary layer containing a wave of burning are resulted.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу химической гидродинамики (рис. 1).

В области  $\Omega(x, y)$  имеет место турбулентное слаборасширяющееся течение, удовлетворяющее гипотезам пограничного слоя. Через поверхность  $Ox$  поступает исходный реагент, который в волне горения в результате сильной экзотермической брутто-реакции превращается в конечный продукт. Для выяснения основных количественных закономерностей турбулентного тепло-массопереноса в пограничном слое с

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96012)

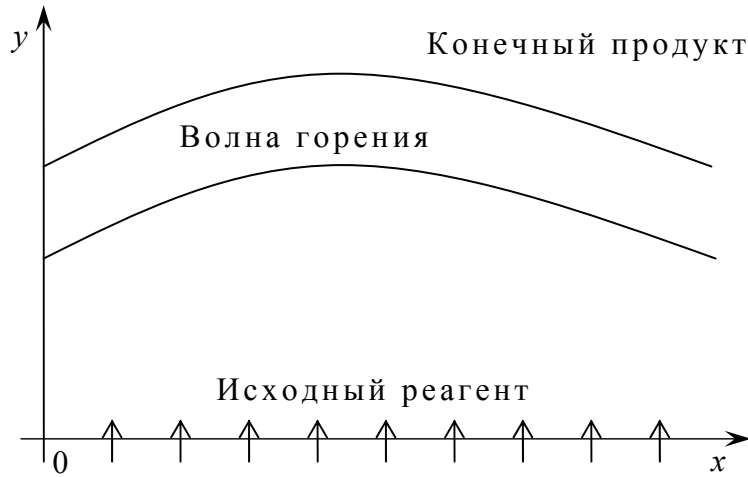


Рис. 1

химическими превращениями рассмотрим задачу при следующих допущениях:

- сплошная среда состоит из исходного и получающегося при химической брутто-реакции конечного продукта;
- скорость брутто-реакции зависит от концентрации исходного реагента  $a$  температуры среды  $T$ ;
- среда является динамически несжимаемой;
- теплофизические характеристики среды постоянны.

Тогда, пренебрегая работой сил трения, систему уравнений, определяющую температуру среды, концентрацию исходного реагента и скорость движения среды, можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{c_p} w(a, T) \\
 u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} &= L \chi \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - w(a, T) \\
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Учитывая, что для большинства химически реагирующих сред число Льюиса-Семенова  $L \approx 1$ , рассмотрим случай  $L = 1$ .

Предположим, что между полями концентрации реагента и температуры среды имеет место интеграл [1]



$$\frac{a}{a_s} = \frac{T_r - T}{T_r - T_s}, \quad (2)$$

где  $T_r$  – температура конечного продукта, индекс  $s$  относится к твердой стенке плоского слаборасширяющегося течения.

Заметим, что условие существования интеграла (2) при выполнении перечисленных выше допущений имеет вид

$$\frac{Q}{c_p(T_r - T_s)} = \frac{1}{a_s}.$$

Для слаборасширяющихся течений это условие выполняется.

Тогда, используя (2), уравнение теплопроводности можно записать в форме

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{c_p} w(T), \quad (3)$$

где  $w(T) = k_0 a_s^n \left( \frac{T_r - T}{T_r - T_s} \right)^n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$ .

Уравнение (3) является основой дальнейшего анализа.

## 2. Теория турбулентного теплопереноса в пограничном слое с химической брутто-реакцией

Рассмотрим турбулентный пограничный слой, в котором имеет место брутто-реакция с большим экзотермическим эффектом. В рамках принятой постановки задачи химическая реакция не влияет на динамическую турбулентность (кинетическую энергию турбулентности, скорость ее диссипации). Однако она является одним из определяющих факторов, формирующих температурное поле в пограничном слое и поле концентрации исходного реагента, поэтому химическая реакция влияет как на математические ожидания рассматриваемых полей, так и на поля пульсаций. Естественно, что химическая реакция должна влиять и на корреляции  $\overline{T'v'}$ ,  $\overline{a'v'}$ , описывающие турбулентный тепло- и массоперенос.

