МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тихоокеанский государственный университет»

Кафедра «Высшая математика»

Дисциплина **«МАТЕМАТИКА»**

(заочная форма обучения)

2 семестр. Лекция по теме 4

«Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»

Лекцию разработала

старший преподаватель

«Высшая математика» ТОГУ

Нам Т. С.

Хабаровск 2019

Оглавление *с краткими аннотациями*

В лекции разобран теоретический материал, необходимый для выполнения задания 4 контрольной работы № 2. Для удобства студентов названия и нумерация тем лекций совпадают с названиями и нумерацией заданий контрольной работы

Тема 4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

где коэффициенты $p,\ q$ – постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется *однородным*. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Общим решением уравнения (2) является функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{3}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3),

C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b), если существуют постоянные числа λ_1, λ_2, не равные нулю, такие что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a,b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = 0$, и $\lambda_2 = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b).

Кратко критерий *линейной независимости* может быть сформулирован следующим образом: функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются *линейно независимыми* на интервале (a,b), если определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

отличен от нуля для любых $x \in (a, b)$. В противном случае функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ *линейно зависимы*.

4.2. Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Эйлер предложил искать частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2) в виде $y = e^{kx}$. Если $y = e^{kx}$ является частным решением линейного однородного уравнения (2), то при подстановке этого решения в уравнение мы должны получить тождество.

Подставим:

$$(e^{kx})'' + p(e^{kx})' + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Но так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{4}$$

Мы получили так называемое *характеристическое уравнение* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Решения квадратного уравнения (4) имеют вид:

$$k_1 = \frac{-p+\sqrt{(-p)^2-4\cdot q}}{2},\ k_2 = \frac{-p-\sqrt{(-p)^2-4\cdot q}}{2} \tag{5}$$

Замечание 1. В общем виде, решения квадратного уравнения

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{6}$$

имеет вид

$$k_1 = \frac{-b+\sqrt{(-b)^2-4\cdot a\cdot c}}{2a},\ k_2 = \frac{-b-\sqrt{(-b)^2-4\cdot a\cdot c}}{2a} \tag{7}$$

Таким образом, квадратное уравнение (4) может иметь в зависимости от дискриминанта $D = (-p)^2 - 4 \cdot q$, два различных действительных решения, два совпадающих действительных решения (кратный корень) или пару комплексно-сопряженных решений.

В зависимости от корней характеристического уравнения выделяются частные решения (соответствующие корням характеристического уравнения), образующие фундаментальную систему решений и записывается общее решение (3). Корни и вид частного, общего решения уравнения (2) представлены в Таблице 1.

Таблица 1

Корни характеристического уравнения	Частные решения	Общее решение
1. случай. $D > 0$, два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$.	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_{\text{одн}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
2. случай. $D = 0$, два действительных и совпадающих корня $k_1 = k_2$.	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_1 = x e^{k_1 x}$	$y_{\text{одн}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$
3. случай. $D < 0$, k_1, k_2 комплексно-сопряженные, то есть $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$.	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\cdot \alpha x} \sin \beta x$	$y_{\text{одн}} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\cdot \alpha x} \sin \beta x$

Замечание 2. Сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .

1. Составим характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$.
2. Находим корни характеристического уравнения k_1, k_2.
3. В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем постоянными коэффициентами в виде:

- $y_{\text{одн}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
- $y_{\text{одн}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$, $k_1 = k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
- $y_{\text{одн}} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\cdot \alpha x} \sin \beta x$, $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 15y = 0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k - 15 = 0$$

Решим его

$$k_1 = \frac{2+\sqrt{(2)^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1},\ \ k_2 = \frac{2-\sqrt{(2)^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1}$$

Откуда

$$k_1 = 5, k_2 = -3$$

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных решения, имеем 1 случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1 = e^{5x}, y_2 = e^{-3x}$$

и общее решение данного дифференциального уравнения

$$y_{\text{одн}} = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 8y' + 3y = 0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$4k^2 - 8k + 3 = 0$$

Решим его

$$k_1 = \frac{8+\sqrt{(8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4},\ \ k_2 = \frac{8-\sqrt{(8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}$$