Наличие химической реакции в пограничном слое приводит к появлению нового характерного времени изменения параметров среды – характерного времени химической реакции  $\tau_r$ , которое приближенно равно  $1/\bar{w}$  [2], где  $\bar{w} = k_0(\bar{a})^n \exp\left(-\frac{E}{R\bar{T}}\right)$  – характерная скорость химической реакции. Поэтому наиболее крупные турбулентные неоднородности температуры и концентрации реагента в волне горения име-

ют характерный период, ограниченный  $\tau_r$ . Пульсации скорости движения среды, период которых больше  $\tau_r$ , перенося количество движения, не могут вносить существенный вклад в перенос теплоты и концентрации, т. к. соответствующим этим пульсациям неоднородности температуры и концентрации будут «рассасываться» химической реакцией, теплопроводностью и диффузией.

Для количественного описания влияния реакции на турбулентный перенос запишем транспортное уравнение для турбулентного потока тепла  $g_t = -\overline{T'v'}$ . Исходя из уравнения теплопроводности (3) и количества движения системы (1), применяя стандартную процедуру вывода транспортных уравнений, для  $g_t$  можно получить уравнение

$$\bar{u} \frac{\partial g_t}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial g_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\chi + c_1 v_t) \frac{\partial g_t}{\partial y} + c_2 v_t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right| - \bar{c}_3 \frac{\varepsilon}{k R} g_t + \frac{Q}{c_p} \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} g_t, \quad (4)$$

которое в отличие от уравнения для нереагирующего пограничного слоя [3] содержит слагаемое  $\frac{Q}{c_p} \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} g_t$ . Этот член моделирует порождение или диссипацию химической реакцией (в зависимости от знака) потока  $g_t$ .

На основании экспериментальных данных, приведенных в работах [3, 4], параметры уравнения (4) можно принять равными:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1.6$ ,  $\bar{c}_3 = 3.8$ ,  $R = 0.7$ .

Рассмотрим слагаемое  $\frac{\varepsilon}{k R} g_t$ , описывающее с точностью до нормирующего множителя диссипацию  $g_t$  молекулярной вязкостью и теплопроводностью. Его структура имеет вид  $\frac{g_t}{\tau_g}$ , где  $\tau_g$  – характерный

временной масштаб корреляционной функции  $g_t$ . Вводя коэффициент  $R$ , равный отношению временных масштабов  $\tau_g / \tau_d$ , где  $\tau_d$  – временной масштаб динамической турбулентности и учитывая, что  $\tau_d \approx k / \varepsilon$ , приходим к принятому в уравнении (4) представлению

$$\frac{g_t}{\tau_g} \approx \frac{\varepsilon}{k R} g_t. \quad (5)$$

Как отмечалось выше, в волне горения пограничного слоя следует учитывать пульсации скорости движения, период которых ограничен характерным временем  $\tau_r$ . Поэтому для зоны химической реакции  $k$  в соотношении (5) надо понимать как кинетическую энергию пульсаций



скорости, характерный период которых ограничен  $\tau_r$ .

Исходя из физических соображений запишем соотношение для  $k(\tau_r)$  – кинетической энергии турбулентных пульсаций скорости, характерный период которых ограничен временем  $\tau_r$ . Пусть  $k$  – кинетическая энергия турбулентности, соответствующая всему спектру пульсаций скорости, а масштаб пульсаций – возрастающая функция их характерного периода, причем наиболее крупномасштабным пульсациям соответствует период  $T_0 \approx \frac{k}{\varepsilon}$ . Тогда для  $k(\tau_r)$  можем записать  $k(\tau_r) = k \varphi(\tau_r / T_0)$ , где  $\varphi(\tau_r / T_0)$  – зависимость, представляющая собой отношение  $k(\tau_r)$  к кинетической энергии, соответствующей всему спектру пульсаций. По определению зависимость  $\varphi$  должна удовлетворять условиям:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) \approx 1$ ,  $\varphi(\infty) = 1$ . Учитывая, что  $\tau_r / T_0 \approx \varepsilon / (k \bar{w})$ , зависимость  $\varphi$  можно аппроксимировать формулой

$$\varphi = 1 - \exp\left(-B \frac{\varepsilon}{k \bar{w}}\right), \quad (6)$$

где  $B$  – постоянная,  $B \approx 1$ .

Диссипация кинетической энергии турбулентности осуществляется через мелкомасштабные пульсации скорости. Здесь важно подчеркнуть, что известное соотношение для диссипации Колмогорова-Прандтля [5, с. 35]

$$\varepsilon = 0.09 \frac{k^2}{\tau_r} \quad (7)$$

вычисляется как количество энергии, поступающей от осредненного течения к наиболее крупномасштабным возмущениям скорости, которая, согласно физической схеме Ричардсона, передается через всю иерархию возмущений разных порядков и в конце концов рассеивается, переходя в теплоту. Это означает, что диссипацию, входящую в выражение (5), следует вычислять по соотношению (7), в котором  $k$  и  $\tau_r$  определяются вкладом всех пульсаций скорости. Следовательно, окончательно диссипативный член можно записать в виде  $c_3 \frac{k}{\tau_r} g_t$ , где

$$c_3 = \bar{c}_3 0.09 / R = 0.49.$$

Таким образом, закономерности турбулентного теплопереноса в волне горения пограничного слоя описываются уравнением

$$\bar{u} \frac{\partial g_t}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial g_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi + c_1 \nu_t \right) \frac{\partial g_t}{\partial y} + c_2 \nu_t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right| - c_3 \frac{k}{\tau_r} (1 - \delta) g_t, \quad (8)$$

где  $\delta = 2 \frac{v_t \bar{w}}{k} \left[ 1 - \exp \left( -B \frac{0.09k}{v_t \bar{w}} \right) \right] \left[ \frac{Q}{c_p} \frac{E}{RT^2} - \frac{n(T_r - T_s)}{a_s(T_r - T)} \right]$ .

Рассмотрим случай локально изотропной турбулентности (когда в уравнении (8) определяющими являются последние два члена). Учитывая, что  $v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\overline{u'v'}$ , а  $\overline{u'v'} = 0.3k$  [4], получаем

$$g_t = \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\varphi}{1-\delta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (9)$$

где  $Pr_t = \frac{0.49}{0.48} \approx 1$ .

Соотношение (9) отличается от классической формулы для нереагирующей среды множителем  $\varphi/(1-\delta)$ , который описывает влияние химической реакции на турбулентный теплоперенос в волне горения.

Сопоставляя соотношение (9) с формулой градиентного представления для турбулентного теплового потока  $-c_p \bar{\rho} \overline{T'v'} = \lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ , получаем, что в случае локально изотропной турбулентности коэффициент турбулентной теплопроводности

$$\lambda_t = \frac{c_p v_t \bar{\rho}}{Pr_t} \frac{\varphi}{1-\delta}. \quad (10)$$

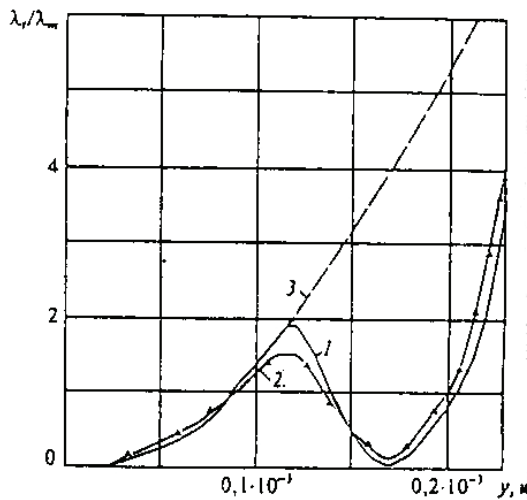


Рис. 2

Отметим, что коэффициент турбулентной диффузии, определяющий перенос концентрации исходного реагента выражается через  $\lambda_t$  по формуле  $D_t = L_t \lambda_t / (c_p \bar{\rho})$ , где турбулентное число Льюиса-Семенова  $L_t \approx 1$ .

На рис. 2 представлены распределения отношения коэффициентов турбулентной и молекулярной теплопроводности  $\lambda_t / \lambda_m$  вдоль оси  $y$  в волне горения газовой фазы баллиститного пороха  $H$ .

Кривая 1 посчитана в локально изотропном приближении (по зависимости (10)), кривая 2 – результат расчета на базе уравнения (8), кривая



3 – без учета влияния химической реакции.

Как следует из анализа кривых рис. 2, химическая реакция в газовой фазе существенно влияет на коэффициент турбулентного теплопереноса в пограничном слое. Локально изотропное приближение (зависимость (10)) хорошо описывает теплообмен в волне горения и может быть использовано в практических расчетах.