Откуда

$$k_1 = \frac{3}{2}, k_2 = \frac{1}{2}$$

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных решения, имеем 1 случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1 = e^{\frac{3}{2}x}, y_2 = e^{\frac{1}{2}x}$$

и общее решение данного дифференциального уравнения

$$y_{\text{одн}} = c_1e^{\frac{3}{2}x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 10k + 25 = 0$$

Решим его

$$k_1 = \frac{-10+\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1},\ \ k_2 = \frac{-10-\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1}$$

Откуда

$$k_1 = -5, k_2 = -5$$

Характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня, имеем 2 случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1 = e^{-5x}, y_2 = xe^{-5x}$$

и общее решение данного дифференциального уравнения

$$y_{\text{одн}} = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}.$$

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 8 = 0$$

Решим его

$$k_1 = \frac{-4+\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1},\ \ k_2 = \frac{-4-\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}$$

Откуда

$$k_1 = -2 + 2i, k_2 = -2 - 2i$$

где $i = \sqrt{-1}$

Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных решения, имеем 3 случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1 = e^{-2x}\cos 2x,\ y_2 = e^{-2x}\sin 2x$$

и общее решение данного дифференциального уравнения

$$y_{\text{одн}} = c_1 e^{-2x}\cos 2x + c_2 e^{-2x}\sin 2x.$$

4.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентам

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$, где p, q – вещественные числа; $f(x)$ – непрерывная функция.

Теорема 1. Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) равно сумме общего решения $y_{\text{одн}}(x)$ соответствующего однородного уравнения (2) и частного решения (3) $y_{\text{частн}}(x)$ исходного неоднородного уравнения.

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_{\text{частн}}(x)$$

Общее решение $y_{\text{одн}}(x)$ линейного однородного уравнения находим по алгоритму, приведенному выше. Частное решение $y_{\text{частн}}(x)$ неоднородного дифференциального уравнения находим по виду правой части.

1. случай. Если правая часть имеет вид:

- $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Уравнение (1) запишется в виде $y'' + py' + qy = P_n(x)$.

В этом случае частное решение ищем виде:

$y_{\text{частн}}(x) = Q_n(x) \cdot x^r$, где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (то есть r – число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x)$ многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i $(i = 1,2,\dots,n)$. Коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов*, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (1) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (1) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$$

Решение

Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_{\text{частн}}(x)$$

Шаг 1. Сначала находим решение однородного дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 0,$$

Для этого составим характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$ и решаем его

$k_1 = \frac{-4+\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$, $k_2 = \frac{-4-\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$

$k_1 = -2 + i, k_1 = -2 - i,$

Мы имеем два комплексно-сопряженных корня (третий случай) поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням имеет вид:

$$y_1 = e^{-2x}\cos x,$$

$$y_2 = e^{-2x}\sin 2x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x.$$

Так как правая часть исходного уравнения многочлен второй степени

$f(x) = 5x^2 - 32x + 5$, то частное решение

Здесь многочлен $P_2(x) = (5x^2 - 32x + 5)$ – многочлен второй степени, $a = 0$ таких корней характеристического уравнения нет, то есть $r = 0$. Тогда структура частного решения исходного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$y_{\text{частн}} = (Ax^2 + Bx + C)x^0 \Rightarrow y_{\text{частн}} = (Ax^2 + Bx + C)$

Найдем производные этой функции первого и второго порядка и поставим в исходное уравнение.

$$y'_{\text{част}} = 2Ax + B,$$

$$y''_{\text{част}} = 2A.$$

Подставим в уравнение

$$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$$

$$2A + 4(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 - 32x + 5$$

Сократим и раскроем скобки

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 - 32x + 5$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x в разных частях равенства (метод неопределенных коэффициентов).

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ 8A + 5B = -32 \\ 2A + 4B + 5C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 5B = -40 \\ 2A + 4B + 5C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -8 \\ C = 7 \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{частн}} = x^2 - 8x + 7,$$

а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7.$$

2. случай. Если функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = P_n(x) e^{ax}$$

то есть представляет собой произведение многочлена степени n и экспоненты, то частное решение этого уравнения ищется в виде

$$y_{\text{частн}} = Q_n(x) e^{ax} x^r$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, а r – кратность корня $k = a$ в характеристическом уравнении соответствующего однородного уравнения (2).