### 3. Влияние химической реакции на турбулентные пульсации температуры

Рассмотрим турбулентные пульсации поля температуры пограничного слоя, в котором происходит химическая брутто-реакция с большим тепловыделением и проведем анализ влияния химической реакции на возникновение пульсаций температуры, а также на интенсивность пульсаций развитой турбулентности.

Для малых трехмерных возмущений  $a'$ ,  $T'$  стационарных двумерных полей концентрации исходного реагента и температуры среды, описываемых уравнениями (2), (3), можно записать

$$\frac{a'}{a_s} = -\frac{T'}{T_r - T_s}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \chi \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) + AT', \quad (12)$$

где  $A = k_0 \frac{Q}{c_p} a_s^n \left( \frac{T_r - \bar{T}}{T_r - T_s} \right)^n \left( \frac{E}{R\bar{T}^2} - \frac{n}{T_r - \bar{T}} \right) \exp\left(-\frac{E}{R\bar{T}}\right)$ .

При записи уравнения (12) использовано условие  $u' = v' = w' = 0$ , которое означает, что рассматриваются неоднородности температуры, порождаемые химической реакцией динамически устойчивого состояния.

Из (11) следует, что поле пульсаций концентрации исходного реагента  $a'$  подобно полю пульсаций температуры  $T'$ , поэтому анализ влияния химической реакции достаточно провести для пульсаций температуры. Отметим, что линеаризация скорости реакции относительно  $T'$  предполагает исключение из анализа режимов, определяемых неравенством  $1/A \ll \tau_t, \tau_k$ , где  $\tau_t, \tau_k$  – характерные времена теплопроводной и конвективной релаксации. Этот случай не представляет интереса, так как он описывает мгновенную реакцию в среде с «замороженными» пульсациями.

Отыскивая решение уравнения (12) в виде

$$T' = T(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (13)$$

для  $T(y)$  получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{v}{\chi} \frac{dT}{dy} + \lambda T = 0, \quad T(0) = T(l_r) = 0,$$

где

$$\lambda = -(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{\chi}(i\omega - i\alpha u + A), \quad (14)$$

$l_r$  – ширина волны горения в пограничном слое. Для проводимого ниже анализа достаточно рассмотреть случай  $v, A = const$ . Тогда введя функцию  $\Psi(y) = T(y) \exp\left(-\frac{v}{2\chi}y\right)$ , получаем следующую задачу

Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \left[ \lambda - \left(\frac{v}{2\chi}\right)^2 \right] \Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(l_r) = 0.$$

Ее собственные значения есть [6]

$$\lambda_m = \left(\pi m / l_r\right)^2 + (v/2\chi)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Условие устойчивости малых возмущений температуры (13) имеет вид [7]  $Im \omega < 0$ .

Используя (14) и введя  $\gamma_m = \alpha^2 + \beta^2 + \left(\pi m / l_r\right)^2$ , условие устойчивости можно записать в виде  $\chi \gamma_m^2 + v^2 / 4 \chi > A$ . Откуда следует, что при

$$\chi \left(\pi / l_r\right)^2 + v^2 / 4 \chi > A, \quad (15)$$

все возмущения (всего спектра волновых чисел) будут устойчивыми – химическая реакция не приводит к возникновению неустойчивости. Если же реакция не удовлетворяет условию устойчивости (15), то значение

$$\gamma_* = \sqrt{A / \chi - (v/2\chi)^2} \quad (16)$$

делит спектр волновых чисел на две области: высокочастотную устойчивую и низкочастотную (соответствующую крупномасштабным возмущениям) неустойчивую.

Теперь рассмотрим влияние химической реакции на интенсивность пульсаций температуры развитой турбулентности. Подчеркнем, что исследуется возможность «подпитки» реакцией уже существующих в волне горения турбулентных пульсаций температуры, обусловленных динамической турбулентностью и неоднородностью поля температуры. Исходя из уравнения энергии (3), представим корреляцию  $\overline{T'^2 v'}$  в виде





$$-\overline{T'^2 v'} = \alpha_T \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\varphi}{1-\delta} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y},$$

где  $\alpha_T \approx 1$ ; диссипативный член  $\chi \frac{\partial T'}{\partial y} \frac{\partial T'}{\partial y}$  в виде

$$\chi \frac{\partial T'}{\partial y} \frac{\partial T'}{\partial y} = \beta_T \frac{k}{v_t \varphi} \overline{T'^2},$$