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = (15x + 38)e^{3x}.$$

Решение. Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{общ}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{частн}}$$

Шаг 1. Найдем $y_{\text{одн}}$ общее решение соответствующего однородного уравнения, то есть уравнения

$$y'' + 2y' = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 + 2k = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим корни характеристического уравнения

$k_1 = -2, k_2 = 0.$

Эти корни являются действительными и различными (первый случай), поэтому фундаментальная система решений, будет иметь вид:

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{0x} = 1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{одн}} = c_1 e^{-2x} + c_2.$$

Шаг 2. Найдем $y_{\text{частн}}$ – частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть уравнения

$$f(x) = (15x + 38)e^{3x}.$$

Здесь многочлен $P_1(x) = (15x + 38)$ – многочлен первой степени, $a = 3$ таких корней характеристического уравнения нет, то есть $r = 0$. Тогда структура частного решения исходного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{\text{частн}} = (Ax + B)e^{3x}x^0 \Rightarrow y_{\text{частн}} = (Ax + B)e^{3x}.$$

Найдем производные этой функции первого и второго порядка и поставим в исходное уравнение.

$$y'_{\text{част}} = Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x},$$

$$y''_{\text{част}} = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9(Ax + B)e^{3x}.$$

Подставим в уравнение

$$y'' + 2y' = (15x + 38)e^{3x}$$

$$3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9(Ax + B)e^{3x} + 2 \cdot (Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x}) = (15x + 38)e^{3x}$$

Сократим и раскроем скобки

$$3A + 3A + 9(Ax + B) + 2 \cdot \big(A + 3(Ax + B)\big) = (15x + 38),$$

$$3A + 3A + 9Ax + 9B + 2A + 6Ax + 6B = 15x + 38,$$

$$8A + 15Ax + 15B = 15x + 38$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x в разных частях равенства (метод неопределенных коэффициентов).

$$\begin{cases} 15A = 15 \\ 8A + 15B = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 8 \cdot 1 + 15B = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 15B = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид: $y_{\text{частн}} = (x + 2)e^{3x}$, а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{общ}} = c_1 e^{-2x} + c_2 + (x + 2)e^{3x}.$$

4.4. Задача Коши

Функция $y = y(x, C_1, C_2)$ – общее решение любого дифференциального уравнения второго порядка, которая содержит бесчисленное множество частных решений. Возникает вопрос: как из полученного множества решений выделить интересующее нас частное решение.

Задача Коши – это одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Она состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

Пример 7. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

$$\begin{cases} y'' + 4y = 5e^{x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}$$

Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{общ}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{частн}}$$

Шаг 1. Найдем $y_{\text{одн}}$ общее решение соответствующего однородного уравнения, то есть уравнения

$$y'' + 4y = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 + 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$. Мы имеем два комплексно-сопряженных корня (третий случай) поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням имеет вид:

$$y_1 = \cos 2x,$$

$$y_2 = \sin 2x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой:

$$y_{\text{одн}} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

Шаг 2. Найдем $y_{\text{частн}}$ – частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть уравнения

$$f(x) = 5e^x.$$

Здесь многочлен $P_0(x) = 5$ – многочлен нулевой степени, $a = 1$ таких корней характеристического уравнения нет, то есть $r = 0$. Тогда структура частного решения исходного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{\text{частн}} = Ae^x.$$

Найдем производные этой функции первого и второго порядка и поставим в исходное уравнение.

$$y'_{\text{част}} = Ae^x,$$

$$y''_{\text{част}} = Ae^x.$$

Подставим в уравнение $y'' + 4y = 5e^x$

$Ae^x + 4 \cdot Ae^x = 5e^x$, Отсюда $A = 1$.

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид: $y_{\text{частн}} = e^x$, а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{общ}} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x.$$

Шаг 3. Решим задачу Коши. Используем начальные условия задачи и найдем значения констант C_1 и C_2.

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{\text{общ}} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x \\ y'_{\text{общ}} = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + e^0 = 0 \\ -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 + e^0 = 3 \end{cases} \begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ 2c_2 + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Подставим $\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$ в общее решение и получим искомое решение задачи Коши.

$$y_{\text{част}} = \cos 2x + \sin 2x + e^x.$$

Глоссарий

Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– уравнение вида* $y'' + py' + qy = 0$, *где* p, q *– числа.*

Фундаментальные решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– два линейно независимых решения этого уравнения.*

Линейная независимость двух функций *– отношение этих функций не равно константе.*

Линейная комбинация *– сумма с числовыми коэффициентами.*

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– линейная комбинация с произвольными коэффициентами фундаментальных решений этого уравнения.*

Теорема о корнях характеристического уравнения *– теорема, позволяющая находить фундаментальные решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– уравнение вида* $y'' + py' + qy = f(x)$, *где* p, q – вещественные числа; $f(x)$ – непрерывная функция.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– решение этого уравнения, не содержащее неизвестных постоянных.*

Теорема о специальной правой части *– теорема, позволяющая находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами *– сумма общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка *– задача нахождения частного решения, удовлетворяющего дополнительным условиям вида* $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=v_0$.

Основная литература

1. *Бидерман, В. И.* Элементы теории дифференциальных уравнений : учебное пособие / В. И. Бидерман − Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2014. − 186 с. - ISBN 978-5-7389-1498-0 (с. 80 – 102).

Ссылка на ресурс: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/a7/e9/a7e9c09b-5d94-408a-b2dc-9296e30c01d8/diffuravneniya100914.pdf

2. *Манаков, В. М.* Системы линейных алгебраических уравнений: учебное пособие / В. М. Манаков, В. В. Мухранова, Т. С. Нам – Хабаровск : Изд - во Тихоокеан. гос. ун - та, 2015. – 79 с. - ISBN 978-5-7389-1759-2 (с. 72 – 75).

Ссылка на ресурс: http://lib.pnu.edu.ru/downloads/TextExt/uchposob/Manakov1.pdf

3. *Агапова, Е. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие /Е. Г. Агапова, А. Г. Зарубин, Т. Н. Ряйсенен - Хабаровск : Изд-во ТОГУ, 2013. - 104с. - ISBN 978-5-7389-1317-4 (с. 33 -89).

Ссылка на ресурс: http://lib.pnu.edu.ru/downloads/TextExt/uchposob/Agapova3.pdf?id=1014517

Дополнительная литература

1. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу : учебное пособие. – 8-е изд., стер. / Г. И. Запорожец - СПб. : Лань, 2014. – 464 с. - ISBN 978-5-8114-0912-9 (с. 400 – 410).

Ссылка на ресурс: https://e.lanbook.com/reader/book/149/?previewAccess=1#2

2. *Шипачев, В. С.* Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев - Москва: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 479 с. - ISBN 9785160100722 (с. 443 – 449).

Ссылка на ресурс: http://znanium.com/go.php?id=990716

3. *Салимов, Р. Б.* Математика для студентов строительных и технических специальностей : учебное пособие / Р. Б Салимов. - СПб., : Лань, 2018. - 364 с. – ISBN 978-5-8114-3059-8 (с. 273 – 275, с. 278 – 279).

Ссылка на ресурс: https://e.lanbook.com/reader/book/107956/?previewAccess=1#4

4. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебное пособие. 16-е изд., стер. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович – СПб. : Лань, 2010. – 736 с. - ISBN 978-5-8114-0499-5 (с. 582 – 597).

Ссылка на ресурс:https://e.lanbook.com/reader/book/2660/?previewAccess=1#4

5. *Натансон, И. П.* Краткий курс высшей математики : учебное пособие. 10-е изд., стер. / И. П. Натансон. - СПб., : Лань, 2009. - 736 с. – ISBN 978-5-8114-0123-9 (с. 536 - 573).

Ссылка на ресурс: https://e.lanbook.com/reader/book/283/?previewAccess=1#10