где  $\beta_T \approx 0.5$ . Тогда для квадрата интенсивности пульсаций температуры  $\overline{T'^2}$  можем записать

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y}}_{(I)} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \chi + \alpha_T \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\varphi}{1-\delta} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y}}_{(II)} + \\ &+ \underbrace{2 g_t \left| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right|}_{(III)} - \underbrace{2 \frac{\beta_T k}{v_t \varphi} (1-\delta) \overline{T'^2}}_{(IV)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет ту же структуру, что и уравнение (8). Физический смысл слагаемых уравнения (17) состоит в том, что они описывают:

- (I) – конвективный перенос квадрата интенсивности пульсаций температуры осредненным течением;
- (II) – перенос молекулярной и турбулентной теплопроводностью;
- (III) – порождение пульсациями скорости на градиенте осредненной температуры;
- (IV) – диссипацию молекулярной теплопроводностью и диссипацию (или порождение) химической реакцией.

В локально изотропном приближении для пульсаций температуры из (17) следует

$$\overline{T'^2} = 2 \frac{v_t^2}{Pr_t k} \frac{\varphi^2}{(1-\delta)^2} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)^2. \quad (18)$$

Учитывая, что  $v_t / \sqrt{k} = 0.6l$ , где  $l$  – масштаб турбулентности, при  $Pr_t \approx 1$  для интенсивности пульсаций температуры  $|T'| = \sqrt{\overline{T'^2}}$  получаем

$$|T'| = l \frac{\varphi}{1-\delta} \left| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right|.$$

Для химически не реагирующей среды ( $\varphi = 1$ ,  $\delta = 0$ ) это соотношение дает классическую формулу теории пути смешения [7]. Следо-

вательно, влияние химической реакции на интенсивность пульсаций температуры  $|T'|$  происходит так же, как и на турбулентный теплоперенос, например, в локально изотропном приближении через множитель  $\varphi/(1-\delta)$ .

На рис. 3 представлены вдоль координаты  $y$  распределения отношения интенсивности пульсаций температуры  $|T'|$  к осредненной тем-

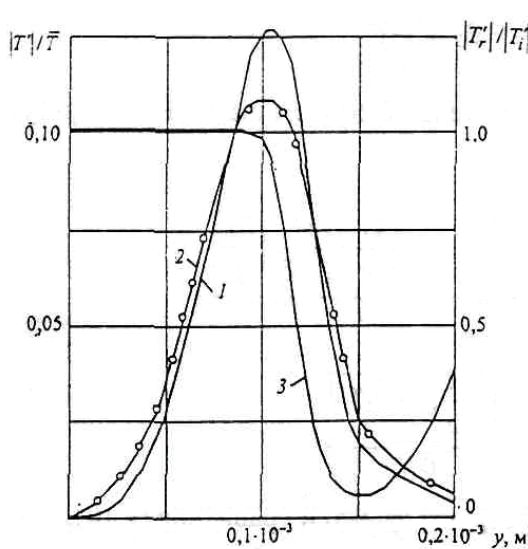


Рис. 3

пературе  $\bar{T}$  в волне горения топлива  $H$ , посчитанные на базе уравнения (18) – кривая 1 и численного счета уравнения (17) – кривая 2. Кривая 3 описывает отношение интенсивности пульсаций, описываемых уравнением (18) к пульсациям  $|T'_i|$ , посчитанным без учета влияния реакции.

Сопоставляя кривые рис. 3, можно отметить, что химическая реакция существенно влияет на пульсации температуры, а локально изотропное приближение удовлетвори-

тельно описывает распределение интенсивности пульсаций температуры в волне горения. Учет диффузии пульсаций температуры приводит к незначительному сглаживанию кривой распределения и уменьшению максимума пульсаций (см. кривые 1, 2).

### Библиографический список

1. Щетинков Е. С. Физика горения газов. М., 1965.
2. Математическая теория горения и взрыва. Зельдович Я. Б. [и др.] М., 1980.
3. Турбулентность / Под ред. П. Брэдшоу. М., 1980.
4. Рейнольдс А. Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М., 1979.
5. Булгаков В. К., Булгаков Н. В. Математические модели теплопереноса турбулентных слаборасширяющихся и отрывных течений в ДВС. Хабаровск, 2003.
6. Михлин С. Г. Курс математической физики. М., 1968.
7. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизмы и теория. М., 1963.